Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Т. Лупашко, Об автоморфизмах коммутативных луп Муфанг, *Дискрет. матем.*, 2011, том 23, выпуск 2, 108–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1146>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 12:13:41

Об автоморфизмах коммутативных луп Муфанг

© 2011 г. Н. Т. Лупашко

Доказывается, что группа автоморфизмов произвольной коммутативной лупы Муфанг Q является расширением группы $F(1)$, состоящая из всех автоморфизмов лупы Q , которые индуцируют тождественное отображение фактор-лупы Q по ее ассоциаторной подлупе $A(Q)$, с помощью группы автоморфизмов абелевой группы $Q/A(Q)$. Исследуется строение группы $F(1)$ в случаях, когда лупа Q центрально нильпотентна, или конечно порождена, или является ZA -лупой.

Одним из наиболее изученным классом неассоциативных луп является класс коммутативных луп Муфанг. В настоящей работе изучается строение группы автоморфизмов F таких луп Q . Пусть $A(Q)$ — ассоциаторная подлупа лупы Q , и пусть $F(1)$ — множество всех автоморфизмов из F , которые индуцируют тождественное отображение на фактор-лупе $Q/A(Q)$. Доказывается, что группа F является расширением группы $F(1)$ с помощью группы автоморфизмов абелевой группы $Q/A(Q)$. Исследуется строение группы $F(1)$ при условии, что лупа Q является центрально нильпотентной или ZA -лупой, или конечно порожденной. Отметим, что группы автоморфизмов коммутативных луп Муфанг исследуются в [1], а в [2, 3] исследуются группы внутренних подстановок таких луп, которые являются подгруппами групп автоморфизмов.

Теперь напомним некоторые понятия и результаты из теории луп, которые можно найти в [3].

Коммутативные лупы Муфанг (кратко КЛМ) характеризуются тождеством

$$x^2 \cdot yz = xy \cdot xz.$$

Группа внутренних подстановок $I(Q)$ КЛМ Q — это группа, порожденная всеми внутренними подстановками $L(u, v) = L(uv)^{-1}L(u)L(v)$, где $u, v \in Q$ и $L(x)y = xy$. Для элементов $a, b, c \in Q$ ассоциатор (a, b, c) определяется равенством

$$ab \cdot c = (a \cdot bc)(a, b, c).$$

Подлупа $A(Q)$, порожденная всеми ассоциаторами КЛМ Q , называется ассоциаторной подлупой КЛМ Q . Центр КЛМ Q — это нормальная подлупа

$$Z(Q) = \{x \in Q \mid (x, y, z) = 1 \ \forall y, z \in Q\}.$$

В произвольной КЛМ справедливы тождества

$$L(x, y)z = z(z, y, x), \tag{1}$$

$$(x, y, z) = (y^{-1}, x, z) = (y, x, z)^{-1} = (y, z, x), \tag{2}$$

$$(x, y, z)^3 = 1, \tag{3}$$

$$(xy, u, v) = (x, u, v)((x, u, v), x, y) \cdot (y, u, v)((y, u, v), y, x). \tag{4}$$

Возрастающим центральным рядом некоторой КЛМ Q называется вполне упорядоченная по включению последовательность

$$Z_0 = 1 \subset Z_1 \subset Z_2 \subset \dots \subset Z_\alpha \subset \dots \subset Z_\gamma = Q \quad (5)$$

нормальных подлуп КЛМ Q , удовлетворяющая следующим условиям:

- (1) $Z_\alpha = \sum_{\beta < \alpha} Z_\beta$ при предельном порядковом числе α , и
- (2) фактор-лупа $Z_{\alpha+1}/Z_\alpha$ — фактор ряда (5) при любом α содержится в центре фактор-лупы Q/Z_α .

Возрастающий центральный ряд (5) КЛМ Q называется ее верхним центральным рядом, если его фактор $Z_{\alpha+1}/Z_\alpha$ при любом α совпадает с центром фактор-лупы Q/Z_α . КЛМ, обладающая возрастающим центральным рядом, называется ZA -лупой. Если верхний центральный ряд ZA -лупы конечен, то она называется центрально нильпотентной, а число факторов такого ряда — степенью центральной нильпотентности.

Для КЛМ Q обозначим $A_1(Q) = A(Q)$ и по индукции определяем $A_{n+1}(Q)$ как подлупу, порожденную всеми ассоциаторами (u, x, y) , где $u \in A_n(Q)$, $x, y \in Q$. Получим ряд нормальных подлуп

$$Q = A_0(Q) \supseteq A_1(Q) \supseteq A_2(Q) \supseteq \dots \supseteq A_i(Q) \supseteq \dots, \quad (6)$$

который называется нижним центральным рядом КЛМ Q . КЛМ Q центрально нильпотентна степени n , если ее верхний и нижний центральные ряды соответственно имеют вид

$$1 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_n = Q, \quad Q \supset A_1(Q) \supset \dots \supset A_n(Q) = 1. \quad (7)$$

Наиболее глубоким результатом теории КЛМ является теорема Брака–Слэби: КЛМ с n , $n > 1$, порождающими центрально нильпотентна степени не более чем $n - 1$.

В [4, 5, 6] построены примеры КЛМ с n порождающими, которые являются центрально нильпотентными степени $n - 1$. Поэтому верно следующее утверждение.

Лемма 1. *Свободная КЛМ с n свободными порождающими центрально нильпотентна степени $n - 1$.*

Пусть теперь Q — произвольная КЛМ с нижним центральным рядом (6). Через F обозначим группу автоморфизмов КЛМ Q , а через $F(k)$, $k = 1, 2, \dots$, — множество всех автоморфизмов из F , которые индуцируют тождественное отображение на $Q/A_k(Q)$. Легко показать, что $F(k)$ является нормальной подгруппой группы F .

Лемма 2 ([1]). *Для $m = 1, 2, \dots$ и для каждого неотрицательного числа k элементы группы $F(k)$ индуцируют тождественное отображение на $A_m(Q)/A_{m+k}(Q)$.*

Через $F(1) = F_0 \supseteq F_1 \supseteq \dots \supseteq F_i \supseteq \dots$ обозначим нижний центральный ряд подгруппы $F(1)$ группы F . Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Для любого целого неотрицательного i справедливо включение $F_i \subseteq F(i + 1)$. Если $\varphi \in F(i)$, то $\varphi^3 \in F(2i)$. Более того, $\varphi^{f(i)} \in F(g(i))$ для $\varphi \in F(i)$, где $f(i) = 3^i$, $g(i) = 2^i$.*

Доказательство. Справедливо равенство $F_0 = F(1)$. Предположим, что $F_{i-1} \subseteq F(i)$. В [1] доказано, что для любых целых неотрицательных чисел k, m верно соотношение $(F(m), F(k)) \subseteq F(m+k)$, где $(F(m), F(k))$ означает подгруппу, порожденную всеми коммутаторами (u, v) , $u \in F(m)$, $v \in F(k)$. Тогда

$$F_i = (F_{i-1}, F_0) = (F_{i-1}, F(1)) \subseteq (F(i), F(1)) \subseteq F(i+1).$$

Поэтому $F_i \subseteq F(i+1)$ для любого целого числа i .

Пусть теперь $\varphi \in F(i)$, $x \in Q$. Согласно определению подгруппы $F(i)$, справедливо равенство $\varphi x = x\varphi$, где $y \in A_i(Q)$. По лемме 2,

$$\varphi y = y \pmod{A_{2i}(Q)}.$$

КЛМ диаассоциативна, поэтому

$$\varphi^2 x = \varphi(xy) = \varphi x \cdot \varphi y = (xy \cdot y) \pmod{A_{2i}(Q)} = (xy^2) \pmod{A_{2i}(Q)}.$$

Аналогично,

$$\varphi^3 x = (xy^3) \pmod{A_{2i}(Q)}.$$

Но $y \in A_i(Q)$ и $i > 0$, поэтому, согласно (3), $y^3 = 1$. Отсюда следует, что $\varphi^3 \in F(2i)$.

Покажем, что из $\varphi \in F(1)$ следует включение $\varphi^{f(i)} \in F(g(i))$ для любого целого числа $i \geq 1$. Действительно, для $i = 1$ утверждение доказано выше. Пусть $\varphi^{f(i-1)} \in F(g(i-1))$. Тогда

$$\varphi^{f(i)} = (\varphi^{f(i-1)})^3 \in F(g(i-1) \cdot 2) = F(g(i)).$$

Лемма доказана.

Следствие 1 ([1]). Пусть Q — центрально нильпотентная степени n КЛМ и пусть $F(1)$ — подгруппа группы ее автоморфизмов, определенная выше. Тогда $F(1)$ будет нильпотентной группой степени не больше $n-1$ и показателя, делящего 3^r , где $r = \min\{r \mid 2^r \geq n\}$, и следовательно, будет локально конечной группой.

Следствие 2. Если Q — конечно порожденная КЛМ, то ее подгруппа $F(1)$ группы $\text{Aut } Q$ является конечной 3-группой.

Доказательство. Согласно [3], ассоциаторная подлупа произвольной конечно порожденной КЛМ конечна. Пусть КЛМ Q порождается конечным множеством X . Из определения группы $F(1)$ следует, что если $\alpha \in F(1)$, то α индуцирует тождественное отображение на $Q/A(Q)$. Поэтому $\alpha x = xh$ для $x \in X$, где $h \in A(Q)$. Очевидно, что для $\alpha, \beta \in F(1)$, $\alpha \neq \beta$, если в записи $\alpha x_1 = x_1 h_1$, $\beta x_2 = x_2 h_2$ хотя бы одна из пар x_1, x_2 или h_1, h_2 содержит различные элементы. Множества $X, A(Q)$ конечны. Тогда число случаев, когда пары x_1, x_2 и h_1, h_2 содержат различные элементы, конечно. Отсюда следует, что группа $F(1)$ конечна. По лемме 1, КЛМ Q центрально нильпотентна. Тогда из следствия 1 следует, что $F(1)$ является конечной 3-группой. Следствие доказано.

Скажем, что лупа Q аппроксимируется лупами со свойством α , если для любого элемента a из Q существует нормальная подлупа H лупы Q такая, что $a \notin H$ и Q/H обладает свойством α .

Центрально нильпотентно аппроксимируемые КЛМ — это в точности те КЛМ, у которых равен единице член нижнего центрального ряда с первым бесконечным номером. Такие КЛМ характеризуются поддекартовыми произведениями центрально нильпотентных

луп. Легко убедиться, используя лемму 1, что свободные КЛМ центрально нильпотентно аппроксимируемы. В [7] приводится пример КЛМ, длина нижнего центрального ряда которой равна произвольному наперед заданному порядковому числу. Отсюда следует, что класс центрально нильпотентно аппроксимируемых КЛМ не замкнут относительно эпиморфных образов.

Лемма 4 ([1]). *Если КЛМ Q аппроксимируется центрально нильпотентными КЛМ, то подгруппа $F(1)$ группы автоморфизмов F аппроксимируется нильпотентными группами.*

Пусть L — произвольная КЛМ с группой автоморфизмов F . Через $J(L)$ обозначим множество всех автоморфизмов из F , действующих тождественно на $L/A(L)$, то есть $J(L) = F(1)$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть Q — КЛМ с группой автоморфизмов F , пусть $J = F(1)$ — подгруппа группы F , и пусть $Z_i(Q) = Z_i$, $Z_i(J)$ — члены верхних центральных рядов лупы Q и группы J соответственно. Тогда*

$$J(Q/Z_i) \cong J/Z_i(J).$$

Доказательство. Справедливо соотношение

$$J(Q/Z) \cong J/R,$$

где $Z = Z_1$,

$$R = \{\varphi \in J \mid \varphi x \cdot Z = xZ \ \forall x \in Q\}.$$

Пусть $\varphi \in R$, $x, u, v \in Q$. Тогда $\varphi u = uz_1$, $\varphi v = vz_2$, где $z_1, z_2 \in Z$. В силу (1) и (4),

$$\begin{aligned} \varphi L(u, v)x &= \varphi(x(x, v, u)) = \varphi x(\varphi x, \varphi v, \varphi u) = \varphi x(\varphi x, vz_2, uz_1) = \varphi x(\varphi x, v, u) \\ &= L(u, v)\varphi x, \end{aligned}$$

то есть $\varphi L(u, v) = L(u, v)\varphi$ для любых $u, v \in Q$. Это означает, что $\varphi \in Z(J)$, а тогда $R \subseteq Z(J)$.

Обратно, пусть $\varphi \in Z(J)$. Согласно (1) для любых $x, y, z \in Q$

$$\varphi x(\varphi x, y, z) = L(z, y)\varphi x = \varphi L(z, y)x = \varphi(x(x, y, z)) = \varphi x \cdot \varphi(x, y, z),$$

то есть

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x, y, z). \quad (8)$$

Из (8) и (2) получаем, что

$$\varphi(x, y, z) = (\varphi x, \varphi y, \varphi z) = \varphi^3(x, y, z), \quad (x, y, z) = \varphi^2(x, y, z).$$

Следовательно, автоморфизм φ^2 действует тождественно на $A(Q)$.

Пусть H — произвольная конечно порожденная подлупа КЛМ Q и пусть $\bar{\varphi}$ — сужение φ на $A(H)$. Тогда $\bar{\varphi}^2$ действует тождественно на $A(H)$. По теореме Брака–Слэби, подлупа H центрально нильпотентна, поэтому по следствию 1 автоморфизм $\bar{\varphi}$ имеет порядок, равный степени числа три. Тогда $\bar{\varphi}$ действует тождественно на $A(H)$. Поскольку H

является произвольной конечно порожденной подлупой КЛМ Q , то тогда и автоморфизм φ действует тождественно на $A(Q)$. Следовательно, из (8) следует, что

$$(\varphi x, y, z) = (x, y, z). \quad (9)$$

Теперь фиксируем элемент x и определим элемент a , полагая $\varphi x = xa$. Из (9) и (4) получаем, что

$$(x, y, z) = (xa, y, z) = (x, y, z)((x, y, z), x, a) \cdot (a, y, z)((a, y, z)a, x).$$

Тогда

$$(a, y, z) = ((x, y, z), x, a)^{-1}((a, y, z), a, x)^{-1} \quad (10)$$

для любых $y, z \in Q$. Из (10) при $y = x, z = w$ получаем, что $(a, x, w) = 1$ для любого $w \in Q$. В частности, оба сомножителя правой части равенства (10) равны единице. Поэтому $a \in Z$, а тогда $\varphi x \cdot Z = xZ$ для любого $x \in Q$, то есть $Z(J) \subseteq R$. Следовательно, $R = Z(J)$.

Предположим, что утверждение леммы верно для некоторого i . Тогда из определения верхнего центрального ряда лупы Q и предположения индукции получаем, что

$$\begin{aligned} J(Q/Z_{i+1}) &\cong J((Q/Z_i)/(Z_{i+1}/Z_i)) = J((Q/Z_i)/Z(Q/Z_i)) \cong J(Q/Z_i)/Z(J(Q/Z_i)) \\ &\cong (J/Z_i(J))/Z(J/Z_i(J)) \cong (J/Z_i(J))/(Z_{i+1}(J)/Z_i(J)) \cong J/Z_{i+1}(J). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть теперь Q — произвольная КЛМ с центром Z и группой внутренних подстановок I , и пусть $Z(I)$ — центр группы I . В [3] доказано, что $I(Q/Z) \cong I/Z(I)$. Тогда из этого факта, леммы 5 и определений ZA -лупы и центрально нильпотентной лупы индукцией мы непосредственно получаем следующие утверждения.

Теорема 1. Для КЛМ Q с группой $F(1)$, состоящей из автоморфизмов, индуцирующих тождественное отображение на $Q/A(Q)$, и с группой внутренних подстановок $I(Q)$ следующие условия эквивалентны:

- (1) КЛМ Q центрально нильпотентна ступени n ;
- (2) группа $F(1)$ нильпотентна ступени $n - 1$;
- (3) группа $I(Q)$ нильпотентна ступени $n - 1$.

Предложение 1. Для КЛМ Q с группой $F(1)$, состоящей из автоморфизмов, индуцирующих тождественное отображение на $Q/A(Q)$, и с группой внутренних подстановок $I(Q)$ следующие условия эквивалентны:

- (1) Q является ZA -лупой;
- (2) $F(1)$ является ZA -группой;
- (3) $I(Q)$ является ZA -группой.

Теперь рассмотрим группы автоморфизмов КЛМ с тривиальным центром, которые, ввиду (7), существенно отличаются от центрально нильпотентных луп. По лемме 1, такие лупы не могут быть конечно порожденными. Пример таких луп можно найти в [3]. Из леммы 5 следует, что если центр КЛМ Q тривиален, то и центр подгруппы $F(1)$ группы автоморфизмов F КЛМ Q также тривиален. В частности, центр группы внутренних подстановок КЛМ Q тоже тривиален. Теперь покажем, что центр $Z(F)$ группы автоморфизмов F КЛМ Q состоит только из автоморфизмов φ таких, что $\varphi^2 = 1$. (Очевидно, автоморфизм $x \rightarrow x^{-1}$, $x \in Q$ принадлежит $Z(F)$). Действительно, пусть $\varphi \in Z(F)$ и пусть $\varphi^2 \neq 1$. Это значит, что существует элемент $a \in Q$ такой, что $\varphi^2 a \neq a$. Если $x, y \in Q$, то в силу (8) и (2)

$$\varphi(a, x, y) = (\varphi a, \varphi x, \varphi y) = \varphi(\varphi^2 a, x, y).$$

Поэтому $(a, x, y) = (\varphi^2 a, x, y)$. Отсюда с использованием (4) и (2) получаем, что $(\varphi^2 a \cdot a^{-1}, x, y) = 1$ для любых $x, y \in Q$. Это означает, что $1 \neq \varphi^2 a \cdot a^{-1} \in Z(Q)$. Получили противоречие. Следовательно, центр $Z(F)$ группы автоморфизмов F КЛМ Q состоит только из таких автоморфизмов φ , что $\varphi^2 = 1$.

Теперь докажем следующие утверждения.

Лемма 6. *Эндоморфизм КЛМ Q с условием $A(Q) \neq Q$ является автоморфизмом тогда и только тогда, когда он индуцирует автоморфизм на $Q/A(Q)$.*

Доказательство. Пусть φ — эндоморфизм КЛМ Q и $\{a_i\}$ — множество ее порождающих. Покажем, что множество $\{\varphi a_i\}$ порождает Q . Действительно, согласно предположению $A(Q) \neq Q$. Тогда множество $\{a_i\}$ по модулю $A(Q)$ порождает $Q/A(Q)$. В [7] доказано, что в произвольной КЛМ ассоциаторная подлупа принадлежит подлупе Фраттини. Поэтому множество $\{\varphi a_i\}$ порождает Q . Обратное очевидно.

Следствие 3. *Пусть H — нормальная подлупа КЛМ Q с условием $A(Q) \neq Q$ и пусть $H \subseteq A(Q)$. Тогда для любого автоморфизма φ фактор-лупы Q/H существует автоморфизм лупы Q , который индуцирует φ .*

Доказательство. Действительно, существует эндоморфизм КЛМ Q , который индуцирует автоморфизм φ лупы Q/H . Так как $H \subseteq A(Q)$, этот эндоморфизм индуцирует автоморфизм на $Q/A(Q)$. По лемме 6, этот эндоморфизм является автоморфизмом.

Следствие 4. *Группа автоморфизмов КЛМ Q с условием $A(Q) \neq Q$ является расширением группы, состоящей из автоморфизмов, индуцирующих тождественное отображение на $Q/A(Q)$ с помощью группы автоморфизмов абелевой группы $Q/A(Q)$.*

Из следствий 1, 2, 4 и леммы 4 получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть КЛМ Q аппроксимируется центрально нильпотентными КЛМ. Тогда ее группа автоморфизмов является расширением нильпотентно аппроксимируемой группы $F(1)$, состоящей из всех автоморфизмов, индуцирующих тождественное отображение на $Q/A(Q)$ с помощью группы автоморфизмов абелевой группы $Q/A(Q)$. Если КЛМ Q центрально нильпотентна ступени n , то группа $F(1)$ нильпотентна ступени $n - 1$ и показателя 3^k , где $k = \max\{r \mid 2^r \leq n\}$. В частности, если КЛМ Q конечно порождена, то $F(1)$ будет конечной 3-группой.*

Хорошо известна теорема А. И. Мальцева [7] (см. также [8]): разрешимая группа автоморфизмов конечно порожденной абелевой группы полициклична. Однако также верно следующее утверждение.

Предложение 2. Разрешимая группа автоморфизмов Φ конечно порожденной КЛМ Q полициклическа.

Доказательство. Пусть H — периодическая часть КЛМ Q . Так как в КЛМ внутренние подстановки являются ее автоморфизмами [3], отсюда следует, что H — нормальная подлупа КЛМ Q . Согласно [11], КЛМ Q удовлетворяет условию максимальности для подлуп. Тогда H конечно порождена, и из теоремы Брака–Слэби и условия максимальности легко следует, что она конечна. Рассмотрим гомоморфизм $\alpha \rightarrow \text{Aut}(Q/H)$, сопоставляющий произвольному $\varphi \in \Phi$ автоморфизм $\bar{\varphi}$ фактор-лупы Q/H , индуцированный φ , то есть $\bar{\varphi}(aH) = \varphi(a)H$. Так как Q/H — конечно порожденная абелева группа без кручения, она разлагается в прямое произведение конечного числа бесконечных циклических групп. Тогда $\text{Aut}(Q/H)$ изоморфна группе целочисленных матриц с определителем ± 1 . Согласно [9, 10], любая разрешимая группа целочисленных матриц полициклическа. Поэтому Φ/Ψ , где $\Psi = \ker \alpha$, есть полициклическая группа целочисленных матриц. Докажем конечность Ψ . Действительно, если $a_1, \dots, a_k$ — система порождающих КЛМ Q , то для произвольного $\psi \in \Psi$ справедливо равенство $\psi(a_i) = a_i h_i, h_i \in H$. Ввиду конечности H , имеется лишь конечное число возможностей для образов порождающих a_i при отображениях из Ψ . Отсюда следует конечность Ψ , а тогда и полициклическость Φ . Предложение доказано.

Автор выражает благодарность Н. И. Санду за оказанную помощь при выполнении данной работы.

Список литературы

1. Санду Н. И., Об относительно свободных коммутативных лупах Муфанг. *Алгебра и логика* (1979) **18**, №3, 194–205.
2. Санду Н. И., Медиально нильпотентные дистрибутивные квазигруппы и СН-квазигруппы. *Сибирский матем. ж.* (1987) **28**, №2, 159–170.
3. Bruck R. H., *Survey of binary systems*. Springer, Berlin, 1958.
4. Smith J. D. H., On the nilpotence class of commutative Moufang loops. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* (1978) **84**, №3, 387–404.
5. Malbos J.-P., Sur la classe de nilpotence des boucles commutatives de Moufang et des espaces mediaux. *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A* (1978) **287**, 691–693.
6. Beneteau L., Free commutative Moufang loops and anticommutative graded rings. *J. Algebra* (1980) **67**, 1–35.
7. Санду Н. И., О длине нижнего центрального ряда (производного ряда) коммутативной лупы Муфанг. *Математические заметки* (1997) **62**, №3, 475–479.
8. Санду Н. И., О центрально нильпотентных коммутативных лупах Муфанг. В сб.: *Квазигруппы и лупы*. Штиинца, Кишинев, 1979, с. 145–155.
9. Мальцев А. И., О некоторых классах бесконечных разрешимых групп. *Математический сб.* (1951) **28**, №3, 567–588.
10. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., *Основы теории групп*. Наука, Москва, 1977.
11. Evans T., Identities and relations in commutative Moufang loops. *J. Algebra* (1974) **31**, 508–513.

Статья поступила 11.10.2010.