Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Жук, Предикатный метод построения решетки Поста,
Дискрет. матем., 2011, том 23, выпуск 2, 115–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1147>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 17:34:55

Предикатный метод построения решетки Поста

© 2011 г. Д. Н. Жук

В работе предлагается новый способ построения структуры всех замкнутых классов двузначной логики. В отличие от классических доказательств, в данной работе функции двузначной логики являются лишь вспомогательными объектами, а само построение выполняется на множестве предикатов.

1. Введение

В работах [1, 2] Э. Пост описал все замкнутые классы двузначной логики. Так как его доказательство было достаточно сложным и громоздким, в дальнейшем появились переработанные и упрощенные варианты доказательства [3, 4]. В работе предлагается еще один способ построения структуры всех замкнутых классов двузначной логики. Из соответствия Галуа следует, что для описания всех замкнутых классов двузначной логики достаточно описать все замкнутые множества предикатов. В данной работе функции двузначной логики являются лишь вспомогательными объектами, а само построение выполняется на множестве предикатов.

Сам метод заключается в следующем. Из всего множества предикатов выделяется узкий класс существенных предикатов, которых тем не менее достаточно для описания всех замкнутых классов. После этого описываются все минимальные замкнутые классы, содержащие функцию, существенно зависящую по крайней мере от двух переменных. Оказывается, существует только четыре таких минимальных класса. Затем для каждого минимального класса в явном виде описывается множество всех существенных предикатов, сохраняемых функциями из этого класса. Для каждого минимального класса это множество является обозримым, а в одном случае конечным. С использованием полученного описания легко строится вся структура замкнутых классов двузначной логики.

2. Необходимые определения

Пусть $E_k = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$, для $n \geq 1$ положим

$$P_k^n = \{f \mid f: E_k^n \rightarrow E_k\}, \quad P_k = \bigcup_{n \geq 1} P_k^n.$$

Элементы P_k будем называть функциями k -значной логики. На множестве P_k обычным образом определяем оператор замыкания $[\cdot]$ относительно операций суперпозиции. Множество $M \subseteq P_k$ называем замкнутым, если $[M] = M$. Замкнутое множество функций называется клоном, если в нем содержится тождественная функция.

Отображение $E_k^h \rightarrow \{0, 1\}$ будем называть предикатом арности h . Пусть

$$R_k^h = \{\rho \mid \rho: E_k^h \rightarrow \{0, 1\}\}, \quad R_k = \bigcup_{h \geq 1} R_k^h.$$

В работе предикаты будем изображать в виде матриц, в которых столбцам соответствуют наборы, на которых предикат принимает значение 1. Запись

$$\rho = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{2,1} & \dots & b_{n,1} \\ b_{1,2} & b_{2,2} & \dots & b_{n,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1,h} & b_{2,h} & \dots & b_{n,h} \end{pmatrix}$$

означает, что $\rho \in R_k^h$, $\rho(b_{i,1}, b_{i,2}, \dots, b_{i,h}) = 1$ для любого i , и предикат ρ принимает значение 0 на остальных наборах. Будем писать, что $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_h \end{pmatrix} \in \rho$, если $\rho(b_1, b_2, \dots, b_h) = 1$.

Будем говорить, что функция $f \in P_k^m$ сохраняет предикат ρ , если

$$f \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \dots & a_{m,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,h} & a_{2,h} & \dots & a_{m,h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(a_{1,1}, a_{2,1}, \dots, a_{m,1}) \\ f(a_{1,2}, a_{2,2}, \dots, a_{m,2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(a_{1,h}, a_{2,h}, \dots, a_{m,h}) \end{pmatrix} \in \rho$$

для любых $\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{1,2} \\ \dots \\ a_{1,h} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{2,1} \\ a_{2,2} \\ \dots \\ a_{2,h} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{m,1} \\ a_{m,2} \\ \dots \\ a_{m,h} \end{pmatrix} \in \rho$.

Через $\text{Pol}(\rho)$ обозначим множество всех функций $f \in P_k$, таких что f сохраняет ρ . Для $S \subseteq R_k$ положим

$$\text{Pol}(S) = \bigcap_{\rho \in S} \text{Pol}(\rho).$$

Через $\rho_{\leq}^k$ обозначим предикат $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k-1 \\ 0 & 1 & \dots & k-1 \end{pmatrix}$.

Определим несколько элементарных операций на множестве R_k . Пусть $\rho \in R_k^h$, $\rho' \in R_k^{h'}$, где $h, h' \in \mathbb{N}$. Тогда $\zeta\rho \in R_k^h$, $\tau\rho \in R_k^h$, $pr\rho \in R_k^h$, $\rho \times \rho' \in R_k^{h+h'}$, $\rho \wedge \rho' \in R_k^h$ для $h = h'$ задаются соотношениями

$$\begin{aligned} \zeta\rho &= \{(a_2, a_3, \dots, a_h, a_1) \mid (a_1, a_2, \dots, a_h) \in \rho\}, \\ \tau\rho &= \{(a_2, a_1, a_3, \dots, a_h) \mid (a_1, a_2, a_3, \dots, a_h) \in \rho\}, \\ pr\rho &= \{(a_2, a_3, \dots, a_h) \mid \exists a_1 \in E_k: (a_1, a_2, \dots, a_h) \in \rho\}, \\ \rho \times \rho &= \{(a_1, a_2, \dots, a_h, b_1, b_2, \dots, b_{h'}) \mid (a_1, a_2, \dots, a_h) \in \rho \wedge (b_1, b_2, \dots, b_{h'}) \in \rho'\}, \\ \rho \wedge \rho &= \{(a_1, a_2, \dots, a_h) \mid (a_1, a_2, \dots, a_h) \in \rho \cap \rho'\}. \end{aligned}$$

Пусть $Q \subseteq R_k$. Через $[Q]$ обозначим множество всех отношений, который можно получить с помощью конечного применения операций ζ , τ , pr , $\times$ и $\wedge$ из предикатов множества Q , а также предиката $\rho_{\leq}^k$. Если $[Q] = Q$, то мы говорим, что Q замкнуто.

В работе мы не будем использовать непосредственно элементарные операции. Вместо этого, вывод предиката из других предикатов будем изображать с помощью формулы над множеством предикатов с единственной логической связкой $\wedge$ и квантором существования, а именно, формулами вида

$$\rho(x_1, \dots, x_n) = \exists y_1 \dots \exists y_l \rho_1(z_{1,1}, \dots, z_{1,n_1}) \wedge \dots \wedge \rho_s(z_{s,1}, \dots, z_{s,n_s}),$$

где $z_{i,j} \in \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_l\}$. Можно убедиться, что если предикат ρ можно выразить такой формулой с помощью предикатов из множества Q , то $\rho \in [Q]$.

Множество всех предикатов, которые сохраняются функцией $f \in P_k$, будем обозначать через $\text{Inv}(f)$. Для $M \subseteq P_k$ положим

$$\text{Inv}(M) = \bigcap_{f \in M} \text{Inv}(f).$$

Следующая теорема из [5] описывает важное свойство операций Pol и Inv .

Теорема 1. Пусть $\mathbf{L}(P_k)$ — множество всех клонов в P_k , $\mathbf{L}(R_k)$ — множество всех замкнутых множеств в R_k , тогда отображения

$$\text{Inv}: \mathbf{L}(P_k) \rightarrow \mathbf{L}(R_k),$$

$$\text{Pol}: \mathbf{L}(R_k) \rightarrow \mathbf{L}(P_k)$$

являются биективными отображениями, которые сохраняют частичный порядок $\subseteq$, то есть

$$\forall A, B \in \mathbf{L}(P_k): A \subseteq B \Rightarrow \text{Inv}(B) \subseteq \text{Inv}(A),$$

$$\forall S, T \in \mathbf{L}(R_k): S \subseteq T \Rightarrow \text{Pol}(T) \subseteq \text{Pol}(S).$$

Из этой теоремы следует, что для описания структуры замкнутых классов P_2 достаточно описать структуру замкнутых классов предикатов.

Предикат ρ арности n называется существенным, если он не представляется в виде конъюнкции предикатов арности не более $n - 1$. Через $\tilde{R}_k$ обозначим множество всех существенных предикатов из R_k .

Набор $(a_1, \dots, a_n)$ называется существенным для предиката ρ арности n , если $\rho(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ и существуют $b_1, \dots, b_n \in E_k$, такие, что для любого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ выполняется

$$\rho(a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \dots, a_n) = 1.$$

Для $\rho \in R_k$ через $\tilde{\rho}$ обозначим предикат, заданный соотношением

$$\tilde{\rho}(x_1, \dots, x_n) = \sigma_1(x_2, \dots, x_n) \wedge \sigma_2(x_1, x_3, \dots, x_n) \wedge \dots \wedge \sigma_n(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

где $\sigma_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = \exists x_i \rho(x_1, \dots, x_n)$.

Лемма 1. Следующие три условия эквивалентны:

- (1) предикат ρ является существенным;
- (2) $\rho \neq \tilde{\rho}$;
- (3) для предиката ρ существует существенный набор.

Доказательство. Докажем, что из первого условия следует второе, из второго следует третье, и из третьего — первое.

Пусть предикат ρ — существенный, тогда по определению $\tilde{\rho} \neq \rho$.

Пусть $\rho \neq \tilde{\rho}$, тогда найдется набор $(a_1, \dots, a_n)$, такой, что $\tilde{\rho}(a_1, \dots, a_n) = 1$, $\rho(a_1, \dots, a_n) = 0$. Из определения предиката $\tilde{\rho}$ получаем, что для любого i найдется $b_i \in E_k$, такое, что

$$\rho(a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \dots, a_n) = 1.$$

Значит, набор $(a_1, \dots, a_n)$ является существенным для ρ .

Пусть $(a_1, \dots, a_n)$ — существенный набор для ρ , причем предикат ρ не существенный, тогда найдутся предикаты $\rho_1, \dots, \rho_l$ арности меньше n , такие, что

$$\rho(x_1, \dots, x_n) = \rho_1(\dots) \wedge \dots \wedge \rho_l(\dots).$$

Без ограничения общности можно считать, что каждый из предикатов $\rho_1, \dots, \rho_l$ зависит от всех переменных $x_1, \dots, x_n$, но хотя бы от одной не существенно. Так как $\rho(a_1, \dots, a_n) = 0$, один из предикатов $\rho_1, \dots, \rho_l$ на наборе $(a_1, \dots, a_n)$ обращается в ноль. Пусть $\rho_j(a_1, \dots, a_n) = 0$ и предикат ρ_j не зависит существенно от i -ой переменной. Но тогда не существует b_i , такого, что $\rho(a_1, \dots, a_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \dots, a_n) = 1$, а значит, набор $(a_1, \dots, a_n)$ не является существенным. Получено противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть ρ — несущественный предикат, тогда найдутся существенные предикаты $\rho_1, \dots, \rho_l \in [\{\rho\}]$, такие что $\rho \in [\{\rho_1, \dots, \rho_l\}]$, причем арность каждого из предикатов $\rho_1, \dots, \rho_l$ меньше, чем арность ρ .

Доказательство. Будем доказывать утверждение индукцией по арности предиката ρ . Пусть $\rho \in R_k^n$ — предикат минимальной арности, для которого утверждение неверно. По лемме 1,

$$\rho(x_1, \dots, x_n) = \sigma_1(x_2, x_3, \dots, x_n) \wedge \dots \wedge \sigma_n(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}),$$

где

$$\sigma_i(\dots) = \exists x_i \rho(x_1, \dots, x_n).$$

По предположению, для каждого i либо предикат σ_i существенный, либо ему можно сопоставить конечное множество существенных предикатов. Объединив эти предикаты для всех i , получаем утверждение леммы.

Лемма 3. Пусть S — замкнутое множество предикатов, тогда

$$[S \cap \tilde{R}_k] = S.$$

Доказательство. Вложение $[S \cap \tilde{R}_k] \subseteq S$ очевидно. Докажем обратное вложение. Пусть $\rho \in S$, тогда по лемме 2 либо предикат ρ существенный, либо существуют существенные предикаты $\rho_1, \dots, \rho_l \in [\{\rho\}] \subseteq S$, такие, что $\rho \in [\{\rho_1, \dots, \rho_l\}]$. Значит, $\rho \in [S \cap \tilde{R}_k]$.

Из леммы 3 следует, что произвольный замкнутый класс предикатов S однозначно задается множеством $S \cap \tilde{R}_k$ всех существенных предикатов из S .

Далее будем полагать, что $k = 2$. Для сокращения записи введем обозначения

$$\rho_{\neq} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_{\leq} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для $n \geq 2$ предикаты $\rho_{\vee, n}$, $\rho_{\wedge, n}$, $\rho_{\rightarrow, n}$ и $\rho_{+, n}$ задаются соотношениями

$$\rho_{\vee, n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 \iff (x_1 = 1) \vee (x_2 = 1) \vee \dots \vee (x_n = 1),$$

$$\rho_{\wedge, n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 \iff (x_1 = 0) \vee (x_2 = 0) \vee \dots \vee (x_n = 0),$$

$$\rho_{\rightarrow, n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 \iff (x_1 = 1) \vee (x_2 = 1) \vee \dots \vee (x_{n-1} = 1) \vee (x_n = 0),$$

$$\rho_{+, n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 \iff (x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0).$$

Через R_L обозначим множество предикатов ρ , которые задаются соотношением

$$\rho(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 \iff (x_1 + x_2 + \dots + x_n = c),$$

где $c \in \{0, 1\}$. Для $\mu \geq 2$ положим

$$h_\mu(x_1, x_2, \dots, x_{\mu+1}) = \bigvee_{i=1}^{\mu+1} x_1 x_2 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_{\mu+1}.$$

В частности,

$$h_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_3.$$

Клон $M \subseteq P_2$ будем называть существенно-минимальным, если в M содержится функция, существенно зависящая от 2 переменных, но ни в каком клоне, вкладывающемся в M , нет функций, существенно зависящих от двух переменных.

Через f^* будем обозначать функцию, двойственную к f относительно замены нуля на единицу, то есть

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}.$$

Для $M \subseteq P_2$ положим

$$M^* = \{f \in P_2 \mid f^* \in M\}.$$

3. Вспомогательные леммы

Лемма 4. В P_2 есть только следующие существенно-минимальные клоны: $\{\{x \vee y\}\}$, $\{\{x \wedge y\}\}$, $\{\{x + y + z\}\}$, $\{\{h_2\}\}$.

Доказательство. Пусть M — произвольный существенно-минимальный клон в P_2 . Пусть в нем есть функция $f(x, y)$, существенно зависящая ровно от двух переменных. Учитывая двойственность, достаточно рассмотреть случаи $f \in \{x \vee y, \bar{x} \vee y, \bar{x} \vee \bar{y}, x + y\}$. Можно убедиться, что верны равенства

$$\begin{aligned} \bar{x} \vee (\bar{x} \vee \bar{y}) &= \bar{x} \vee xy = \bar{x} \vee y, \\ (\bar{x} \vee y) \vee y &= x\bar{y} \vee y = x \vee y, \\ x + y + z &= (x + y) + z. \end{aligned}$$

Из них следует, что либо $\{f\} = \{x \vee y\}$, либо $\{f\} = \{x + y + z\}$.

Теперь рассмотрим случай, когда в M нет функций, существенно зависящих ровно от двух переменных. Пусть $m \geq 3$ — минимальное число, такое, что в M есть функция $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, существенно зависящая от всех своих переменных. Пусть $f(x, x, \dots, x) = \sigma(x)$, $f_{i,j}$ — функция, полученная из f отождествлением i -ой и j -ой переменных. Так как m минимально, $f_{i,j}$ зависит существенно не более чем от одной переменной. Тогда для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ выполняется равенство $f_{i,j} = \sigma(x_{l(i,j)})$, где $l(i, j) \in \{1, 2, \dots, m\}$. Если σ является константой c , то, учитывая, что значность логики меньше m , получаем, что f также совпадает с константой c . Если $\sigma(x) = \bar{x}$, то вместо f можно рассмотреть функцию $\sigma(f(x_1, \dots, x_m))$, которая также принадлежит $\{f\}$.

Таким образом, далее будем полагать, что $\sigma(x) = x$. Пусть $m = 3$. В этом случае рассмотрим 8 случаев, представленных в табл. 1.

Таблица 1.

	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x, x, y)$	x	y	x	y	x	y	x	y
$f(x, y, x)$	x	x	y	y	x	x	y	y
$f(y, x, x)$	x	x	x	x	y	y	y	y

Можно убедиться, что в первом случае $f(x, y, z) = h_2(x, y, z)$, а в восьмом случае $f(x, y, z) = x + y + z$. Во втором, третьем и пятом случаях можно убедиться, что f зависит существенно только от одной переменной. Четвертый, шестой и седьмой случаи отличаются только перестановкой переменных, поэтому рассмотрим только четвертый случай. В этом случае легко убедиться, что

$$f(f(x, y, z), y, z) = xy \vee yz \vee xz,$$

а значит, $[\{f\}] = [\{h_2\}]$.

Теперь рассмотрим случай, когда $m \geq 4$. Покажем, что найдутся m_1, m_2 , такие что $l(m_1, m_2) \notin \{m_1, m_2\}$. Рассмотрим функцию $g(x, y) = f(x, x, y, y, \dots, y)$. Если $g(x, y) = x$, то $l(m-1, m) \in \{1, 2\}$, если $g(x, y) = y$, то $l(1, 2) \in \{3, 4, \dots, m\}$. Пусть $l(m_1, m_2) = n$, где $n \notin \{m_1, m_2\}$. Тогда при отождествлении всех переменных функции f , кроме x_n , мы получим функцию, совпадающую с x_n . Значит, для любых n_1, n_2 , таких, что $n_1 \neq n$ и $n_2 \neq n$, выполняется равенство $l(n_1, n_2) = n$. Учитывая, что число переменных, отличных от x_n , больше, чем значность логики, видим, что $f(x_1, \dots, x_m) = x_n$. Получено противоречие. Лемма доказана.

Лемма 5. Для любого $n \geq 2$ справедливо включение $\rho_{\rightarrow, n} \in [\{\rho_{\rightarrow, 3}\}]$

Доказательство. Лемма следует из равенств

$$\begin{aligned} \rho_{\rightarrow, 2}(x, y) &= \rho_{\rightarrow, 3}(x, x, y), \\ \rho_{\rightarrow, n+1}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) &= \exists y \rho_{\rightarrow, n}(x_1, \dots, x_{n-1}, y) \wedge \rho_{\rightarrow, 3}(y, x_n, x_{n+1}). \end{aligned}$$

Лемма 6. Справедливо равенство

$$\text{Inv}(\{0, 1, x \vee y\}) = [\{\rho_{\rightarrow, 3}\}].$$

Доказательство. Вложение $[\{\rho_{\rightarrow, 3}\}] \subseteq \text{Inv}(\{0, 1, x \vee y\})$ следует из того факта, что $\rho_{\rightarrow, 3} \in \text{Inv}(\{0, 1, x \vee y\})$. Докажем обратное вложение. Покажем, что для любого предиката $\rho \in \text{Inv}(\{0, 1, x \vee y\})$ выполняется включение $\rho \in [\{\rho_{\rightarrow, 3}\}]$. Предположим, что это неверно. Рассмотрим предикаты минимальной арности, для которых это неверно. Среди всех таких предикатов рассмотрим предикат ρ , истинный на наибольшем количестве наборов.

Пусть ρ — несущественный предикат. Тогда по лемме 2 найдутся существенные предикаты $\rho_1, \dots, \rho_l \in [\{\rho\}]$ арности меньшей, чем арность ρ , такие, что $\rho \in [\{\rho_1, \dots, \rho_l\}]$. По предположению, $\rho_1, \dots, \rho_l \in [\{\rho_{\rightarrow, 3}\}]$. Значит, $\rho \in [\{\rho_{\rightarrow, 3}\}]$. Получено противоречие.

Пусть ρ — существенный предикат, $(a_1, \dots, a_n)$ — существенный набор для ρ . Пусть в этом наборе более одной единицы. Для определенности будем полагать, что $a_1 = a_2 = 1$. Так как $\rho \in \text{Inv}(\{x \vee y\})$,

$$\rho(\bar{a}_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = \rho(a_1, \bar{a}_2, a_3, \dots, a_n) = 1,$$

получаем, что

$$\rho(\bar{a}_1 \vee a_1, a_2 \vee \bar{a}_2, a_3 \vee a_3, \dots, a_n \vee a_n) = \rho(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = 1.$$

Получено противоречие.

Пусть в наборе $(a_1, \dots, a_n)$ ровно одна единица. Для определенности будем полагать, что она стоит на последнем месте. Рассмотрим предикат

$$\rho'(x_1, \dots, x_n) = \rho(x_1, \dots, x_n) \vee (x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0 \wedge x_n = 1).$$

Так как $x \vee y$ сохраняет ρ , то на любом наборе, отличном от $(0, 0, \dots, 0, 1)$, в котором на последнем месте стоит единица, предикат ρ принимает значение один. Тогда можно убедиться, что $\rho' \in \text{Inv}(\{0, 1, x \vee y\})$, значит, по предположению, $\rho' \in [\{\rho_{\rightarrow, 3}\}]$. По лемме 5, $\rho_{\rightarrow, n} \in [\{\rho_{\rightarrow, 3}\}]$. При этом

$$\rho(x_1, \dots, x_n) = \rho'(x_1, \dots, x_n) \wedge \rho_{\rightarrow, n}(x_1, \dots, x_n).$$

Значит, $\rho \in [\{\rho_{\rightarrow, 3}\}]$. Получено противоречие.

Если в наборе $(a_1, \dots, a_n)$ только нули, то $\rho \notin \text{Inv}(0)$. Получено противоречие. Лемма доказана.

Лемма 7. Пусть ρ — существенный предикат, $\rho \in \text{Inv}(h_2)$, тогда арность ρ меньше либо равна двум.

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно и арность ρ больше двух. Пусть $(a_1, \dots, a_n)$ — существенный набор для ρ . Так как $\rho \in \text{Inv}(h_2)$ и

$$\rho(\bar{a}_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = \rho(a_1, \bar{a}_2, a_3, \dots, a_n) = \rho(a_1, a_2, \bar{a}_3, a_4, \dots, a_n) = 1,$$

получаем

$$h_2 \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & \bar{a}_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 & \bar{a}_3 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_n & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \in \rho.$$

Получено противоречие. Лемма доказана.

Лемма 8. Пусть ρ — существенный предикат, $\rho \in \text{Inv}(x + y + z)$, тогда $\rho \in R_L$.

Доказательство. Пусть $\rho(d_1, d_2, \dots, d_n) = 1$, покажем, что для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i < j$, справедливо равенство

$$\rho(d_1, \dots, d_{i-1}, \bar{d}_i, d_{i+1}, \dots, d_{j-1}, \bar{d}_j, d_{j+1}, \dots, d_n) = 1.$$

Для наглядности будем полагать, что $i = 1$, $j = 2$. Так как $\rho \in \text{Inv}(x + y + z)$, $\rho(\bar{a}_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = \rho(a_1, \bar{a}_2, a_3, \dots, a_n) = 1$, видим, что

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \bar{a}_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \\ d_3 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix} \in \rho.$$

Пусть $(a_1, \dots, a_n)$ — существенный набор для ρ , $a_1 + a_2 + \dots + a_n + 1 = c$. Из доказанного выше свойства легко видеть, что ρ задается соотношением

$$\rho(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 \iff (x_1 + x_2 + \dots + x_n = c).$$

Лемма 9. Пусть $\rho \in R_L$, арность ρ больше двух, тогда $\rho_{+,4} \in [\{\rho\}]$.

Доказательство. Легко убедиться, что

$$\rho_{+,4}(y_1, y_2, y_3, y_4) = \exists x_3 \dots \exists x_n \rho(y_1, y_2, x_3, \dots, x_n) \wedge \rho(y_3, y_4, x_3, \dots, x_n).$$

Лемма 10. Пусть $\rho \in R_L \cap R_2^n$, где $n \geq 3$, тогда найдется предикат $\rho' \in R_L \cap R_2^{n-2}$, такой, что

$$[\{\rho', \rho_{+,4}\}] = [\{\rho\}].$$

Доказательство. Пусть $\rho'(x_1, \dots, x_{n-2}) = \exists x_{n-1} \rho(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1})$, тогда легко убедиться, что

$$\rho(x_1, \dots, x_n) = \exists y \rho'(x_1, \dots, x_{n-3}, y) \wedge \rho_{+,4}(y, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n).$$

Учитывая лемму 9, получаем, что $[\{\rho', \rho_{+,4}\}] = [\{\rho\}]$.

Следующая лемма легко выводится из предыдущих двух лемм.

Лемма 11. Пусть $\rho \in R_L$, арность ρ больше двух. Тогда найдется $S \subseteq \{(0), (1), \rho_{\neq}, \rho_{+,4}\}$, такое, что $\rho_{+,4} \in S$ и $[\{\rho\}] = [S]$.

4. Построение решетки

Воспользуемся обозначениями из [2]. Определим замкнутые классы двузначной логики

$$C_1 = P_2, \quad C_2 = \text{Pol}(\{(1)\}), \quad C_3 = \text{Pol}(\{(0)\}), \quad C_4 = \text{Pol}(\{(0), (1)\}).$$

Положим

$$\begin{aligned} W_C &= \{C_1, C_2, C_3, C_4\}, \\ A_1 &= \text{Pol}(\rho_{\leq}), & A_2 &= \text{Pol}(\{\rho_{\leq}, (1)\}), & A_3 &= \text{Pol}(\{\rho_{\leq}, (0)\}), \\ A_4 &= \text{Pol}(\{\rho_{\leq}, (0), (1)\}); \\ W_M &= \{A_1, A_2, A_3, A_4\}, \\ L_1 &= \text{Pol}(\{\rho_{+,4}\}), & L_2 &= \text{Pol}(\{\rho_{+,4}, (1)\}), & L_3 &= \text{Pol}(\{\rho_{+,4}, (0)\}), \\ L_4 &= \text{Pol}(\{\rho_{+,4}, (0), (1)\}), & L_5 &= \text{Pol}(\{\rho_{+,4}, \rho_{\neq}\}); \\ W_L &= \{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5\}, \\ D_1 &= \text{Pol}(\{\rho_{\neq}, (1)\}), & D_2 &= \text{Pol}(\{\rho_{\neq}, \rho_{\leq}\}), & D_3 &= \text{Pol}(\{\rho_{\neq}\}). \end{aligned}$$

Положим $W_D = \{D_1, D_2, D_3\}$. Пусть $\mu \geq 2$, тогда положим

$$\begin{aligned} F_1^\mu &= \text{Pol}(\{\rho_{\vee, n}, (0)\}), & F_2^\mu &= \text{Pol}(\{\rho_{\vee, n}, \rho_{\leq}, (0)\}), & F_3^\mu &= \text{Pol}(\{\rho_{\vee, n}, \rho_{\leq}\}), \\ F_4^\mu &= \text{Pol}(\{\rho_{\vee, n}\}), & F_5^\mu &= (F_1^\mu)^*, & F_6^\mu &= (F_2^\mu)^*, \\ F_7^\mu &= (F_3^\mu)^*, & F_8^\mu &= (F_4^\mu)^*. \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned}
 F_1^\infty &= \text{Pol} \left(\{(0)\} \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} \{\rho_{\vee, n}\} \right), & F_2^\infty &= \text{Pol} \left(\{\rho_{\leq}, (0)\} \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} \{\rho_{\vee, n}\} \right), \\
 F_3^\infty &= \text{Pol} \left(\{\rho_{\leq}\} \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} \{\rho_{\vee, n}\} \right), & F_4^\infty &= \text{Pol} \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} \{\rho_{\vee, n}\} \right), \\
 F_5^\infty &= (F_1^\infty)^*, & F_6^\infty &= (F_2^\infty)^*, & F_7^\infty &= (F_3^\infty)^*, & F_8^\infty &= (F_4^\infty)^*, \\
 W_F &= \{F_1^\infty, F_2^\infty, F_3^\infty, F_4^\infty\} \cup \bigcup_{\mu=2}^{\mu} \{F_1^\mu, F_2^\mu, F_3^\mu, F_4^\mu\}, \\
 W_{F^*} &= \{F_5^\infty, F_6^\infty, F_7^\infty, F_8^\infty\} \cup \bigcup_{\mu=2}^{\mu} \{F_5^\mu, F_6^\mu, F_7^\mu, F_8^\mu\}, \\
 S_1 &= \text{Pol}(\{\rho_{\rightarrow, 3}, (0), (1)\}), & S_3 &= \text{Pol}(\{\rho_{\rightarrow, 3}, (1)\}), \\
 S_5 &= \text{Pol}(\{\rho_{\rightarrow, 3}, (0)\}), & S_6 &= \text{Pol}(\rho_{\rightarrow, 3}).
 \end{aligned}$$

Положим, далее,

$$\begin{aligned}
 W_S &= \{S_1, S_3, S_5, S_6\}, \\
 P_1 &= (S_1)^*, & P_3 &= (S_3)^*, & P_5 &= (S_5)^*, & P_6 &= (S_6)^*; \\
 W_P &= \{P_1, P_3, P_5, P_6\}, \\
 O_1 &= [\{x\}], & O_4 &= [\{\bar{x}\}], & O_5 &= [\{x, 1\}], & O_6 &= [\{x, 0\}], \\
 O_8 &= [\{x, 0, 1\}], & O_9 &= [\{x, \bar{x}, 0, 1\}], \\
 W_O &= \{O_1, O_4, O_5, O_6, O_8, O_9\}; \\
 W &= W_O \cup W_S \cup W_P \cup W_F \cup W_{F^*} \cup W_L \cup W_D \cup W_M \cup W_C.
 \end{aligned}$$

Лемма 12. Пусть ρ — существенный предикат, $x \vee y$ сохраняет ρ , тогда либо $[\{\rho\}] = [\{\rho_{\rightarrow, 3}\}]$, либо $\rho \in \{(0), (1), \rho_{\leq}^2, \rho_{\leq}, \rho_{\vee, 2}, \rho_{\vee, 3}, \rho_{\vee, 4}, \dots\}$.

Доказательство. Если арность ρ меньше трех, то лемма устанавливается непосредственной проверкой. Пусть $n \geq 3$, $(a_1, \dots, a_n)$ — существенный набор для ρ . Пусть в этом наборе более одной единицы. Для определенности будем полагать, что $a_1 = a_2 = 1$. Так как

$$\rho \in \text{Inv}(x \vee y), \rho(\bar{a}_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = \rho(a_1, \bar{a}_2, a_3, \dots, a_n) = 1,$$

мы видим, что

$$\rho(\bar{a}_1 \vee a_1, a_2 \vee \bar{a}_2, a_3 \vee a_3, \dots, a_n \vee a_n) = \rho(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = 1.$$

Получено противоречие.

Пусть в наборе $(a_1, \dots, a_n)$ ровно одна единица. Для определенности будем полагать, что она стоит на последнем месте. Так как $x \vee y$ сохраняет ρ , то на любом наборе, отличном от $(0, 0, \dots, 0, 1)$, в котором на последнем месте стоит единица, предикат ρ принимает значение один. Если $\rho(1, 1, \dots, 1, 0, 0) = 0$, то $\rho_{\leq}(x, y) = \rho(x, x, \dots, x, y, y)$. Если $\rho(0, 1, \dots, 1, 0) = 0$, то $\rho_{\leq}(x, y) = \rho(y, x, x, \dots, x, y)$. Если $\rho(1, 1, \dots, 1, 0, 0) = \rho(0, 1, \dots, 1, 0) = 1$, то $\rho(1, 1, \dots, 1, 0) = 1$, так как $x \vee y$ сохраняет ρ . Тогда $\rho_{\leq}(x, y) = \rho(y, y, \dots, y, y, x)$. Значит, $\rho_{\leq} \in [\{\rho\}]$. Можно убедиться, что

$$\rho_{\rightarrow, 3}(x, y, z) = \exists t \rho(x, x, \dots, x, y, t) \wedge \rho_{\leq}(z, t).$$

Тогда из леммы 6 следует, что

$$[\{\rho\}] = [\{\rho_{\rightarrow,3}\}] = \text{Inv}(\{0, 1, x \vee y\}).$$

Если в наборе $(a_1, \dots, a_n)$ только нули, тогда, учитывая, что $x \vee y$ сохраняет ρ , получаем, что $\rho = \rho_{\vee,n}$. Лемма доказана.

Лемма 13. Для любого $n \geq 2$ справедливы включения $(1) \in [\{\rho_{\vee,n}\}]$, $\rho_{\vee,n} \in [\{\rho_{\vee,n+1}\}]$, $\rho_{\vee,n} \in [\{\rho_{\rightarrow,3}, (1)\}]$.

Доказательство. Первая и вторая части леммы следуют из соотношений

$$\begin{aligned} (x = 1) &\iff \rho_{\vee,n}(x, x, \dots, x) = 1, \\ \rho_{\vee,n}(x_1, \dots, x_n) &= \rho_{\vee,n+1}(x_1, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Третья часть леммы следует из леммы 5 и равенства

$$\rho_{\vee,n}(x_1, \dots, x_n) = \exists z (z = 1) \wedge \rho_{\rightarrow,n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, z).$$

Лемма 14. Пусть $M = [M] \subseteq P_2$, $x \vee y \in M$, тогда $M \in W_S \cup W_F \cup W_M \cup W_C$.

Доказательство. Пусть $S = \text{Inv}(M)$. Как было сказано выше, произвольный замкнутый класс предикатов однозначно описывается множеством существенных предикатов, содержащихся в нем. Пусть

$$S_0 = \{(0), (1), \rho_{\leq}, \rho_{\rightarrow,3}, \rho_{\vee,2}, \rho_{\vee,3}, \dots\}.$$

Используя лемму 12, заключаем, что

$$[S \cap S_0] = S, \quad M = \text{Pol}(S_0).$$

Пусть $\rho_{\rightarrow,3} \in S$ и $(1) \in S$. Из лемм 5, 13 следует, что $\rho_{\leq}, \rho_{\vee,n} \in S$ для любого $n \geq 2$. Тогда возможны следующие случаи:

$$\begin{aligned} S \cap S_0 &= \{\rho_{\rightarrow,3}, (1), \rho_{\leq}\} \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} \{\rho_{\vee,n}\}, & M &= S_3, \\ S \cap S_0 &= \{\rho_{\rightarrow,3}, (0), (1), \rho_{\leq}\} \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} \{\rho_{\vee,n}\}, & M &= S_1. \end{aligned}$$

Пусть $\rho_{\rightarrow,3} \in S$ и $(1) \notin S$. По лемме 13, $\rho_{\vee,n} \notin S$ для любого $n \geq 2$. Тогда возможны следующие случаи:

$$\begin{aligned} S \cap S_0 &= \{\rho_{\rightarrow,3}, \rho_{\leq}\}, & M &= S_6, \\ S \cap S_0 &= \{\rho_{\rightarrow,3}, \rho_{\leq}, (0)\}, & M &= S_5. \end{aligned}$$

Пусть $\rho_{\rightarrow,3} \notin S$, и пусть μ — наибольшее n , такое, что $\rho_{\vee,n} \in S$. Если $\rho_{\vee,n} \in S$ для любого $n \geq 2$, то положим $\mu = \infty$. Тогда возможны следующие случаи:

$$S \cap S_0 = \{(1)\} \cup \bigcup_{n=2}^{\mu} \{\rho_{\vee,n}\}, \quad M = F_2^{\mu},$$

$$\begin{aligned}
S \cap S_0 &= \{(1), \rho_{\leq}\} \cup \bigcup_{n=2}^{\mu} \{\rho_{\vee, n}\}, & M &= F_3^{\mu}, \\
S \cap S_0 &= \{(0), (1)\} \cup \bigcup_{n=2}^{\mu} \{\rho_{\vee, n}\}, & M &= F_1^{\mu}, \\
S \cap S_0 &= \{(0), (1), \rho_{\leq}\} \cup \bigcup_{n=2}^{\mu} \{\rho_{\vee, n}\}, & M &= F_4^{\mu}.
\end{aligned}$$

Пусть $\rho_{\vee, n} \notin S$ для любого $n \geq 2$, тогда возможны следующие случаи:

$$\begin{aligned}
S \cap S_0 &= \emptyset, & M &= C_1, \\
S \cap S_0 &= \{(0)\}, & M &= C_3, \\
S \cap S_0 &= \{(1)\}, & M &= C_2, \\
S \cap S_0 &= \{(0), (1)\}, & M &= C_4, \\
S \cap S_0 &= \{\rho_{\leq}\}, & M &= A_1, \\
S \cap S_0 &= \{\rho_{\leq}, (0)\}, & M &= A_3, \\
S \cap S_0 &= \{\rho_{\leq}, (1)\}, & M &= A_2, \\
S \cap S_0 &= \{\rho_{\leq}, (0), (1)\}, & M &= A_4.
\end{aligned}$$

Доказательство завершено.

Лемма 15. Замкнутые классы в $W_S \cup W_F \cup W_M \cup W_C$ попарно различны.

Доказательство. Легко убедиться, что $x \vee y\bar{z}$ сохраняет предикат $\rho_{\vee, n}$ для любого $n \geq 2$, сохраняет предикаты (0) , (1) , но не сохраняет $\rho_{\leq}$; h_{μ} сохраняет предикат $\rho_{\vee, \mu}$, но не сохраняет $h_{\mu+1}$; функция 0 сохраняет предикат (0) , но не сохраняет (1) ; функция 1 сохраняет предикат (1) , но не сохраняет (0) .

Для каждого замкнутого класса $M \in W_S \cup W_F \cup W_M \cup W_C$ рассмотрим множество $M \cap \left(\{0, 1, x \vee y\bar{z}\} \cup \bigcup_{\mu=2}^{\infty} \{h_{\mu}\} \right)$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что все полученные множества попарно различны. Лемма доказана.

Лемма 16. Пусть $\rho \in \{\rho_{\leq}, \rho_{\vee, 2}, \rho_{\wedge, 2}\}$, тогда

$$\{(0), (1), \rho_{\leq}, \rho_{\vee, 2}, \rho_{\wedge, 2}\} \subseteq [\{\rho, \rho_{\neq}\}].$$

Доказательство. Лемма следует из равенств

$$\begin{aligned}
\rho_{\leq}(x, y) &= \exists z \rho_{\vee, 2}(z, y) \wedge \rho_{\neq}(x, z), \\
\rho_{\vee, 2}(x, y) &= \exists z \rho_{\leq}(z, x) \wedge \rho_{\neq}(y, z), \\
\rho_{\wedge, 2}(x, y) &= \exists z \rho_{\leq}(x, z) \wedge \rho_{\neq}(y, z), \\
\rho_{\leq}(x, y) &= \exists z \rho_{\wedge, 2}(x, z) \wedge \rho_{\neq}(y, z), \\
\rho_{\vee, 2}(x, x) &= 1 \iff (x = 1), \\
\rho_{\wedge, 2}(x, x) &= 1 \iff (x = 0).
\end{aligned}$$

Лемма 17. Справедливы включения $(0) \in [\{\rho_{\neq}, (1)\}]$, $(1) \in [\{\rho_{\neq}, (0)\}]$.

Доказательство. Лемма следует из соотношений

$$\begin{aligned}(x = 0) &\iff \exists y \rho_{\neq}(x, y) \wedge (y = 1), \\(x = 1) &\iff \exists y \rho_{\neq}(x, y) \wedge (y = 0).\end{aligned}$$

Лемма 18. Пусть $M = [M] \subseteq P_2$, $h_2 \in M$, $x \vee y \notin M$, $x \wedge y \notin M$, тогда $M \in W_D$.

Доказательство. Пусть

$$S = \text{Inv}(M) \cap \tilde{R}_2.$$

Из леммы 7 следует, что $S \subseteq \{(0), (1), \rho_{\leq}, \rho_{=}^2, \rho_{\neq}, \rho_{\vee, 2}, \rho_{\wedge, 2}\}$. Так как $x \vee y \notin M$, $x \wedge y \notin M$, мы видим, что либо $\rho_{\neq} \in S$, либо $\rho_{\vee, 2}, \rho_{\wedge, 2} \in S$. Во втором случае воспользуемся равенством

$$\rho_{\neq}(x, y) = \rho_{\vee, 2}(x, y) \wedge \rho_{\wedge, 2}(x, y).$$

Значит, $\rho_{\neq} \in S$. Из лемм 16, 17 следует, что возможны следующие случаи:

$$\begin{aligned}S &= \{(0), (1), \rho_{\leq}, \rho_{=}^2, \rho_{\neq}, \rho_{\vee, 2}, \rho_{\wedge, 2}\}, & M &= D_2, \\S &= \{\rho_{=}^2, \rho_{\neq}\}, & M &= D_3, \\S &= \{(0), (1), \rho_{=}^2, \rho_{\neq}\}, & M &= D_1.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 19. Замкнутые классы из W_D попарно различны.

Доказательство. Достаточно проверить, что множества $D_i \cap \{\bar{x}, xy \vee x\bar{z} \vee y\bar{z}\}$ попарно различны для $i \in \{1, 2, 3\}$.

Лемма 20. Пусть $M = [M] \subseteq P_2$, $x + y + z \in M$, $h_2 \notin M$, тогда $M \in W_L$.

Доказательство. Пусть

$$S_0 = \{\rho_{+, 4}, \rho_{\neq}, (0), (1)\}, \quad S = \text{Inv}(M).$$

Так как h_2 сохраняет все предикаты арности два и $h_2 \notin M$, то S содержит существенный предикат арности больше двух. Из лемм 8 и 11 следует, что

$$S = [S \cap S_0].$$

Из леммы 17, а также соотношения

$$\rho_{\neq}(x, y) = \exists z_1 \exists z_2 \rho_{+, 4}(x, y, z_1, z_2) \wedge (z_1 = 0) \wedge (z_2 = 1),$$

следует, что возможны следующие случаи:

$$\begin{aligned}S \cap S_0 &= \{\rho_{+, 4}, (0), (1), \rho_{\neq}\}, & M &= L_4, \\S \cap S_0 &= \{\rho_{+, 4}, \rho_{\neq}\}, & M &= L_5, \\S \cap S_0 &= \{\rho_{+, 4}, (1)\}, & M &= L_2, \\S \cap S_0 &= \{\rho_{+, 4}, (0)\}, & M &= L_3, \\S \cap S_0 &= \{\rho_{+, 4}\}, & M &= L_1.\end{aligned}$$

Рис. 1. Структура замкнутых классов

Лемма 21. Классы L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 попарно различны.

Доказательство. Достаточно проверить, что множества $L_i \cap \{0, 1, \bar{x}\}$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, попарно различны.

Теорема 2. W содержит все клоны, содержащиеся в P_2 , причем клоны в W попарно различны.

Доказательство. Пусть M — произвольный клон из P_2 . Если M не содержит функций, существенно зависящих от двух и более переменных, то перебором легко получаем, что $M \in W_0$. Пусть M содержит функцию, существенно зависящую от двух или более переменных, тогда M содержит какой-то существенно-минимальный клон. Из леммы 4 следует, что M содержит одну из функций $x \vee y$, $x \wedge y$, $x + y + z$, h_2 . Учитывая двойственность, из лемм 7, 18, 20 получаем, что $M \in W$. Из лемм 15, 19, 21 получаем, что клоны из W попарно различны. При построении клонов мы в явном виде описывали множество всех существенных предикатов, которые сохраняются функциями из соответствующего клона. Поэтому для построения решетки по вложению достаточно проверить на вложимость соответствующие множества существенных предикатов. Таким образом, мы получим решетку, изображенную на рис. 1.

Список литературы

1. Post E., Determination of all closed systems of truth tables. *Bull. Amer. Math. Soc.* (1920) **26**, 437.
2. Post E., *Two-valued iterative systems of mathematical logic*. Princeton Univ. Press, Princeton, 1941.
3. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б., *Функции алгебры логики и классы Поста*. Наука, Москва, 1966.
4. Угольников А. Б., О замкнутых классах Поста. *Известия высших учебных заведений. Математика* (1988), № 7 (314) 79–88.
5. Бондарчук В. Г., Калужнин Л. А., Котов В. Н., Ромов Б. А., Теория Галуа для алгебр Поста I–II. *Кибернетика* (1969), № 3; 5; 1–10; 1–9.

Статья поступила 28.01.2011.