Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. И. Ивченко, М. В. Соболева, Некоторые неравновероятные модели случайных подстановок, *Дискрет. матем.*, 2011, том 23, выпуск 3, 23–31

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1150>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 14:17:43

Некоторые неравновероятные модели случайных подстановок

© 2011 г. Г. И. Ивченко, М. В. Соболева

Рассматривается двухпараметрическая модель случайных n -подстановок, обобщающая классическую модель A -подстановок, для которой изучается совместное распределение числа A -циклов и $\bar{A}$ -циклов при различных конкретизациях подмножества $A \subset X_n = \{1, 2, \dots, n\}$

1. Введение

В [1, 2] была введена общая параметрическая модель случайных подстановок, согласно которой произвольная подстановка s из симметрической группы S_n подстановок n -й степени наблюдается с вероятностью, пропорциональной $\prod_i \theta_i^{c_i}$, где c_i — число циклов длины i подстановки s , $i = 1, 2, \dots, n$, $\sum_i i c_i = n$ и $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, θ — параметр меры $\mathbf{P}_\theta$:

$$\mathbf{P}_\theta(s) = I\left(\sum_{i=1}^n i c_i = n\right) \frac{1}{H_n(\theta)} \prod_{i=1}^n \theta_i^{c_i}. \quad (1)$$

Здесь $I(\cdot)$ — индикатор и $H_n(\theta)$ — необходимый нормирующий множитель, имеющий вид

$$H_n(\theta) = n! [z^n] \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{z^i \theta_i}{i} \right\}, \quad (2)$$

здесь и далее $[z^n] f(z) = \text{coef}_{z^n} f(z)$ — коэффициент при z^n в $f(z)$.

Пусть $\bar{c}(n) = (c_1, \dots, c_n)$ есть цикловая структура случайной подстановки в модели (1) и

$$F_{n,\theta}(t) = \mathbf{E}_\theta \prod_{i=1}^n t_i^{c_i}$$

— ее производящая функция. Тогда [1, 2]

$$F_{n,\theta}(t) = \frac{H_n(t \times \theta)}{H_n(\theta)}, \quad (3)$$

где $t = (t_1, \dots, t_n)$ и $t \times \theta = (t_1 \theta_1, \dots, t_n \theta_n)$.

Как отмечается в [2], соотношение (3) может быть основой для изучения различных структурных свойств подстановок в рамках общей модели (1). В [2] также приводится ряд

конкретных примеров применения такого общего подхода к изучению случайных подстановок, но при этом отмечается, что более детальное исследование случайных подстановок в общей модели (1) ждет своего решения.

В свете изложенного в [2], представляется естественным для продвижения в этой тематике рассмотреть различные конкретизации общей модели P_θ (скажем, ограничившись лишь двухпараметрическими моделями) и при этом акцентировать внимание на изучении лишь важнейших структурных характеристик подстановки (типа общего числа циклов конкретного типа). Такой характер и имеет настоящая работа. Мы рассматриваем некоторые естественные двухпараметрические модели, обобщающие классические (то есть равновероятные) модели A -подстановок, и в рамках этих моделей изучаем совместное распределение чисел A -циклов и $\bar{A}$ -циклов случайной подстановки при различных конкретизациях множества $A \subseteq X_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

2. Постановка задачи и предварительные соотношения

Рассматривается множество $S_n = \{s\}$ подстановок степени n (n -подстановок), то есть множество из $n!$ взаимно однозначных отображений множества $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ в себя. Каждая подстановка, как известно, может быть разложена в произведение независимых циклов. Говорят, что n -подстановка s принадлежит цикловому классу $\{1^{c_1}, 2^{c_2}, \dots, n^{c_n}\}$, если она имеет c_i циклов длины i , $i = 1, 2, \dots, n$. Набор $\tilde{c}(n) = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ называется цикловой структурой подстановки s (ясно, что всегда $\sum_{i=1}^n i c_i = n$).

Пусть A есть заданное подмножество множества X_n и $\bar{A} = X_n \setminus A$. Циклы подстановки s , длины которых являются элементами подмножества A (соответственно, подмножества $\bar{A}$) будем называть A -циклами (соответственно, $\bar{A}$ -циклами). Обозначим $c_A(n)$ ($c_{\bar{A}}(n)$) общее число A -циклов ($\bar{A}$ -циклов) подстановки s :

$$c_A(n) = \sum_{i \in A} c_i, \quad c_{\bar{A}}(n) = \sum_{i \in \bar{A}} c_i, \quad (4)$$

и введем на множестве S_n вероятностную меру, приписывающую каждой подстановке $s \in S_n$ вес, пропорциональный $\theta_1^{c_A(n)} \theta_2^{c_{\bar{A}}(n)}$, где $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, $\theta_1, \theta_2 \geq 0$, — параметры меры. Эта мера представляет собой специальный случай общей меры (1) и имеет вид

$$\mathbf{P}_\theta(s) = I \left(\sum_{i=1}^n i c_i = n \right) \frac{\theta_1^{c_A(n)} \theta_2^{c_{\bar{A}}(n)}}{H_{nA}(\theta)}, \quad (5)$$

где

$$H_{nA}(\theta) = n! [z^n] \exp \left\{ \theta_1 \sum_{i \in A} \frac{z^i}{i} + \theta_2 \sum_{i \in \bar{A}} \frac{z^i}{i} \right\}.$$

Здесь выражение в показателе экспоненты может быть заменено на

$$(\theta_1 - \theta_2) \sum_{i \in A} \frac{z^i}{i} + \theta_2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{i} = -\theta_2 \ln(1 - z) + (\theta_1 - \theta_2) \sum_{i \in A} \frac{z^i}{i},$$

либо на

$$\theta_1 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{i} (\theta_2 - \theta_1) \sum_{i \in \bar{A}} \frac{z^i}{i} = -\theta_1 \ln(1 - z) + (\theta_2 - \theta_1) \sum_{i \in \bar{A}} \frac{z^i}{i},$$

следовательно,

$$\begin{aligned} H_{nA}(\theta) &= n! [z^n] (1-z)^{-\theta_2} \exp \left\{ (\theta_1 - \theta_2) \sum_{i \in A} \frac{z^i}{i} \right\} \\ &= n! [z^n] (1-z)^{-\theta_1} \exp \left\{ (\theta_2 - \theta_1) \sum_{i \in \bar{A}} \frac{z^i}{i} \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Далее, для производящей функции пары $(c_A(n), c_{\bar{A}}(n))$ из представления (3) следует равенство

$$\Phi_{n\theta}(t_1, t_2; A) = \mathbf{E}_{\theta} t_1^{c_A(n)} t_2^{c_{\bar{A}}(n)} = \frac{H_{nA}(t_1 \theta_1, t_2 \theta_2)}{H_{nA}(\theta)}. \quad (7)$$

Нашей задачей является исследование распределения двумерной характеристики $(c_A(n), c_{\bar{A}}(n))$ случайной подстановки в рассматриваемой (двухпараметрической) модели для различных вариантов заданий подмножества $A \subseteq X_n$.

Но прежде мы выделим некоторые, представляющее и самостоятельный интерес, следствия соотношений (6) и (7).

1. Положив $t_1 = t_2 = t$ в (7), получаем производящую функцию важнейшей характеристики случайной подстановки — общего числа ее циклов

$$c(n) = c_A(n) + c_{\bar{A}}(n) = \sum_{i=1}^n c_i,$$

именно,

$$\mathbf{E}_{\theta} t^{c(n)} = \frac{H_{nA}(t\theta_1, t\theta_2)}{H_{nA}(\theta)}.$$

Если, кроме того, $\theta_1 = \theta_2 = \theta > 0$, то мы приходим к известной однопараметрической модели Эвенса [4], когда каждая подстановка $s \in S_n$ наблюдается с вероятностью, пропорциональной $\theta^{c(n)}$. Для этого случая представление (6) принимает вид

$$\begin{aligned} H_{nA}(\theta) &= n! [z^n] (1-z)^{-\theta} = (-1)^n n! \binom{-\theta}{n} \\ &= \theta(\theta+1) \cdots (\theta+n-1) = [\theta]_n \end{aligned}$$

(эту комбинаторную формулу в дальнейшем мы будем неоднократно использовать), и мы приходим к известному результату [3]:

$$\mathbf{E}_{\theta} t^{c(n)} = \frac{[t\theta]_n}{[\theta]_n}.$$

Этот случай (распределение числа циклов $c(n)$ в модели Эвенса) детально исследован в литературе (см. [3]), в то же время представление (7) для двумерной случайной величины $(c_A(n), c_{\bar{A}}(n))$, принимающее в данном случае вид

$$\Phi_{n,\theta}(t_1, t_2; A) = \frac{1}{[\theta]_n} n! [z^n] (1-z)^{-\theta t_2} \exp \left\{ \theta(t_1 - t_2) \sum_{i \in A} \frac{z^i}{i} \right\}, \quad (8)$$

является новым результатом и для модели Эвенса.

2. Если в модели (5) положить $\theta_2 = 0$, $\theta_1 = \theta > 0$, то получим меру, сосредоточенную на подмножестве подстановок, имеющих лишь A -циклы, такие подстановки называются A -подстановками [5] и их изучению в рамках классической (равновероятной) модели посвящена обширная литература (см. [6, 7] и библиографию в них). Предложенная здесь модель позволяет, таким образом, изучать и неравновероятные A -подстановки.

Пусть $S_n(A)$ обозначает подмножество A -подстановок в S_n . Если на этом подмножестве задана параметрическая мера

$$\mathbf{P}_\theta(s) = \frac{1}{H_{nA}(\theta)} I\left(\sum_{i \in A} i a_i = n\right) \theta^{c_A(n)}, \quad s \in S_n(A), \quad (9)$$

где теперь

$$H_{nA}(\theta) = n! [z^n] \exp \left\{ \theta \sum_{i \in A} \frac{z^i}{i} \right\}, \quad (10)$$

то производящая функция общего числа циклов $c_A(n)$ такой случайной A -подстановки имеет вид

$$\Phi_{n\theta}(t; A) = \mathbf{E}_\theta t^{c_A(n)} = \frac{H_{nA}(t\theta)}{H_{nA}(\theta)}, \quad (11)$$

где $H_{nA}(\theta)$ дано в (10).

Если здесь положить $\theta = 1$, то мы получаем равновероятную на $S_n(A)$ модель: каждая подстановка $s \in S_n(A)$ наблюдается с вероятностью $H_{nA}^{-1}(1)$.

Замечание 1. Случай $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \theta > 0$ соответствует симметричному варианту — $\bar{A}$ -подстановкам.

Далее мы разберем ряд наиболее популярных в литературе классов A -подстановок в контексте изложенного подхода.

3. Отметим, что из представления (7) следует общая формула для смешанных факториальных моментов случайных величин $c_A(n)$ и $c_{\bar{A}}(n)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\theta (c_A(n))_{r_1} (c_{\bar{A}}(n))_{r_2} &= \frac{\partial^{r_1+r_2}}{\partial t_1^{r_1} \partial t_2^{r_2}} \Phi_{n,\theta}(t_1, t_2; A) |_{t_1=t_2=1} \\ &= \theta_1^{r_1} \theta_2^{r_2} \frac{\partial^{r_1+r_2}}{\partial \theta_1^{r_1} \partial \theta_2^{r_2}} H_{nA}(\theta_1 \theta_2) / H_{nA}(\theta), \end{aligned}$$

здесь и далее

$$(a)_r = a(a-1) \cdots (a-r+1), \quad r \geq 1, \quad (a)_0 = 1.$$

Введя для краткости обозначение

$$f_\theta(z) = \exp \left\{ \theta_1 \sum_{i \in A} \frac{z^i}{i} + \theta_2 \sum_{i \in \bar{A}} \frac{z^i}{i} \right\},$$

отсюда, в частности, получаем следующие представления для первых двух моментов:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_{\theta} c_A(n) &= \theta_1 [z^n] \left(\sum_{i \in A} \frac{z^i}{i} \right) f_{\theta}(z) / [z^n] f_{\theta}(z), \\
 \mathbf{E}_{\theta} c_{\bar{A}}(n) &= \theta_2 [z^n] \left(\sum_{i \in \bar{A}} \frac{z^i}{i} \right) f_{\theta}(z) / [z^n] f_{\theta}(z), \\
 \mathbf{E}_{\theta} c_A^2(n) &= \theta_1^2 [z^n] \left(\sum_{i \in A} \frac{z^i}{i} \right)^2 f_{\theta}(z) / [z^n] f_{\theta}(z) + \mathbf{E}_{\theta} c_A(n), \\
 \mathbf{E}_{\theta} c_{\bar{A}}^2(n) &= \theta_2^2 [z^n] \left(\sum_{i \in \bar{A}} \frac{z^i}{i} \right)^2 f_{\theta}(z) / [z^n] f_{\theta}(z) + \mathbf{E}_{\theta} c_{\bar{A}}(n), \\
 \mathbf{E}_{\theta} c_A(n) c_{\bar{A}}(n) &= \theta_1 \theta_2 [z^n] \left(\sum_{i \in A} \frac{z^i}{i} \right) \left(\sum_{i \in \bar{A}} \frac{z^i}{i} \right) f_{\theta}(z) / [z^n] f_{\theta}(z),
 \end{aligned} \tag{12}$$

Эти общие представления могут быть основой для вычисления моментов рассматриваемых характеристик случайной подстановки при различных конкретизациях подмножества A .

3. d -инволюции

В теории подстановок важное значение имеют решения уравнения

$$s^d = e, \quad s \in S_n, \tag{13}$$

где d — натуральное число, а e — единичная подстановка, эти решения мы будем называть d -инволюциями. Известно, что такие подстановки состоят из циклов, длины которых являются делителями числа d . Таким образом, решения уравнения (13) образуют подмножество A -подстановок $S_n(A)$ при $A = \{i : i \mid d\}$, $d \geq 2$, $i \mid d$ означает, что i делит d .

Если $d = 2$, то решение уравнения (13) называется просто инволюцией. Инволюция содержит только циклы длин 1 и 2 и, следовательно, является A -подстановкой при $A = \{1, 2\}$.

Будем считать, что d — простое число, тогда функция $H_{nA}(\theta)$ (см. (6)) для этого случая имеет вид

$$H_{nA}(\theta) = n! [z^n] (1 - z)^{-\theta} \exp\{\theta_1 - \theta_2\} (z + z^d/d). \tag{14}$$

Разложим здесь экспоненту в ряд по степеням z и получим

$$\begin{aligned}
 \exp\{\theta_1 - \theta_2\} (z + z^d/d) &= \left(\sum_{r \geq 0} \frac{(\theta_1 - \theta_2)^r}{r!} z^r \right) \left(\sum_{j \geq 0} \frac{(\theta_1 - \theta_2)^j}{d^j j!} z^{dj} \right) \\
 &= \sum_{m \geq 0} a_{m,d} (\theta_1 - \theta_2) z^m,
 \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$a_{m,d}(u) = \sum_{j \leq m/d} \frac{u^{m-(d-1)j}}{d^j j! (m-dj)!},$$

и запишем явное представление для $H_{nA}(\theta)$ в виде комбинаторной суммы

$$H_{nA}(\theta) = n! \sum_{m=0}^n \frac{a_{m,d}(\theta_1 - \theta_2)}{(n-m)!} [\theta_2]_{n-m}. \quad (16)$$

Производящая функция (11) числа циклов в такой случайной A -подстановке имеет, следовательно, вид

$$\Phi_{n\theta}(t; A) = \frac{a_{n,d}(t\theta)}{a_{n,d}(\theta)} \frac{\sum_{j \leq n/d} \frac{(t\theta)^{n-(d-1)j}}{d^j j! (n-jd)!}}{\sum_{j \leq n/d} \frac{\theta^{n-(d-1)j}}{d^j j! (n-jd)!}}. \quad (17)$$

4. d -конгруэнтность

Будем говорить, что подстановка $s \in S_n$ обладает свойством d -конгруэнтности, если длины всех циклов кратны числу $d \geq 2$, то есть эта подстановка есть A -подстановка при $A = \{kd, k = 1, 2, \dots\}$.

При таком задании множества A формула (6) принимает вид

$$\begin{aligned} H_{nA}(\theta) &= n! [z^n] (1-z)^{-\theta_2} \exp \left\{ (\theta_1 - \theta_2) \frac{1}{d} \sum_{k \geq 1} \frac{z^{kd}}{k} \right\} \\ &= n! [z^n] (1-z)^{-\theta_2} \exp \left\{ -\frac{(\theta_1 - \theta_2)}{d} \ln(1-z^d) \right\} \\ &= n! [z^n] (1-z)^{-\theta_2} (1-z^d)^{-(\theta_1 - \theta_2)/d}, \end{aligned} \quad (18)$$

что можно записать в виде следующей комбинаторной суммы:

$$H_{nA}(\theta) = \sum_{k \leq n/d} \frac{[(\theta_1 - \theta_2)/d]_k [\theta_2]_{n-kd}}{k! (n-kd)!}. \quad (19)$$

Отсюда мы можем получить явные формулы как для совместной производящей функции (7) пары $(c_A(n), c_{\bar{A}}(n))$, где в данном случае $c_A(n)$ — число d -конгруэнтных циклов случайной подстановки, а $c_{\bar{A}}(n)$ — число остальных (не конгруэнтных) ее циклов, так и для производящей функции (12) числа циклов случайной A -подстановки. В последнем случае (при $\theta_2 = 0, \theta_1 = \theta > 0$) формула (19) принимает вид

$$H_{nA}(\theta) = \frac{n!}{(n/d)!} [\theta/d]_{n/d}, \quad (20)$$

если n кратно d , и $H_{nA}(\theta) = 0$ в противном случае.

Отметим важный частный случай $d = 2$. В этом случае $c_A(n)(c_{\bar{A}}(n))$ — число циклов четной (нечетной) длины в подстановке, и для подстановок четной степени, то есть при $n = 2n_0$, из (12) и (20) следует, что

$$\begin{aligned}\Phi_{2n_0\theta}(t; A) &= \mathbf{E}_{\theta} t^{c_A(n)} = [t\theta/2]_{n_0} / [\theta/2]_{n_0} \\ &= t \frac{(t\theta + 2)(t\theta + 4) \cdots (t\theta + 2(n_0 - 1))}{(\theta + 2)(\theta + 4) \cdots (\theta + 2(n_0 - 1))} \\ &= t \prod_{i=1}^{n_0-1} (q_{\theta i} + t p_{\theta i}),\end{aligned}\quad (21)$$

где

$$p_{\theta i} = 1 - q_{\theta i} = \frac{\theta}{\theta + 2i}.$$

Из представления (21) следует, что $\Phi_{2n_0, \theta}(t; A)$ есть производящая функция независимых бернуллиевских случайных величин, таким образом, в данном случае имеет место представление

$$c_A(n) = 1 + \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n_0-1}, \quad (22)$$

где слагаемые независимы и

$$\mathbf{P}(\xi_i = 1) = 1 - \mathbf{P}(\xi_i = 0) = p_{\theta i}, \quad i = 1, \dots, n_0 - 1.$$

Отметим, что аналогичное разложение на сумму независимых бернуллиевских слагаемых общего числа циклов случайной подстановки в модели Эвенса было получено в [3], поэтому результаты этой работы могут быть непосредственно переформулированы для рассматриваемого нами случая (это будет сделано позже).

Замечание 2. Для изучения числа $c_{\bar{A}}(n)$ циклов нечетной длины в (18) надо положить $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \theta > 0$ (напомним, что $d = 2$), что дает следующий результат:

$$H_{nA}(\theta) = n! [z^n] \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{\theta/2} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{\theta}{2} \right)_k \left[\frac{\theta}{2} \right]_{n-k}. \quad (23)$$

Отсюда видно, насколько сложнее задача изучения распределения числа циклов случайной $\bar{A}$ -подстановки (имеющей лишь циклы нечетной длины).

5. $A(r)$ -циклы

Пусть подмножество A имеет вид

$$A(r) = \{I : i \leq r\}, \quad r \geq 2$$

(длины циклов ограничены числом r). Для этого случая формула (6) принимает вид

$$\begin{aligned}H_{nA(r)}(\theta) &= n! [z^n] (1-z)^{-\theta_2} \exp \left\{ (\theta_1 - \theta_2) \sum_{i=1}^r \frac{z^i}{i} \right\} \\ &= n! [z^n] (1-z)^{-\theta_1} \exp \left\{ (\theta_2 - \theta_1) \sum_{i>r} \frac{z^i}{i} \right\}.\end{aligned}\quad (24)$$

Отметим, что при $r = 2$ этот результат совпадает с (14) в случае $d = 2$.

Итак, изучение совместного распределения чисел $A(r)$ -циклов $c_{A(r)}(n) = \sum_{i \leq r} c_i$ и $\bar{A}(r)$ -циклов $c_{\bar{A}(r)}(n) = \sum_{i > r} c_i$ случайной n -подстановки в модели (5) может быть основано на исследовании совместной производящей функции (7) этих характеристик с $H_{nA(r)}(\theta)$, указанным в (24).

Рассмотренные примеры, на наш взгляд, убедительно демонстрируют как достаточную универсальность предложенной методики, так и присущие ей сложности: за исключением отдельных случаев (типа (21)–(22)), точные решения в обсуждаемой проблематике имеют форму громоздких комбинаторных выражений, из которых проблематично извлечь конкретную информацию (хотя бы, например, вычислить средние и дисперсии величин $c_A(n)$ и $c_{\bar{A}}(n)$).

Поэтому дальнейшее продвижение в этой тематике можно осуществить лишь на пути асимптотического анализа, предполагая что степень подстановки стремится к бесконечности, как это обычно делается в теории случайных подстановок в классической (равновероятной) модели.

Детальный асимптотический анализ предложенной модели будет проведен в следующей работе, а здесь в завершение мы анонсируем один из соответствующих результатов.

Применение метода перевала для случая d -конгруэнтных циклов (см. параграф 4) показывает, что при $n \rightarrow \infty$ случайные величины $c_A(n)$ и $c_{\bar{A}}(n)$ асимптотически независимы и асимптотически нормальны с параметрами, соответственно, $((\theta_1/d) \ln n, (\theta_1/d) \ln n)$, $((d-1)\theta_2/d) \ln n, ((d-1)\theta_2/d) \ln n$. В частности, отсюда следует, что общее число циклов $c(n) = \sum_{j=1}^n c_j(n)$ в такой двухпараметрической модели асимптотически нормально со средним и дисперсией, асимптотически эквивалентными $((\theta_1 + (d-1)\theta_2)/d) \ln n$.

Замечание 3. В заключение отметим, что изложенная методика допускает следующее многомерное обобщение. Пусть задано разбиение множества $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$

$$X_n = \bigcup_{j=1}^N A_j, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad n \geq 2,$$

и $c_{A_j}(n) = \sum_{i \in A_j} c_i$ есть число A_j -циклов для произвольной подстановки $s \in S_n$, $j = 1, 2, \dots, N$.

Далее, введем на множестве S_n вероятностную меру вида

$$\mathbf{P}_\theta(s) = I \left(\sum_{i=1}^n i c_i = n \right) \prod_{j=1}^N \theta_j^{c_{A_j}} / H_n(\theta), \quad \theta = (\theta_1, \dots, \theta_N), \quad \theta \geq 0,$$

где теперь

$$H_n(\theta) = n! [z^n] \exp \left\{ \sum_{j=1}^N \theta_j \sum_{i \in A_j} \frac{z^i}{i} \right\}. \quad (25)$$

Тогда для совместной производящей функции вектора $(c_{A_j}(n), j = 1, \dots, N)$ справедливо представление (аналог (7))

$$\mathbf{E}_\theta \prod_{j=1}^N t_i^{c_{A_j}(n)} = H_n(t \times \theta) / H_n(\theta), \quad t \times \theta = (t_1 \theta_1, \dots, t_N \theta_N). \quad (26)$$

Такая конструкция позволяет, в принципе, изучать и такие ситуации, когда какие-то A -циклы в подстановке запрещены (в (25)–(26) надо соответствующие параметры θ_j положить равными нулю), а нам важна информация не просто о числе остальных циклов, но и об их более детальной структуризации.

Список литературы

1. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., Случайные комбинаторные объекты. *Доклады РАН* (2004) **396**, №2, 151–154.
2. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., Случайные подстановки: общая параметрическая модель. *Дискретная математика* (2006) **18**, №4, 105–112.
3. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., О случайных подстановках. *Труды по дискретной математике* (2002) **5**, 73–92.
4. Ewens W. I., The sampling theory of selectively neutral alleles. *Theor. Popul. Biol.* (1972) **3**, 87–112.
5. Сачков В. Н., *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*. МЦНМО, Москва, 2004.
6. Якимив А. Л., *Вероятностные приложения тауберовых теорем*. Физматлит, Москва, 2005.
7. Якимив А. Л., Предельная теорема для логарифма порядка случайной A -подстановки. *Дискретная математика* (2010) **22**, №1, 126–149.

Статья поступила 6.04.2011.