Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Алешин, Автоматное представление свободной группы, *Дискрет. матем.*, 2011, том 23, выпуск 3, 32–56

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1151>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 14:19:49

Автоматное представление свободной группы

© 2011 г. С. В. Алешин

Построен новый пример свободной подгруппы группы автоматных подстановок. Указаны два автомата с тремя состояниями, которые порождают эту подгруппу, при этом внутренние полугруппы этих автоматов не являются группами.

Первый пример свободной подгруппы группы автоматных подстановок был предложен в [3], полное доказательство этого результата было получено в [4]. Автоматы из этого примера являются дважды групповыми — у них самих и обратных к ним автоматов внутренние полугруппы являются группами. Такие автоматы составляют малую долю всех автоматов. Более того, если рассматривать группы, порожденные инициальными подавтоматами одного автомата, то, как показано в [6], существует 122 неизоморфных группы, порожденных автоматами с тремя состояниями, и только автомат из [3] порождает свободную группу. В [5] указана автоматная группа без кручения (не свободная) с тремя образующими полугрупповыми автоматами.

Мы построим свободную группу, порожденную двумя полугрупповыми автоматами. Элементами группы автоматных подстановок AS_2 [1, 2] являются взаимно-однозначные отображения множества слов в алфавите $\{0, 1\}$, которые реализуются инициальными автоматами с входным и выходным алфавитом $\{0, 1\}$. Рассмотрим два таких автомата A и B , каждый с тремя состояниями. Диаграмма автомата A приведена на рис. 1; как обычно, в круге, соответствующем состоянию, мы пишем номер состояния и подстановку на входном алфавите, которая реализуется в этом состоянии. В начальном состоянии 1 реализуется отрицание $\bar{x}$ — цикл $(0, 1)$, в состояниях 2 и 3 реализуются тождественные подстановки x .

Отображение автомата A обозначим через f . Обратное отображение f^{-1} реализуется инициальным автоматом $\bar{A}$, приведенным на рис. 2.

Рис. 1.

Рис. 2.

Рис. 3.

С использованием стандартных обозначений можно представить автомат A как

$$A = \{(0, 1), (1, 2, 3), \{0, 1\}, \varphi, \psi, 1\},$$

где функция переходов есть

$$\varphi: \quad \varphi(1, 0) = 1; \quad \varphi(1, 1) = 2; \quad \varphi(2, 0) = \varphi(2, 1) = 3; \quad \varphi(3, 0) = 3; \quad \varphi(3, 1) = 1,$$

а функция выходов есть

$$\psi(1, x) = \bar{x}; \quad \psi(2, x) = x; \quad \psi(3, x) = x.$$

Автомат B представлен на диаграмме, приведенной на рис. 3. Его отображение обозначим через h . Обратное отображение h^{-1} реализует автомат $\bar{B}$, приведенный на рис. 4.

Ниже будет показано, что подгруппа SA группы SA_2 , порожденная элементами $\{f, f^{-1}, h, h^{-1}\}$, порождается ими свободно.

Если элементы g_1, g_2 группы SA_2 реализуются автоматами

$$C_1 = (\{0, 1\}, Q_1, \{0, 1\}, \varphi_1, \psi_1, q_1^\circ),$$

$$C_2 = (\{0, 1\}, Q_2, \{0, 1\}, \varphi_2, \psi_2, q_2^\circ),$$

соответственно, то произведение $g = g_1 g_2$ реализуется автоматом C , который является последовательным соединением C_1 и C_2 , таким, что выход C_1 соединен с входом C_2 , и $C = (\{0, 1\}, Q, \{0, 1\}, \varphi, \psi, q^\circ)$, где $Q \subseteq Q_1 \times Q_2$;

$$\varphi((q_1, q_2), x) = (\varphi_1(q_1, x), \varphi_2(q_2, \psi_1(q_1, x)));$$

$$\psi((q_1, q_2), x) = \psi_2(q_2, \psi_1(q_1, x)).$$

Рис. 4.

Множество состояний произведения Q — это множество пар (q_1, q_2) , $q_1 \in Q_1$, $q_2 \in Q_2$, которые достижимы из начального состояния (q_1^0, q_2^0) . Вообще говоря, разные пары из Q могут соответствовать эквивалентным (неотличимым) состояниям автомата C . Например, произведение $f \cdot f^{-1}$ реализуется автоматом с одним состоянием — тождественное отображение $(0, 1)^*$ на себя (единица группы AS_2), при этом множество пар, достижимых из начальной пары $(1, 1)$, состоит из трех пар $(1, 1)$, $(2, 2)$ и $(3, 3)$.

Слову $R = r_1 r_2 \dots r_s$ в алфавите $\{f, f^{-1}, h, h^{-1}\}$ соответствует произведение отображений $r_1 r_2 \dots r_s$, которое реализуется автоматом, получающимся соединением автоматов из набора $\{A, \bar{A}, B, \bar{B}\}$. Слово R называется правильным, если в нем не встречаются стоящие рядом f и f^{-1} или h и h^{-1} . Наша задача — показать, что всякое правильное слово задает отображение, отличное от единицы группы SA_2 .

Пусть

$$C = (\{0, 1\}, Q, \{0, 1\}, \varphi, \psi),$$

$$D = (\{0, 1\}, P, \{0, 1\}, \varphi', \psi')$$

— приведенные автоматы, то есть у каждого из них состояния попарно отличимы.

Скажем, что автомат C гомоморфен автомату D , если на множестве состояний Q задано разбиение ρ на непересекающиеся классы такое, что число классов равно числу состояний D , и существует отображение ν множества Q на множество P такое, что если q_1 и q_2 принадлежат одному классу разбиения ρ , то $\nu(q_1) = \nu(q_2)$ и $\nu(\varphi(q, x)) = \varphi'(\nu(q), x)$ для любых $q \in Q$, $x \in \{0, 1\}$.

Такой гомоморфизм называют также гомоморфизмом переходных систем.

Скажем, что автомат $F = (\{0, 1\}, H, \{0, 1\}, \hat{\varphi}, \hat{\psi})$ является подавтоматом автомата $C = (\{0, 1\}, Q, \{0, 1\}, \varphi, \psi)$, если $H \subseteq Q$, функции $\hat{\varphi}$ и $\hat{\psi}$ — ограничения функций φ и ψ , соответственно, на множество H , и H замкнуто относительно действия $\hat{\varphi}$, то есть $\varphi(q, x) \in H$, если $q \in H$, $x \in \{0, 1\}$.

Скажем, что автомат D делит автомат C , если найдется подавтомат автомата C , который гомоморфен автомату D .

Определим S -свойство слова.

Определение 1. Пусть $R = r_1 r_2 \dots r_s$ — слово в алфавите $\{f, f^{-1}, h, h^{-1}\}$ и $r \in \{f, f^{-1}, h, h^{-1}\}$, $r \neq r_1$. Скажем, что слово R обладает S -свойством, если автомат, реализующий элемент r , делит приведенный автомат, реализующий слово R .

Пусть D, G — автоматы с двумя состояниями, переходные системы которых приведены на рис. 5.

Рис. 5.

Лемма 1. Если $R = r_1 r_2 \dots r_s$ — правильное слово, обладающее S -свойством, то для любого $t \geq 1$ имеет место один из случаев:

- (а) слово $r_t r_{t+1} \dots r_s$ обладает S -свойством,
- (б) автомат D делит автомат, реализующий $r_t r_{t+1} \dots r_s$,
- (в) автомат G делит автомат, реализующий $r_t r_{t+1} \dots r_s$.

Доказательство. Рассмотрим все возможные случаи.

Случай 1: $r_1 = f$, $r = f^{-1}$. Пусть L — приведенный автомат, реализующий отображение $r_2 r_3 \dots r_s$. Тогда автомат, реализующий отображение $r_1 r_2 \dots r_s$, есть суперпозиция автоматов A и L , где

$$L = (\{0, 1\}, Q, \{0, 1\}, \Phi, \psi, q_0).$$

Состояния суперпозиции могут быть заданы в виде пар (i, q) , $i \in \{1, 2, 3\}$, $q \in Q$, при этом разные пары могут задавать неотличимые состояния. Обозначим приведенный автомат, реализующий произведение $r_1 r_2 \dots r_s$ через F . По условию леммы, существует гомоморфизм ν из подавтомата F на автомат $\bar{A}$. Этот гомоморфизм можно распространить на множество пар (i, q) , считая, что если пара (i, q) задает состояние u автомата F , то $\nu(i, q) = \nu(u)$. Гомоморфизм ν разбивает множество состояний подавтомата F на три класса K_1, K_2, K_3 так, что $\nu(K_s) = s$, $s = 1, 2, 3$. Множество пар, задающих состояния суперпозиции AL , также разобьется на три класса, при этом пары, задающие одно и то же состояние, окажутся в одном классе — пары из класса R_s задают состояния из класса K_s , $s = 1, 2, 3$, $R_s \cap R_k = \emptyset$ при $s \neq k$.

Обозначим через R_{i_s} множество пар вида $(i, q) \in R_s$. Функция переходов γ суперпозиции AL такова, что

$$\gamma((i, q), x) = (\varphi(i, x), \Phi(q, \psi(i, x))),$$

где φ, ψ — функции переходов и выходов автомата A . Поэтому для классов R_{i_s} справедлива диаграмма переходов, приведенная на рис. 6. Для примера рассмотрим переход $R_{11} \xrightarrow{0} R_{12}$. В самом деле, для любой пары вида $(1, q)$ $\gamma((1, q), 0) = (1, q')$ для некоторого $q' \in Q$. Кроме того, для любой пары $(i, q) \in R_1$ имеет место равенство $\nu((i, q)) = 1$, и, так как ν — гомоморфизм,

$$\nu(\gamma((i, q), 0)) = \bar{\varphi}(\nu((i, q)), 0) = \bar{\varphi}(1, 0) = 2,$$

где $\bar{\varphi}$ — функция переходов $\bar{A}$. Поэтому под действием входной буквы 0 любая пара из R_{11} перейдет в некоторую пару из R_{12} .

Рис. 6.

Рис. 7.

Так как никакая пара из R_{22} не достижима из начальной пары, окончательно диаграмма принимает вид, приведенный на рис. 7.

Обозначим через $Q_{is} \subseteq Q$ множество состояний автомата L таких, что $q \in Q_{is}$, если $(iq) \in R_{is}$. Напомним, что выходная функция ψ автомата A такова, что

$$\psi(1, x) = \bar{x}, \quad \psi(2, x) = \psi(3, x) = x.$$

Поэтому для множеств Q_{is} состояний автомата L имеет место диаграмма переходов, приведенная на рис. 8.

Для примера, пусть пара $(1, q) \in R_{11}$, тогда $q \in Q_{11}$. Если Φ — функция переходов L , то в суперпозиции AL

$$\gamma((1, q), 0) = (1, q') = (\varphi(1, 0), \Phi(\psi(q, 0), 1)) = (1, \Phi(q, 1)) = (1, q')$$

то есть

$$q' = \Phi(q, 1),$$

при этом $(1, q') \in R_{12}$ и $q' \in Q_{12}$.

Для дальнейшего важно, что для всякого $i = 1, 2, 3$ имеет место равенство $Q_{im} \cap Q_{in} = \emptyset$ при $m \neq n$. В самом деле, пусть $(i, q_1) \in R_{im}$, $(i, q_2) \in R_{in}$. Тогда состояния u_1, u_2 , задаваемые, соответственно, этими парами, отличимы, и значит отображения

Рис. 8.

F_1, F_2 , реализуемые автоматом AL с начальными состояниями u_1, u_2 , соответственно, различны, то есть

$$F_1 = A_i \cdot L_{q_1} \neq A_i \cdot L_{q_2},$$

где A_i — отображение автомата A с начальным состоянием i , L_q — отображение автомата L с начальным состоянием q . Так как A_i — взаимно однозначное отображение, то $L_{q_1} \neq L_{q_2}$, и q_1, q_2 отличимы.

Вообще говоря, классы Q_{im} и Q_{jn} для разных i, j могут пересекаться. Однако в данном случае мы покажем, что и для разных i, j имеет место равенство $Q_{im} \cap Q_{jn} = \emptyset$, тем самым система классов $\{Q_{is}, i, s = 1, 2, 3\}$, — это разбиение множества состояний автомата на непересекающиеся классы.

Если под действием сигнала a состояния из множества M_1 переходят в состояния из множества M_2 , то будем обозначать это как $M_1 \xrightarrow{a} M_2$. Из диаграммы на рис. 8 видно, что

$$(Q_{11} \cap Q_{21}) \xrightarrow{1} (Q_{12} \cap Q_{31}) \xrightarrow{1} (Q_{13} \cap Q_{11}) = \emptyset,$$

и $Q_{12} \cap Q_{31} = \emptyset$. Далее,

$$(Q_{11} \cap Q_{31}) \xrightarrow{1} (Q_{12} \cap Q_{31}) = \emptyset,$$

поэтому $Q_{11} \cap Q_{23} = \emptyset$ и так далее. Используя диаграмму на рис. 8, построим диаграмму пересечений классов, представленную на рис. 9. Здесь цифра, помещенная в два различных класса, обозначает множество состояний, равное пересечению этих классов. Например, цифра 1 обозначает пересечение классов $Q_{11} \cap Q_{21}$, цифра 2 — пересечение $Q_{11} \cap Q_{23}$ и так далее.

Имеем переходы для пересечений

$$\begin{array}{llll} 1 \xrightarrow{1} 8 \xrightarrow{1} \emptyset, & 2 \xrightarrow{1} 8 = \emptyset, & 3 \xrightarrow{1} \emptyset, & 4 \xrightarrow{0} 18 \xrightarrow{0} \emptyset, \\ 5 \xrightarrow{1} \emptyset, & 6 \xrightarrow{1} 13 \xrightarrow{1} \emptyset, & 7 \xrightarrow{1} 13 = \emptyset, & 8 \xrightarrow{1} \emptyset, \\ 9 \xrightarrow{0} 21 \xrightarrow{1} 3 = \emptyset, & 10 \xrightarrow{1} \emptyset, & 11 \xrightarrow{1} 13 = \emptyset, & 12 \xrightarrow{1} 13 = \emptyset, \\ 14 \xrightarrow{0} 18 = \emptyset, & 15 \xrightarrow{1} \emptyset, & 16 \xrightarrow{1} 3 = \emptyset, & 17 \xrightarrow{0} \emptyset, \quad 18 \xrightarrow{0} \emptyset, \\ 19 \xrightarrow{0} \emptyset, & 20 \xrightarrow{1} 13 = \emptyset, & 21 \xrightarrow{1} 3 = \emptyset, & \end{array}$$

Рис. 9.

Рис. 10.

Таким образом, все пересечения пусты, и система классов Q_{is} — разбиение множества состояний автомата L . Поэтому и система классов (Q_1, Q_2, Q_3) , $Q_i = \bigcup_s Q_{is}$, образует разбиение множества состояний автомата L . Диаграмма переходов для классов Q_1, Q_2, Q_3 имеет вид, приведенный на рис. 10.

Она, очевидно, совпадает с диаграммой переходов автомата $\bar{A}$. Следовательно, автомат L гомоморфен автомату $\bar{A}$. Слово $r_2 r_3 \dots r_s$ не начинается с буквы f^{-1} , так как $r_1 r_2 \dots r_s$ — правильное слово, и $r_1 = f$. Таким образом, слово $r_2 r_3 \dots r_s$ обладает S -свойством, и случай 1, где $r_1 = f, r = f^{-1}$, рассмотрен.

Поскольку граф диаграммы пересечений совпадает с графом диаграммы для классов Q_{is} , в дальнейшем мы не будем предъявлять диаграмму Q_{is} , а только диаграмму пересечений.

Случай 2: $r_1 = f, r = h^{-1}$. Сохраняя построения и обозначения предыдущего случая, получаем диаграммы классов R_{is} (рис. 11) и пересечений (рис. 12).

Справедливы соотношения

$$\begin{array}{lll}
 3 \xrightarrow{1} \emptyset & 2 \xrightarrow{1} 8 \xrightarrow{1} \emptyset & 4 \xrightarrow{1} \emptyset \quad 5 \xrightarrow{1} \emptyset \\
 1 \xrightarrow{1} 10 \xrightarrow{0} 21 \xrightarrow{1} 3 = \emptyset & 6 \xrightarrow{1} 5 = \emptyset & 7 \xrightarrow{1} 3 = \emptyset \\
 9 \xrightarrow{1} \emptyset & 11 \xrightarrow{1} 15 \xrightarrow{1} \emptyset & 12 \xrightarrow{1} 13 \xrightarrow{0} 17 \xrightarrow{1} 15 = \emptyset
 \end{array}$$

Рис. 11.

Рис. 12.

$$\begin{aligned}
 14 \xrightarrow{0} 16 \xrightarrow{1} 15 &= \emptyset & 18 \xrightarrow{1} 5 &= \emptyset & 19 \xrightarrow{1} 13 &= \emptyset \\
 20 \xrightarrow{1} 13 &= \emptyset
 \end{aligned}$$

Таким образом, все пересечения классов пусты, поэтому тройка классов (Q_1, Q_2, Q_3) , $Q_i = \bigcup_s Q_{is}$, образует разбиение множества состояний автомата L , а диаграмма этого разбиения совпадает с диаграммой автомата $\bar{A}$, и снова слово $r_2 r_3 \dots r_s$ обладает S -свойством.

Случай 3: $r_1 = f$, $r = h$. Диаграммы классов R_{is} (рис. 13) и диаграмма пересечений классов (рис. 14) дают соотношения

$$1 \xrightarrow{1} 17 \xrightarrow{0} 19 \xrightarrow{1} 11 \xrightarrow{0} 25 \xrightarrow{1} 10 \xrightarrow{1} 1 = \emptyset \quad 2 \xrightarrow{1} 18 \xrightarrow{1} \emptyset$$

Рис. 13.

Рис. 14.

$$\begin{array}{llll}
 3 \xrightarrow{0} 24 \xrightarrow{0} \emptyset & 4 \xrightarrow{0} 24 = \emptyset & 5 \xrightarrow{0} 22 \xrightarrow{0} \emptyset & 6 \xrightarrow{0} 24 = \emptyset \\
 7 \xrightarrow{1} 5 = \emptyset & 8 \xrightarrow{1} 6 = \emptyset & 9 \xrightarrow{1} 4 = \emptyset & 12 \xrightarrow{0} 27 \xrightarrow{1} 4 = \emptyset \\
 13 \xrightarrow{1} 17 = \emptyset & 14 \xrightarrow{1} 18 = \emptyset & 15 \xrightarrow{0} 21 \xrightarrow{1} 5 = \emptyset & 16 \xrightarrow{1} \emptyset \\
 20 \xrightarrow{0} \emptyset & 22 \xrightarrow{1} \emptyset & 23 \xrightarrow{1} 18 = \emptyset & 25 \xrightarrow{1} 10 = \emptyset & 26 \xrightarrow{1} 16 = \emptyset
 \end{array}$$

Таким образом, система классов Q_{is} — разбиение, система классов (Q_1, Q_2, Q_3) — разбиение, диаграмма переходов для этой системы совпадает с диаграммой автомата $\bar{A}$, что и требовалось доказать.

Все случаи $r_1 = f^{-1}$ рассмотрены. Перейдем к случаям $r_1 = f^{-1}$.

Случай 4: $r_1 = f^{-1}$, $r = f$. Диаграмма классов R_{is} (рис. 15) и диаграмма пересечений классов (рис. 16) дают соотношения

Рис. 15.

Рис. 16.

$$\begin{aligned}
 &1 \xrightarrow{0} 8 \xrightarrow{0} 13 \xrightarrow{1} 7 \xrightarrow{1} 19 \xrightarrow{0} \emptyset \quad 2 \xrightarrow{0} 10 \xrightarrow{0} 15 \xrightarrow{0} 5 \xrightarrow{1} 1 = \emptyset \\
 &3 \xrightarrow{1} 6 \xrightarrow{0} 13 = \emptyset \quad 4 \xrightarrow{1} 11 \xrightarrow{0} 3 = \emptyset \quad 9 \xrightarrow{1} 12 \xrightarrow{1} 19 \xrightarrow{0} \emptyset \\
 &14 \xrightarrow{1} 12 = \emptyset \quad 16 \xrightarrow{1} 9 = \emptyset \quad 17 \xrightarrow{1} 14 = \emptyset \quad 18 \xrightarrow{1} 4 = \emptyset \\
 &19 \xrightarrow{8} \emptyset \quad 20 \xrightarrow{1} 15 = \emptyset \quad 21 \xrightarrow{1} 5 = \emptyset
 \end{aligned}$$

Таким образом, система классов Q_{is} есть разбиение, поэтому система классов (Q_1, Q_2, Q_3) есть разбиение, его диаграмма совпадает с диаграммой автомата A , при этом $r_2 \neq f$. Случай рассмотрен.

Случай 5: $r_1 = f^{-1}$, $r = h^{-1}$. Диаграмма классов R_{is} (рис. 17), и диаграмма пересечений (рис. 18) дают соотношения

Рис. 17.

Рис. 18.

$$\begin{array}{llll}
 1 \xrightarrow{1} 13 \xrightarrow{0} \emptyset & 2 \xrightarrow{1} 11 \xrightarrow{0} \emptyset & 3 \xrightarrow{0} 9 \xrightarrow{1} 7 \xrightarrow{1} 14 \xrightarrow{0} \emptyset & \\
 4 \xrightarrow{1} 6 \xrightarrow{0} 3 = \emptyset & 5 \xrightarrow{1} 1 = \emptyset & 8 \xrightarrow{0} 4 = \emptyset & 10 \xrightarrow{0} 5 = \emptyset \\
 12 \xrightarrow{1} 10 = \emptyset & 13 \xrightarrow{0} \emptyset & 14 \xrightarrow{0} \emptyset & 15 \xrightarrow{0} \emptyset \quad 16 \xrightarrow{1} 3 = \emptyset
 \end{array}$$

Система классов Q_{is} — разбиение, система классов (Q_1, Q_2, Q_3) — разбиение, ее диаграмма совпадает с диаграммой автомата A , при этом $r_2 \neq f$, что и требовалось доказать.

Случай 6: $r_1 = f^{-1}$, $r = h$. Диаграмма классов R_{is} (рис. 19) и диаграмма пересечений (рис. 20) дают соотношения

$$1 \xrightarrow{1} 20 \xrightarrow{0} \emptyset \quad 2 \xrightarrow{0} 10 \xrightarrow{1} 1 = \emptyset \quad 3 \xrightarrow{0} 10 = \emptyset \quad 4 \xrightarrow{0} 8 \xrightarrow{0} 15 \xrightarrow{1} 2 = \emptyset$$

Рис. 19.

Рис. 20.

$$\begin{array}{lllll}
 5 \xrightarrow{1} 2 = \emptyset & 6 \xrightarrow{0} 15 = \emptyset & 7 \xrightarrow{0} 15 = \emptyset & 9 \xrightarrow{0} 13 \xrightarrow{0} 5 = \emptyset & 11 \xrightarrow{0} 5 = \emptyset \\
 12 \xrightarrow{0} 5 = \emptyset & 14 \xrightarrow{0} 3 = \emptyset & 16 \xrightarrow{1} 9 = \emptyset & 17 \xrightarrow{0} \emptyset & 18 \xrightarrow{1} 4 = \emptyset \\
 19 \xrightarrow{1} 8 = \emptyset & 20 \xrightarrow{0} \emptyset & 21 \xrightarrow{1} 3 = \emptyset & &
 \end{array}$$

Таким образом, все пересечения пусты, система классов (Q_1, Q_2, Q_3) — разбиение, ее диаграмма совпадает с диаграммой автомата A , при этом $r_2 \neq f$, что и требовалось доказать.

Случай 7: $r_1 = h^{-1}$, $r = h$. Диаграмма R_{is} (рис. 21) и диаграмма пересечений (рис. 22) дают соотношения

Рис. 21.

Рис. 22.

$$\begin{array}{lllll}
 1 \xrightarrow{0} 14 \xrightarrow{1} 12 \xrightarrow{0} 13 \xrightarrow{0} \emptyset & 2 \xrightarrow{0} 14 = \emptyset & 3 \xrightarrow{0} \emptyset & 4 \xrightarrow{0} \emptyset & 5 \xrightarrow{0} \emptyset \\
 6 \xrightarrow{0} 15 \xrightarrow{1} 2 = \emptyset & 7 \xrightarrow{0} 15 = \emptyset & 8 \xrightarrow{1} 6 = \emptyset & 9 \xrightarrow{0} \emptyset & 10 \xrightarrow{1} 1 = \emptyset \\
 11 \xrightarrow{0} 13 = \emptyset & 16 \xrightarrow{0} 15 = \emptyset & 17 \xrightarrow{0} 13 = \emptyset & 18 \xrightarrow{0} 15 = \emptyset & \\
 19 \xrightarrow{0} 15 = \emptyset & 20 \xrightarrow{0} 13 = \emptyset & 21 \xrightarrow{0} 15 = \emptyset & &
 \end{array}$$

Таким образом, снова имеем разбиение, диаграмма которого совпадает с диаграммой автомата $\bar{B}$, при этом $r_2 \neq h$, и случай рассмотрен.

Случай 8: $r_1 = h^{-1}$, $r = f$. Диаграмма R_{i_s} (рис. 23) и диаграмма пересечений (рис. 24) дают соотношения

Рис. 23.

Рис. 24.

$$\begin{array}{llll}
 1 \xrightarrow{0} 4 \xrightarrow{0} \emptyset & 2 \xrightarrow{0} 14 \xrightarrow{0} \emptyset & 3 \xrightarrow{0} \emptyset & 5 \xrightarrow{0} \emptyset \quad 6 \xrightarrow{0} 5 = \emptyset \\
 7 \xrightarrow{0} 15 \xrightarrow{0} \emptyset & 8 \xrightarrow{0} \emptyset & 9 \xrightarrow{1} 12 \xrightarrow{1} 19 \xrightarrow{1} 8 = \emptyset & 10 \xrightarrow{1} 2 = \emptyset \\
 11 \xrightarrow{0} 3 = \emptyset & 13 \xrightarrow{1} 7 = \emptyset & 14 \xrightarrow{0} \emptyset & 15 \xrightarrow{0} \emptyset \quad 16 \xrightarrow{0} 3 = \emptyset \\
 17 \xrightarrow{0} 5 = \emptyset & 18 \xrightarrow{0} 5 = \emptyset & 20 \xrightarrow{0} 15 = \emptyset & 21 \xrightarrow{0} 15 = \emptyset
 \end{array}$$

Снова система (Q_1, Q_2, Q_3) — разбиение с диаграммой B , и при этом $r_2 \neq h$.

Случай 9: $r_1 = h^{-1}$, $r = f^{-1}$. Диаграмма R_{is} (рис. 25) и диаграмма пересечений (рис. 26) дают соотношения

$$\begin{array}{lllll}
 1 \xrightarrow{0} 8 \xrightarrow{0} \emptyset & 2 \xrightarrow{0} 8 = \emptyset & 3 \xrightarrow{0} \emptyset & 4 \xrightarrow{0} \emptyset & 5 \xrightarrow{0} \emptyset \\
 6 \xrightarrow{0} 8 = \emptyset & 7 \xrightarrow{0} 8 = \emptyset & 9 \xrightarrow{0} \emptyset & 10 \xrightarrow{0} \emptyset & 11 \xrightarrow{0} 9 = \emptyset \\
 12 \xrightarrow{0} 10 = \emptyset & 13 \xrightarrow{0} 10 = \emptyset & 14 \xrightarrow{0} 9 = \emptyset & 15 \xrightarrow{0} 10 = \emptyset & 16 \xrightarrow{0} 10 = \emptyset
 \end{array}$$

Снова справедливо разбиение $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$. Случай рассмотрен.

Рис. 25.

Рис. 26.

Случай 10: $r_1 = h, r = f$. Диаграмма классов R_{is} (рис. 27) и диаграмма пересечений (рис. 28) дают соотношения

$$\begin{array}{lll} 1 \xrightarrow{1} \emptyset & 2 \xrightarrow{1} \emptyset & 3 \xrightarrow{0} 14 \xrightarrow{0} 13 \xrightarrow{1} \emptyset \\ 7 \xrightarrow{1} \emptyset & 8 \xrightarrow{0} 15 \xrightarrow{1} \emptyset & 9 \xrightarrow{1} \emptyset \end{array}$$

Каждый класс Q_{is} можно представить в виде $Q_{is} = V_{is} \cup \Pi_{is}$, где

$$\Pi_{is} = \bigcup_{m,n} (Q_{is} \cap Q_{mn}),$$

то есть V_{is} — независимая часть Q_{is} , а Π_{is} — состояния, каждое из которых входит и в Q_{is} , и еще в какой-нибудь класс. Если из начального состояния q_0 достижимы только состояния из множества V , то множество классов V_{is} образует разбиение множества V , и ситуация повторяет ранее рассмотренные случаи. Если из начального состояния достижимы состояния множества Π , то в автомате L имеется подавтомат, определяемый множеством состояний Π , поскольку очевидно, что множество Π замкнуто относительно действия функции переходов автомата L . Обозначим этот подавтомат через L° .

Рис. 27.

Рис. 28.

Рассмотрим классы

$$K_1 = \{4, 5, 6, 10, 11, 12, 16, 17, 18\},$$

$$K_2 = \{19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27\},$$

где номера 4, 5 и так далее приписаны в соответствии с диаграммой на рис. 28 соответствующим пересечениям классов.

Классы K_1 и K_2 не пересекаются, в противном случае хотя бы одно из пересечений $\{1, 2, 3, 7, 8, 9, 13, 14, 15\}$ оказалось бы непустым. Например, если $4 \cap 19 \neq \emptyset$, то $1 \neq \emptyset$.

Таким образом, пара классов K_1, K_2 образует разбиение множества Π . Из диаграммы пересечений следует, что диаграмма этого разбиения совпадает с диаграммой автомата на рис. 5, то есть это автомат, который мы обозначили через D . Нами показано, что автомат D делит автомат L , поскольку у автомата L нашелся подавтомат, который гомоморфен D .

Случай 11: $r_1 = h, r = f^{-1}$. Диаграмма классов (рис. 29) и диаграмма пересечений (рис. 30) дают соотношения

Рис. 29.

Рис. 30.

$$\begin{aligned}
 1 &\xrightarrow{1} \emptyset & 2 &\xrightarrow{1} \emptyset & 6 &\xrightarrow{1} \emptyset & 7 &\xrightarrow{1} \emptyset \\
 11 &\xrightarrow{1} \emptyset & 12 &\xrightarrow{1} \emptyset
 \end{aligned}$$

Снова имеем разбиение

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \{3, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 14, 15\}, \\
 K_2 &= \{16, 17, 18, 19, 20, 21\}.
 \end{aligned}$$

Диаграмма для этого разбиения совпадает с диаграммой автомата D . Случай рассмотрен.

Случай 12: $r_1 = h, r = h^{-1}$. Диаграмма классов R_{i_s} (рис. 31) и диаграмма пересечений (рис. 32) дают соотношения

Рис. 31.

Рис. 32.

$$\begin{aligned}
 1 &\xrightarrow{1} \emptyset & 2 &\xrightarrow{1} \emptyset \\
 1 &\xrightarrow{1} \emptyset & 7 &\xrightarrow{0} 12 \xrightarrow{1} \emptyset \\
 11 &\xrightarrow{0} 6 = \emptyset
 \end{aligned}$$

Снова имеем разбиение $\{3, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 14, 15\}$, $\{16, 17, 18, 19, 20, 21\}$ на два класса. Диаграмма разбиения совпадает с диаграммой D . Случай рассмотрен.

Таким образом, случаи 10, 11 и 12 приводят нас к ситуации $r_2 \neq h^{-1}$, и автомат, реализующий слово $r_2 r_3 \dots r_s$, делится на D .

Случай 12а. Пусть $r_2 = f$. Соответствующие диаграммы для классов R_{i_s} и диаграмма пересечений, представленные на рис. 33 и 34, дают соотношения

$$\begin{aligned}
 1 &\xrightarrow{1} 5 \xrightarrow{0} 8 \xrightarrow{0} \emptyset & 2 &\xrightarrow{0} 8 = \emptyset & 3 &\xrightarrow{0} 2 = \emptyset \\
 4 &\xrightarrow{0} 8 = \emptyset & 6 &\xrightarrow{0} 7 \xrightarrow{1} 2 = \emptyset
 \end{aligned}$$

Рис. 33.

Рис. 34.

Следовательно, система Q_{is} — разбиение на множестве состояний автомата L° , и система Q_1, Q_2, Q_3 — разбиение с диаграммой, совпадающей с диаграммой автомата f^{-1} , то есть слово $r_3 r_4 \dots r_s$ обладает S -свойством.

Случай 12b. Если $r_2 = f^{-1}$, то соответствующие диаграммы (рис. 35 и 36) дают соотношения

$$\begin{aligned} 1 \xrightarrow{1} 4 \xrightarrow{0} \emptyset \quad 2 \xrightarrow{1} 1 = \emptyset \quad 3 \xrightarrow{1} 1 = \emptyset \\ 5 \xrightarrow{1} 2 = \emptyset, \end{aligned}$$

то есть получаем разбиение с диаграммой, совпадающей с диаграммой автомата A , следовательно, слово $r_3 r_4 \dots r_s$ обладает S -свойством.

Случай 12с: $r_2 = h$. Теперь получаем диаграммы, изображенные на рис. 37, 38. Диаграмма пересечений показывает, что $1 \xrightarrow{1} \emptyset$, и что множество пересечений $2, 3, 5, 6, 7, 8$ замкнуто относительно функции переходов автомата H , реализующего слово $r_3 r_4 \dots r_s$. Для этих множеств справедлива представленная на рис. 39 диаграмма.

Рис. 35.

Рис. 36.

Рис. 37.

Рис. 38.

Рис. 39.

Обозначим этот подавтомат автомата H через H° . Набор подмножеств $2, 3, 5, 6, 7, 8$ состояний автомата H° не является разбиением, однако, как следует из диаграммы на рис. 38, имеет место равенство $5 \cap 8 = \emptyset$. Пусть $r_3 = f^{-1}$.

Аналогично предыдущим построениям, пусть V — приведенный автомат, задающий слово $r_4 r_5 \dots r_8$. Рассмотрим множество H_{ik} , $i \in \{1, 2, 3\}$, $k \in \{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$, классов состояний автомата H , таких что $W \in H_{ik}$, если в суперпозиции $\bar{A}V$ пара (i, k) задает состояние W . С учетом диаграммы на рис. 39, для классов H_{ik} имеет место диаграмма переходов на рис. 40. Пусть V_{ik} — множество состояний автомата V такое, что $v \in V_{ik}$, если $(i, v) \in H_{ik}$. Тогда для него справедлива диаграмма на рис. 41.

Важно, что из выше приведенного свойства $5 \cap 8 = \emptyset$ следует, что $V_{38} \cap V_{35} = \emptyset$. Построим диаграмму пересечений для классов V_{ik} (рис. 42), ее граф совпадает с графом диаграммы на рис. 41.

Имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
 1 \xrightarrow{1} 15 \xrightarrow{0} (V_{38} \cap V_{35}) &= \emptyset & 2 \xrightarrow{1} 15 &= \emptyset & 3 \xrightarrow{0} 11 \xrightarrow{1} 2 &= \emptyset & 22 \xrightarrow{1} 3 &= \emptyset \\
 4 \xrightarrow{1} 1 &= \emptyset & 5 \xrightarrow{1} 1 &= \emptyset & 6 \xrightarrow{1} 1 &= \emptyset & 7 \xrightarrow{1} 1 &= \emptyset & 13 \xrightarrow{1} 2 &= \emptyset & 23 \xrightarrow{1} 3 &= \emptyset \\
 8 \xrightarrow{0} 12 \xrightarrow{0} 11 &= \emptyset & 9 \xrightarrow{0} 14 \xrightarrow{1} 2 &= \emptyset & 10 \xrightarrow{0} 11 &= \emptyset & 21 \xrightarrow{1} 3 &= \emptyset \\
 16 \xrightarrow{1} 3 &= \emptyset & 17 \xrightarrow{1} 3 &= \emptyset & 18 \xrightarrow{1} 3 &= \emptyset & 19 \xrightarrow{1} 3 &= \emptyset & 20 \xrightarrow{1} 10 &= \emptyset & 24 \xrightarrow{1} 3 &= \emptyset
 \end{aligned}$$

Следовательно, множество классов V_{ik} образует разбиение множества состояний $\{\bigcup_{i,k} V_{ik}\} = \tilde{V}$ автомата V . Соответственно, тройка V_1, V_2, V_3 классов $V_i = \bigcup_k V_{ik}$ также образует разбиение множества $\tilde{V}$. При этом диаграмма разбиения совпадает с диа-

Рис. 40.

Рис. 41.

Рис. 42.

Рис. 43.

Рис. 44.

граммой автомата A . Следовательно, слово $r_4 r_5 \dots r_s$ обладает S -свойством.

Нам осталось рассмотреть случаи $r_3 = f$, $r_3 = h$. Для этого заметим, что пара множеств M_1, M_2 состояний автомата H° , $M_1 = \{2, 3\}$, $M_2 = \{5, 6, 7, 8\}$, образует разбиение множества состояний H° . В самом деле, из диаграммы пересечений на рис. 38 следует, что $2 \cap 5 = \emptyset$ (они на одной горизонтали), аналогично, $2 \cap 6 = \emptyset$, $2 \cap 8 = \emptyset$. Так как $1 = \emptyset$, мы видим, что $2 \cap 7 = \emptyset$. Аналогично находим, что $3 \cap 5 = \emptyset$, $3 \cap 6 = \emptyset$, $3 \cap 7 = \emptyset$, $3 \cap 8 = \emptyset$.

Диаграмма для этой пары представлена на рис. 43. Она совпадает с диаграммой автомата G . Таким образом, G делит H° .

Пусть теперь $r_3 = f$. Соответствующие диаграммы классов H_{ik}° и диаграмма пересечений представлены на рис. 44 и рис. 45. Справедливы соотношения

Рис. 45.

Рис. 46.

Рис. 47.

$$\begin{array}{llll}
 1 \xrightarrow{0} 8 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{1} \emptyset & 3 \xrightarrow{1} \emptyset & 4 \xrightarrow{1} 5 \xrightarrow{1} \emptyset \\
 6 \xrightarrow{1} \emptyset & 7 \xrightarrow{1} 2 = \emptyset
 \end{array}$$

Таким образом, все пересечения пусты, тройка V_1, V_2, V_3 — это разбиение множества состояний V , и слово $r_4 r_5 \dots r_s$ обладает S -свойством.

Наконец, пусть теперь $r_3 = h$. Диаграмма H_{ik} (рис. 46) и диаграмма пересечений (рис. 47) дают соотношения

$$1 \xrightarrow{1} \emptyset \quad 4 \xrightarrow{1} \emptyset$$

Пара классов

$$M_1 = \{2, 3, 5, 6\}, \quad M_2 = \{7, 8\}$$

образует разбиение множества состояний V . Диаграмма переходов для этой пары совпадает с диаграммой D . Слово $r_4 r_5 \dots r_s$ не начинается с h^{-1} и D делит V , что возвращает нас к ситуации после случаев 10, 11, 12. Индуктивно рассуждая, проходим по всему слову R . Лемма доказана.

Теперь мы можем доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Подгруппа AS_2 , порожденная элементами $\{f, f^{-1}, h, h^{-1}\}$, является свободной группой.*

Доказательство. Предположим, что в алфавите $\{f, f^{-1}, h, h^{-1}\}$ существует правильное слово, такое, что $r_1 r_2 \dots r_s r_{s+1} = 1$. Можно считать, что $r_1 \neq r_{s+1}^{-1}$, в противном случае рассмотрим слово $r_2 r_3 \dots r_s$, которое также равно 1. Из равенства $r_1 r_2 \dots r_s r_{s+1} = 1$ следует равенство $r_1 r_2 \dots r_s = r_{s+1}^{-1}$. Отсюда следует, что автомат, реализующий слово $r_1 r_2 \dots r_s$, гомоморфен (даже равен) автомату, реализующему r_{s+1}^{-1} , и при этом $r_1 \neq r_{s+1}^{-1}$. Следовательно, слово $r_1 r_2 \dots r_s$ обладает S -свойством. Индуктивно применяя лемму 1, мы получим, что либо слово r_s обладает S -свойством, тогда один из автоматов $\{f, f^{-1}, h, h^{-1}\}$ делит другой, неравный ему автомат из этого списка, либо автомат D делит автомат, реализующий r_s , либо автомат G делит автомат, реализующий r_s . Все эти случаи приводят к противоречию. Теорема доказана.

Список литературы

1. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С., *Введение в теорию автоматов*. Наука, Москва, 1985.
2. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., *Основы теории групп*. Наука, Москва, 1982.
3. Алешин С. А., Свободная группа конечных автоматов. *Вестник Московского ун-ва, сер. I* (1983), № 4, 12–14.
4. Vorobets M., Vorobets Y., On a free group of transformations defined by an automaton. *Geom. Dedicata* (2007) **124**, 237–249.
5. Žuk A., Groupes engendrés par les automates. *Astérisque* (2008) **317**, 141–174.
6. Bondarenko I, Grigorchuk R., Kravchenko R., Muntyan Y., Nekrashevych V., Savchuk D., Šunić, Z., On classification of groups generated by 3-state automata over a 2-letter alphabet. *Algebra Discrete Math.* (2008), № 1, 1–163.

Статья поступила 1.03.2011.