Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Замараев, Оценка числа графов в некоторых наследственных классах, *Дискрет. матем.*, 2011, том 23, выпуск 3, 57–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1152>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 15:59:22

Оценка числа графов в некоторых наследственных классах

© 2011 г. В. А. Замараев

Рассматриваются классы из нулевого слоя множества бесконечных наследственных классов графов, определяемые двумя запрещенными подграфами. Один из этих подграфов $K_{1,s} + O_p$, а второй K_q . Дается верхняя оценка числа графов в таких классах.

Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», шифр 2010-1.3.1-111-017-012.

1. Введение

В работе рассматриваются обыкновенные помеченные графы. Множество X называется наследственным классом графов, если любой граф, изоморфный порожденному подграфу графа из X , также принадлежит X . Если X — множество графов, то через X_n обозначается подмножество графов из X с множеством вершин $\{1, 2, \dots, n\}$. Если M — множество графов, тогда через $\text{Free}(M)$ принято обозначать множество всех графов, не содержащих порожденных подграфов, изоморфных графам из M . Известно, что класс графов X является наследственным тогда и только тогда, когда существует M такое, что $X = \text{Free}(M)$.

В [1] доказано, что для любого бесконечного наследственного класса графов, отличного от класса всех графов, справедливо равенство

$$\log_2 |X_n| = \left(1 - \frac{1}{c(X)}\right) \frac{n^2}{2} + o(n^2), \quad (1)$$

где $c(X)$ — натуральное число, называемое индексом класса X . При этом множество всех бесконечных наследственных классов графов, отличных от класса всех графов, разбивается на слои, где каждому слою принадлежат классы с одним и тем же значением индекса. Множество классов, которым соответствует индекс, равный единице, называется унитарным слоем. В [1] описаны минимальные классы каждого слоя. Например, при $c = 2$ имеется только три минимальных класса: класс двудольных графов, класс графов, дополнительных к двудольным (кодвудольных), и класс расщепляемых графов. Таким образом, унитарный слой может быть охарактеризован как слой, состоящий из тех и только тех бесконечных наследственных классов, которые не содержат ни одного из трех перечисленных. Унитарный слой представляет особый интерес, так как при $c = 1$ соотношение (1) не дает асимптотики для величины $\log_2 |X_n|$, знание которой важно, например, при экономном кодировании графов из класса X [2]. В то же время этому слою принадлежат многие известные классы: леса, планарные графы, реберные графы, интервальные графы, кографы и другие. В [3] было исследовано асимптотическое поведение функции $|X_n|$

для классов из нижней части унитарного слоя. В [4] были рассмотрены четыре самых нижних яруса (множество классов с одинаковым порядком функции $\log_2 |X_n|$) унитарного слоя, для которых $\log_2 |X_n|$ по порядку совпадает с 1, $\log_2 n$, n , $n \log_2 n$. Данные ярусы называются константным, полиномиальным, экспоненциальным и факториальным соответственно. Для первых трех ярусов даны структурные описания, и в каждом из четырех найдены все минимальные элементы [4]. Факториальный ярус до сих пор остается наименее изученным ярусом нижней части унитарного слоя. Известно, что в данном ярусе имеется девять минимальных элементов [4]. В [5] доказано, что если X принадлежит факториальному ярусу и $|X_n| < n^{(1+o(1))n}$, то существует натуральное k такое, что $|X_n| = n^{(1-1/k+o(1))n}$. При этом для каждого k описано семейство минимальных классов.

Если класс принадлежит унитарному слою, то в множестве запрещенных графов должно быть хотя бы по одному представителю из класса двудольных, класса кодвудольных и класса расщепляемых графов. Из этого следует, что любой класс из унитарного слоя является подклассом некоторого класса из унитарного слоя, определяемого не более чем тремя запрещенными подграфами. Поэтому интересным представляется рассмотрение именно таких классов. Если запрещенный подграф один, то такой подграф должен быть двудольным, кодвудольным и расщепляемым. Всего имеется шесть графов, удовлетворяющих этим требованиям, все они являются порожденными подграфами графа P_4 . Класс $\text{Free}(P_4)$ хорошо изучен [6]. Известно, что он принадлежит факториальному ярусу. Далее логично поставить вопрос о характеристиках классов из унитарного слоя, определяемых двумя запрещенными подграфами. В этом случае один из запрещенных подграфов должен принадлежать одновременно двум классам. На текущем этапе исследований мы рассматриваем классы, у которых один запрещенный подграф двудольный и расщепляемый, а второй полный (являющийся кодвудольным). В частности, в данной работе дается верхняя оценка числа n -вершинных графов в классе $\text{Free}(K_{1,s} + O_p, K_q)$, из которой следует, что при $s \geq 2$, $p \geq 2$, $q \geq 2$ этот класс принадлежит не более чем факториальному ярусу (здесь и далее операция $+$ для графов означает объединение графов с непересекающимися множествами вершин).

В работе используются следующие обозначения. Подграф графа G , порожденный множеством вершин $A \subseteq V(G)$, обозначается через $G[A]$. Через $R(q, p)$ будем обозначать число Рамсея с параметрами q и p , то есть такое наименьшее число, что всякий граф с числом вершин не менее $R(q, p)$ содержит либо K_q , либо O_p в качестве порожденного подграфа. Окрестность вершины x обозначим через $N(x)$. Кроме того, для $N(x) \cap A$ введем краткое обозначение $N_A(x)$.

2. Оценка числа графов

В данной работе рассматриваются классы

$$M_{s,p,q} = \text{Free}(K_{1,s} + O_p, K_q).$$

Первый из запрещенных графов является двудольным и расщепляемым, второй кодвудольным. Таким образом, классы $M_{s,p,q}$ принадлежат унитарному слою. Далее будет доказано, что данные классы принадлежат не более чем факториальному ярусу. Заметим, что число n -вершинных графов в классе $M_{s,p,q}$ не превосходит числа n -вершинных графов в классе $N_t = M_{t,t,t}$, где $t = \max\{s, p, q\}$. Если мы получим верхнюю оценку для числа n -вершинных графов в классе N_t , то эта же оценка будет справедлива и для класса $M_{s,p,q}$. Поэтому далее будем рассматривать только классы N_t , это позволит уменьшить

количество используемых индексов. Для оценки числа n -вершинных графов в классе N_t нам потребуется доказать две леммы.

Лемма 1. Пусть дано множество U , $|U| = n$, и пусть $A_1, \dots, A_q$ — подмножества множества U , причем

$$|A_1| = \dots = |A_q| \geq \left\lceil \frac{(2^{q-1} - 1)n + t}{2^{q-1}} \right\rceil, \quad n > t, \quad q \geq 2.$$

Тогда

$$\left| \bigcap_{i=1}^q A_i \right| \geq t.$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по q . При $q = 2$

$$|A_1| = |A_2| \geq \left\lceil \frac{n+t}{2} \right\rceil, \quad |A_1 \cup A_2| \leq n,$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cup A_2| \geq 2 \left\lceil \frac{n+t}{2} \right\rceil - n \geq n + t - n = t.$$

Предположим, что для произвольных $q-1$ множеств $A_1, \dots, A_{q-1}$ лемма справедлива, и рассмотрим множества $A_1, \dots, A_q$. Введем обозначение

$$B = A_1 \cap \dots \cap A_{q-1}.$$

Так как

$$|A_i| \geq \left\lceil \frac{(2^{q-1} - 1)n + t}{2^{q-1}} \right\rceil = \left\lceil \frac{(2^{q-2} - 1)n + (n+t)/2}{2^{q-2}} \right\rceil,$$

по предположению индукции $|B| \geq \frac{1}{2}(n+t)$, а так как $|B|$ — целое число, $|B| \geq \lceil n+t/2 \rceil$. Теперь из неравенства

$$|A_q| \geq \left\lceil \frac{(2^{q-1} - 1)n + t}{2^{q-1}} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{n+t}{2} \right\rceil$$

следует, что

$$|B \cap A_q| = \left| \bigcap_{i=1}^q A_i \right| \geq t,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 2. Пусть G — некоторый n -вершинный граф из класса $\text{Free}(K_{1,p} + O_p, K_p)$, $p \geq 2$. Тогда существует разбиение

$$V(G) = A_1 \cup \dots \cup A_r \cup C$$

множества вершин графа G со следующими свойствами:

- (1) $r < R(R(p, p) + 1, p)$;
- (2) $|A_i| \geq d$, где $i = 1, \dots, r$, $d = p2^{p-1} + 2p(p-1) + 1$;

(3) A_i порождает пустой подграф, $i = 1, \dots, r$;

(4) $G[C] \in \text{Free}(O_d, K_p)$.

Доказательство. Сначала построим разбиение, о котором идет речь в формулировке леммы. Рассмотрим некоторое наибольшее по числу вершин независимое множество в G . Если мощность этого множества не меньше d , то обозначим его через A_1 , иначе положим $r = 0$ и $C = V(G)$. Аналогичным образом рассмотрим граф $G[V \setminus A_1]$. Если в этом графе какое-нибудь из наибольших независимых множеств содержит не менее d вершин, то обозначим одно из таких множеств через A_2 , иначе положим $r = 1$ и $C = V \setminus A_1$. Продолжим данный процесс до тех пор, пока можем выбрать из оставшихся вершин наибольшее независимое множество мощности не менее d . В итоге получим разбиение $V(G) = A_1 \cup \dots \cup A_r \cup C$, которое обладает свойствами (2)–(4). Для завершения доказательства остается установить наличие первого свойства.

Рассмотрим множества A_i и A_j , $i < j$. Обозначим через n_1 и n_2 мощности множеств A_i и A_j соответственно. По построению $n_1 \geq n_2$, а также каждая вершина из A_j смежна хотя бы с одной вершиной из A_i . Посмотрим, как может быть устроено множество ребер графа $G[A_i \cup A_j]$. Возможны два случая.

1. Каждая вершина графа имеет степень, меньшую, чем p .

2. В двудольном графе $G[A_i \cup A_j]$ существует вершина x со степенью, не меньшей p . В этом случае в A_i существует не менее $n_1 - 2p$ вершин со степенью, большей, чем $n_2 - p$, и в A_j существует не менее $n_2 - 2p$ вершин со степенью, большей, чем $n_1 - p$. Докажем это. Заметим, что по построению число вершин и в A_i , и в A_j не меньше $d = p^{2^{p-1}} + 2p(p-1) + 1$, что при $p \geq 2$ не меньше $p^2 + p$. Пусть, для определенности, $x \in A_i$. Так как $\deg(x) \geq p$, то $\deg(x) > n_2 - p$, иначе $G[\{x\} \cup A_j]$ содержал бы граф $K_{1,p} + O_p$. В этом случае больше чем $\deg(x) - p > n_2 - 2p$ вершин из $N(x) \subseteq A_j$ имеют степень не менее p . Действительно, пусть это не так, и в $N(x)$ найдутся p вершин $x_1, \dots, x_p$, степени которых меньше p , и поэтому $|\bigcup_{i=1}^p N(x_i)| < p^2$. Но так как $n_1 \geq p^2 + p$, в множестве $A_i \setminus \bigcup_{i=1}^p N(x_i)$ найдется p вершин $y_1, \dots, y_p$, не смежных ни с одной вершиной из множества $\{x_1, \dots, x_p\}$. Очевидно, что множество $\{x, x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p\}$ порождает запрещенный подграф $K_{1,p} + O_p$. Таким образом, из того, что в A_i есть вершина степени не менее p , следует, что в A_j есть не менее $n_2 - 2p$ вершин со степенью не менее p , а следовательно, более $n_1 - p$ (иначе в $G[A_i \cup A_j]$ нашелся бы запрещенный подграф $K_{1,p} + O_p$). Так как теперь известно, что в A_j существует вершина со степенью не менее p , аналогичными рассуждениями приходим к тому, что в A_i есть не менее $n_1 - 2p$ вершин со степенью более $n_2 - p$.

Теперь, если $r \geq R(q, p)$, $q = R(p, p) + 1$, то по теореме Рамсея среди множеств $A_1, \dots, A_r$ можно выбрать либо q множеств $A_{i_1}, \dots, A_{i_q}$, $i_1 < \dots < i_q$, таких, что каждый граф, порождаемый любыми двумя из этих множеств, не содержит вершины степени более $p - 1$, либо выбрать p множеств $A_{i_1}, \dots, A_{i_p}$, $i_1 < \dots < i_p$, таких, что каждый граф, порождаемый любыми двумя из этих множеств, содержит хотя бы одну вершину степени, не менее p . Покажем, что в обоих случаях граф, порождаемый выбранными множествами, обязательно содержит один из запрещенных подграфов и, следовательно, $r < R(q, p)$. Рассмотрим отдельно каждый случай.

1. Пусть выбрано q множеств $A_{i_1}, \dots, A_{i_q}$, $i_1 < \dots < i_q$, и каждый граф, порождаемый любыми двумя из этих множеств, не содержит вершины степени, большей $p - 1$. Рассмотрим произвольную вершину x из множества A_{i_q} . Данная вершина смежна хотя бы с одной вершиной из каждого множества $A_{i_1}, \dots, A_{i_{q-1}}$. Выберем из этих множеств по одной вершине, смежной с x , и обозначим их через $x_1, \dots, x_{q-1}$, где $x_j \in A_{i_j}$, $j = 1, \dots, q-1$.

Так как $q - 1 = R(p, p)$, то среди выбранных вершин найдутся p вершин $a_1, \dots, a_p$, порождающих либо O_p , либо запрещенный подграф K_p . Покажем, что в первом случае в графе $G[A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_q}]$ также содержится запрещенный подграф. Действительно, так как $|A_{i_q}| \geq d = p2^{p-1} + 2p(p-1) + 1 \geq p^2 + p$ при $p \geq 2$, и $\left| \bigcup_{i=1}^p N_{A_{i_q}}(a_i) \right| < p^2$, в A_{i_q} найдутся p вершин, не смежных ни с одной вершиной из $\{a_1, \dots, a_p\}$, которые вместе с вершинами $x, a_1, \dots, a_p$ порождают $K_{1,p} + O_p$.

2. Теперь пусть выбрано p множеств $A_{i_1}, \dots, A_{i_p}$, $i_1 < \dots < i_p$, и каждый граф, порождаемый любыми двумя из этих множеств, содержит хотя бы одну вершину степени не менее p . Обозначим через $n_{i_1}, \dots, n_{i_p}$ мощности множеств $A_{i_1}, \dots, A_{i_p}$ соответственно. Рассмотрим произвольное множество A_{i_j} . Для каждого множества A_{i_s} , $s \neq j$, в A_{i_j} существует подмножество, состоящее не менее чем из $n_{i_j} - 2p$ вершин, каждая из которых смежна более чем с $n_{i_s} - p$ вершинами из A_{i_s} . Так как для различных s такие подмножества, вообще говоря, разные, то из каждого множества A_{i_j} можно выбрать подмножество B_j мощности $d - 2p(p-1) = p2^{p-1} + 1$ такое, что для любой вершины $x \in B_j$ выполняется неравенство $N_{A_{i_s}}(x) > n_{i_s} - p$, $i_s \neq j$. Далее будем рассматривать множества $B_1, \dots, B_p$. На первом шаге выберем любую вершину из B_1 . Далее пусть k ($k-1$)-му шагу мы выбрали $k-1$ вершин из множеств $B_1, \dots, B_{k-1}$, которые порождают K_{k-1} (обозначим множество этих вершин через M). Покажем, что из множества B_k можно выбрать вершину, смежную с каждой вершиной из M . Для любой вершины $x_t \in M$ выполняется неравенство $N_{B_k}(x_t) > p2^{p-1} - p + 1$, $t = 1, \dots, k-1$. Из леммы 1 следует, что $\bigcap_{t=1}^{k-1} N_{B_k}(x_t)$ не пусто, следовательно, в B_k существует вершина, смежная со всеми вершинами из M . Эту вершину выберем на k -ом шаге.

Таким образом, r должно быть меньше константы $R(R(p, p) + 1, p)$, что и требовалось доказать.

Теперь перейдем к формулировке и доказательству основного результата данной работы.

Теорема 1. Для любого $p \geq 2$ число n -вершинных графов в классе N_p не превосходит n^{cn} , где c — некоторая константа, зависящая только от p .

Доказательство. Рассмотрим произвольный n -вершинный граф G из класса N_p . Согласно лемме 2, для множества $V(G)$ существует разбиение с определенными свойствами. Далее будем исходить из обозначений, указанных в формулировке леммы 2. Так как $|C| \leq t$, для выбора множества C существует не более n^t вариантов, где $t = R(p, d)$. При этом число различных графов, порождаемых множеством C , ограничено константой. Для разбиения оставшихся вершин на $r < h$, $h = R(R(p, p) + 1, p)$ произвольных множеств существует не более h^n вариантов. Рассмотрим теперь число различных вариантов расположения ребер между множествами A_i и A_j , $|A_i| = n_1$, $|A_j| = n_2$. Если в $G[A_i \cup A_j]$ нет вершины со степенью, большей $p-1$, то число ребер в таком графе меньше pn_2 . Поэтому число вариантов для расположения ребер не превосходит

$$\binom{n_1 n_2}{p n_2} 2^{p n_2} < (n_1 n_2)^{p n_2} n^{p n} < n^{3 p n}.$$

Если же в $G[A_i \cup A_j]$ существует вершина со степенью, не меньшей p , то число ребер в таком графе не менее $(n_1 - 2p)(n_2 - p)$ (это следует из доказательства леммы 2). Поэтому

число вариантов для расположения ребер в этом случае не превосходит

$$\binom{n_1 n_2}{(n_1 - 2p)(n_2 - p)} 2^{n_1 n_2 - (n_1 - 2p)(n_2 - p)} < n^{sn}.$$

Таким образом, общее число вариантов расположения ребер между A_i и A_j не превосходит $n^{s'n}$, где s' не зависит от n . Число вариантов расположения ребер между множествами A_i и C ограничено величиной n^{tn} в силу того, что $|C|$ ограничено константой t . Учитывая все эти оценки, заключаем, что число различных n -вершинных графов в классе N_p не превосходит n^{cn} , где c — некоторая константа. Теорема доказана.

Список литературы

1. Алексеев В. Е., Область значений энтропии наследственных классов графов. *Дискретная математика* (1992) **4**, №2, 148–157.
2. Алексеев В. Е., Наследственные классы и кодирование графов. *Проблемы кибернетики* (1982) **39**, 151–164.
3. Scheinerman E. R., Zito J., On the size of hereditary classes of graphs. *J. Comb. Theory* (1994) **61**, 16–39.
4. Алексеев В. Е., О нижних ярусах решетки наследственных классов графов. *Дискретный анализ и исследование операций* (1997) **4**, 3–12.
5. Balogh J., Bollobas B., Weinreich D., The size of hereditary properties of graphs. *J. Comb. Theory* (2000) **79**, 131–156.
6. Corneil D. G., Lerchs H., Stewart-Burlingham L., Complement reducible graphs. *Discrete Appl. Math.* (1981) **3**, 163–174.

Статья поступила 23.12.2009.