Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Б. Поплавский, Минорный ранг, нули определителя булевой матрицы и их приложения, *Дискрет. матем.*, 2011, том 23, выпуск 3, 93–119

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1155>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 16:38:43

Минорный ранг, нули определителя булевой матрицы и их приложения

© 2011 г. В. Б. Поплавский

В статье рассматриваются матрицы с элементами из произвольной булевой алгебры. Устанавливается связь столбцов и строк с минорно-ранговыми столбцами и строчками матрицы. Изучаются свойства множества квадратных матриц с нулевым определителем. В качестве приложения, приводятся достаточные условия совместности некоторых простейших типов матричных уравнений и неравенств. Указываются также комбинаторные приложения.

1. Введение

Пусть $\langle \mathbf{B}_{m \times n}, \cup, \cap', O, J \rangle$ есть булева алгебра $m \times n$ матриц с элементами из некоторой булевой алгебры $\langle \mathbf{B}, \cup, \cap', 0, 1 \rangle$. Операции $\cup, \cap'$ и, следовательно, отношение частичного порядка $\subseteq$ определяются для матриц поэлементно. Нулем и единицей такой вторичной булевой алгебры служат матрицы O и J , образованные целиком из нулей 0 и единиц 1 соответственно. С другой стороны, матрицы из $\mathbf{B}_{m \times n}$ образуют полукольцевое векторное пространство с двумя операциями, объединением матриц $A \cup B = (A_j^i \cup B_j^i) \in \mathbf{B}_{m \times n}$ (заменяющим сложение) и пересечением матрицы $\lambda \cap A = (\lambda \cap A_j^i) \in \mathbf{B}_{m \times n}$ с элементом из булевой алгебры $\mathbf{B}$ (заменяющим умножение на скаляр). Здесь A_j^i и B_j^i — элементы, стоящие в i -й строчке и j -м столбце матриц $A = (A_j^i)$ и $B = (B_j^i)$ соответственно. Кроме этого, множество всех матриц относительно произведения, определяемого для матриц $A = (A_j^i) \in \mathbf{B}_{m \times n}$ и $B = (B_j^i) \in \mathbf{B}_{n \times k}$ согласованных размеров как матрица $C = A \cap B \in \mathbf{B}_{m \times k}$ с элементами

$$C_j^i = \bigcup_{t=1}^n (A_t^i \cap B_j^t),$$

образует частичную полугруппу. Множество квадратных матриц $\mathbf{B}_{n \times n}$ относительно произведения образует решеточно упорядоченную полугруппу с единицей E . Здесь E — матрица, по главной диагонали которой стоят единицы, а на остальных местах — нули.

Пусть $\overset{+}{P}$ и $\bar{P}$ обозначают все четные и нечетные n -подстановки, $n \geq 2$. Полуперманенты, определяемые формулами

$$\overset{+}{\nabla} A = \bigcup_{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \overset{+}{P}} \bigcap_{k=1}^n A_k^{\lambda_k}, \quad \bar{\nabla} A = \bigcup_{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \bar{P}} \bigcap_{k=1}^n A_k^{\lambda_k},$$

позволяют рассмотреть перманент $\text{Per } A = \overset{+}{\nabla} A \cup \bar{\nabla} A$, определитель (детерминант) $\text{Det } A$, правый $R \text{Det } A$ и левый $L \text{Det } A$ определители, определяемые как

$$\text{Det } A = R \text{Det } A \cup L \text{Det } A,$$

$$R \text{Det } A = \overset{+}{\nabla} A \cap (\bar{\nabla} A)',$$

$$L \text{Det } A = \bar{\nabla} A \cap (\overset{+}{\nabla} A)',$$

а также пересечение полуперманентов $\Delta A = \overset{+}{\nabla} A \cap \bar{\nabla} A$ для любой матрицы A . Ясно, что из определения перманента и детерминанта квадратной булевой матрицы следует, что $\text{Per } A = \text{Det } A \cup \Delta A$, поэтому $\text{Det } A \subseteq \text{Per } A$.

Задачи сохранения матричных свойств при преобразовании матриц с элементами из некоторого полукольца являются самыми широко представленными в работах по этой теме в современной математической литературе (см., например, обзор [1]). В нашей статье рассматривается понятие минорного ранга произвольной булевой матрицы. Минорные ранги, как было ранее показано в [2], дают нижние оценки для строчных, столбцовых, факторизационных и перманентных рангов. Кроме того, минорные ранги являются инвариантами D -классов (или совпадающих с ними J -классов) частичной полугруппы булевых матриц всех размеров. Однако здесь, в отличие от статьи [2], будут рассмотрены иные преобразования матриц, которые также сохраняют минорные ранги.

В разделе 3 вводится понятие полулинейной зависимости (SL -зависимости) столбца (или строки) в некоторой матрице от остальных ее столбцов (или строк). Оно определяется как свойство этого столбца сохранять минорный ранг той матрицы, к столбцам которой он приписан. Изучаются свойства полулинейных оболочек, появляющихся в связи с понятием полулинейной зависимости. В частности, показана выпуклость полулинейных оболочек, их взаимосвязь с линейными оболочками тех же столбцов.

Раздел 4 посвящен доказательству теорем, показывающих, как зависят столбцы (или строки) матриц от их минорно-ранговых столбцов, то есть аналоги теоремы о базисном миноре для матриц над полем.

Далее мы рассматриваем приложения полученных здесь результатов к матричным уравнениям и неравенствам, проблема разрешимости которых является весьма актуальной (см., например, [3], гл. 7 и гл. 15; [4], гл. 6). Условия разрешимости некоторых типов уравнений и неравенств сформулированы в терминах минорных рангов. В частности, неравенство $B \subseteq A \cap X$ для булевой матрицы A и столбца B над булевой алгеброй $\mathbf{B}_2 = \{0, 1\}$ имеет решение, если столбец не увеличивает минорного ранга матрицы A . Это напоминает теорему Кронекера–Капелли для систем линейных уравнений над полями.

В следующем разделе 6 изучаются свойства множества квадратных матриц неполного ранга, то есть таких матриц, определитель которых равен нулю. Мы проводим это, используя естественное разложение произвольной квадратной матрицы A , которая, как было показано в [5], может быть представлена в виде объединения $A = \hat{A} \cup \check{A} \cup \check{\check{A}}$ соответственно внешней, детерминантной и внутренней частей. Они получаются как пересечения $\check{A} = (\text{Per } A)' \cap A$, $\hat{A} = \text{Det } A \cap A$, $\check{\check{A}} = \Delta A \cap A$. Такое представление квадратной матрицы позволяет справиться, например, с такими задачами, как проблема разложения определителя по строке или столбцу [5]. Она сводится к разложимости детерминанта внутренних частей этих матриц. Проблема обратимости и невырожденности булевых матриц также тесно связаны. Кроме этого, проблема обратимости связана и с проблемой разложимости детерминанта булевых матриц по строке или столбцу.

Можно показать, что всякое рефлексивное бинарное отношение на конечном множестве, содержащее, по крайней мере, одну симметричную пару различных точек, описывается внутренней матрицей. Широко используемые в математике бинарные отношения на конечном множестве нередко являются внутренними. Например, рефлексивные бинарные отношения (эквивалентности, толерантности, частичного порядка и т. д.) на конечном множестве чаще всего являются внутренними [6]. Можно указать интерпретацию внутренностей и в терминах конечных ориентированных графов. Наблюдается также схожесть свойств внутренности булевых матриц со свойствами соответствующего топологического понятия.

Множество вырожденных матриц, которое определяется условием $\text{Det } A = 0$ или $A = \hat{A} \cup \check{A}$, образует идеал в полугруппе квадратных матриц относительно произведения матриц, что сразу следует из свойства определителя $\text{Det } A \sqcap B \subseteq \text{Det } A \cap \text{Det } B$ (см. [2]). Мы покажем, что все внутренние матрицы образуют подполугруппу в этом идеале. Будет показано, в частности, что внешние матрицы образуют нижнюю полурешетку, а главные булевы идеалы, порожденные внешней матрицей, состоят из внешних матриц. Внутренности же образуют верхнюю полурешетку, которой принадлежат линейные комбинации и даже многочлены, построенные из всевозможных произведений внутренних матриц и их степеней с коэффициентами из булевой алгебры. Более того, множество всех внутренностей образуют полукольцо с аддитивной операцией $\sqcup$ и мультипликативной операцией $\sqcap$. Все вышесказанное объясняет интерес к внешним и внутренним булевым матрицам.

В конце статьи указываются также приложения к комбинаторике матриц. Доказывается утверждение, которое является эквивалентом известной теоремы Фробениуса–Кёнига о $(0, 1)$ -матрицах с равным нулю перманентом, и которое сравнивает строение матрицы с нулевым перманентом со всеми матрицами, для которых перманенты не равны нулю.

2. Минорный ранг булевой матрицы

Из элементов некоторой булевой $m \times n$ матрицы A , расположенных на пересечении некоторых k столбцов с номерами $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ и k строк с номерами $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m$, образуем квадратную булеву матрицу $M_{j_1, j_2, \dots, j_k}^{i_1, i_2, \dots, i_k}$. Назовем эту матрицу k -блоком (блоком порядка k) матрицы A . Если для рассуждений является неважным, из каких строк и столбцов образован некоторый k -блок, то в его обозначении номера строк и столбцов будут опускаться.

Определение 1. Минорным рангом ненулевой матрицы A размера $m \times n$ назовем натуральное число k , $1 \leq k \leq \min(m, n)$, удовлетворяющее двум условиям:

- (1) У матрицы A существует квадратный блок M_k порядка k , определитель которого отличен от нуля;
- (2) Если у матрицы существуют $(k + 1)$ -блоки, то их определители равны нулю.

Ранг нулевой матрицы считается равным нулю.

Предложение 1. Если минорный ранг матрицы A равен k , то определители всех ее блоков порядка $k + 1$ и выше, если они существуют, равны нулю.

Доказательство. По определению минорного ранга, противоположно ориентированные полуперманенты любого квадратного $(k + 1)$ -блока M_{k+1} матрицы A совпадают, и поэтому

выполняются равенства

$${}^+ \nabla M_{k+1} = {}^- \nabla M_{k+1} = \Delta M_{k+1} = \text{Per } M_{k+1}.$$

Возьмем теперь блок порядка $k+2$ и разложим его ориентированные полуперманенты по элементам его любого столбца или строки (см. [5]). Коэффициентами при элементах столбца в этом разложении являются ориентированные полуперманенты блоков матрицы A порядка $k+1$, и следовательно, являются равными полуперманентам противоположной ориентации. Мы видим, что противоположно ориентированные полуперманенты $(k+2)$ -блоков равны. Таким образом, все определители $(k+2)$ -блоков равны нулю.

Понятно, что по этим же причинам определители блоков и более высокого порядка, если они существуют, равны нулю.

Предложение 1 позволяет сформулировать определение минорного ранга короче: минорный ранг матрицы A — это наибольший порядок квадратного блока, определитель которого отличен от нуля.

Если ранг матрицы A равен k , то будем писать $\text{rank } A = k$.

Пример 1. Для булевой матрицы

$$A = \begin{pmatrix} [0; 1] & [0; 2] & [0; 3] \\ [-1; 0] & \emptyset & [0; 2] \\ [0; 1] & [0; 3] & [-1; 2] \end{pmatrix}$$

с элементами из булевой алгебры всевозможных подмножеств множества действительных чисел минорный ранг равен 2. При этом

$$\text{Per } A = {}^\pm \nabla A = [0; 1].$$

Следовательно, перманентный ранг, как наибольший порядок квадратного блока, перманент которого отличен от нуля, равен 3.

Определение 2. Если минорный ранг булевой матрицы A равен k , то любой ее k -блок с отличным от нуля определителем назовем минорно-ранговым блоком.

Столбцы и строчки матрицы A , пересечения которых дают элементы минорно-рангового блока, назовем минорно-ранговыми столбцами и строчками соответственно.

В общем случае у матрицы может оказаться несколько минорно-ранговых блоков.

3. SL -зависимость и ее свойства

Определение 3. Назовем столбец B SL -зависимым от столбцов $C_1, \dots, C_k$, если выполняется условие

$$\text{rank}(BC_1 \dots C_k) = \text{rank}(C_1 \dots C_k)$$

для матриц $(BC_1 \dots C_k)$ и $(C_1 \dots C_k)$, построенных из указанных столбцов. Множество всех столбцов, SL -зависимых от столбцов $C_1, \dots, C_k$, обозначим $SL(C_1, \dots, C_k)$.

Аналогичное определение SL -зависимости можно дать для строк.

Ясно, что $SL(C_1, \dots, C_k)$ не зависит от порядка записи столбцов $C_1, \dots, C_k$. Очевидно также, что если матрица $A = (BC_1 \dots C_k)$ является квадратной, то столбец B является SL -зависимым от столбцов $C_1, \dots, C_k$ тогда и только тогда, когда $\text{Det } A = 0$ и среди $C_1, \dots, C_k$ есть некоторый полный набор минорно-ранговых столбцов.

Если B линейно зависит от столбцов $C_1, \dots, C_r$, то есть является линейной комбинацией этих столбцов, будем писать $B \in L(C_1, \dots, C_r)$. При условии $\text{rank}(C_1 \dots C_r) = r$ принадлежность $B \in L(C_1, \dots, C_r)$ влечет включение $B \in SL(C_1, \dots, C_r)$, так как определитель квадратного блока, у которого столбец является линейной комбинацией остальных, равен нулю. Таким образом, если $\text{rank}(C_1 \dots C_r) = r$, то $L(C_1, \dots, C_r) \subseteq SL(C_1, \dots, C_r)$. Более того, выполняется следующее утверждение, которое показывает выпуклость множества $SL(C_1, \dots, C_k)$ для любого k .

Предложение 2. Если $B_1, \dots, B_s \in SL(C_1, \dots, C_k)$, то $L(B_1, \dots, B_s) \subseteq SL(C_1, \dots, C_k)$.

Доказательство. Равенство

$$\text{rank} \left(\left(\bigcup_{i=1}^s (\lambda_i \cap B_i) \right) C_1 \dots C_k \right) = \text{rank}(C_1 \dots C_k)$$

для произвольной линейной комбинации столбцов $\bigcup_{i=1}^s (\lambda_i \cap B_i)$ следует из того, что всякий детерминант $\text{Det} \left(\left(\bigcup_{i=1}^s (\lambda_i \cap \tilde{B}_i) \right) \tilde{C}_1 \dots \tilde{C}_{t_{s-1}} \right)$ блока размера $s \times s$, содержащего элементы столбцов $\bigcup_{i=1}^s (\lambda_i \cap B_i)$ и $C_{t_1}, \dots, C_{t_{s-1}}$, удовлетворяет соотношению

$$\text{Det} \left(\left(\bigcup_{i=1}^s (\lambda_i \cap \tilde{B}_i) \right) \tilde{C}_1 \dots \tilde{C}_{t_{s-1}} \right) \subseteq \bigcup_{i=1}^s (\lambda_i \cap \text{Det}(\tilde{B}_i \tilde{C}_1 \dots \tilde{C}_{t_{s-1}})).$$

Так как $B_1, \dots, B_s \in SL(C_1, \dots, C_k)$, столбцы $B_1, \dots, B_s$ не увеличивают ранг матрицы $(C_1, \dots, C_k)$. Следовательно, все $\text{Det}(\tilde{B}_i \tilde{C}_1 \dots \tilde{C}_{t_{s-1}}) = 0$, если $s > \text{rank}(C_1 \dots C_k)$. Получаем, что ранг матрицы $(C_1 \dots C_k)$ не увеличивается при добавлении столбца $\bigcup_{i=1}^s (\lambda_i \cap B_i)$. Предложение доказано.

Следствием предложения 2 является следующее утверждение.

Теорема 1. Множество всех столбцов, не увеличивающих ранг матрицы $(C_1 \dots C_k)$, есть их линейная оболочка, то есть

$$SL(C_1, \dots, C_k) = L(SL(C_1, \dots, C_k)).$$

Предложение 3. Справедливо включение $C_1, \dots, C_k \in SL(C_1, \dots, C_k)$ и, следовательно, $L(C_1, \dots, C_k) \subseteq SL(C_1, \dots, C_k)$.

Доказательство. Равенство $\text{rank}(C_i C_1 \dots C_k) = \text{rank}(C_1 \dots C_k)$ для $i = 1, \dots, k$ следует из того, что всякий $s \times s$ -блок $(\tilde{C}_i \tilde{C}_{t_1} \dots \tilde{C}_{t_{s-1}})$, содержащий элементы столбцов C_i и $C_{t_1}, \dots, C_{t_{s-1}}$, или является $s \times s$ -блоком матрицы $(C_1 \dots C_k)$ или наоборот, блоком, содержащим два одинаковых столбца. Включение $L(C_1, \dots, C_k) \subseteq SL(C_1, \dots, C_k)$ следует из теоремы 1. Предложение доказано.

Рассмотрим другие свойства множества столбцов, не изменяющих ранги указанных матриц.

Предложение 4. Из того, что $B_1 \in SL(B_2, C_1, \dots, C_k)$ и $B_2 \in SL(C_1, \dots, C_k)$, следует, что $B_1 \in SL(C_1, \dots, C_k)$.

Доказательство. Из условий

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(B_1 B_2 C_1 \dots C_k) &= \operatorname{rank}(B_2 C_1 \dots C_k) \leq k + 1, \\ \operatorname{rank}(B_2 C_1 \dots C_k) &= \operatorname{rank}(C_1 \dots C_k) \leq k\end{aligned}$$

следуют равенства

$$\operatorname{rank}(B_1 B_2 C_1 \dots C_k) = \operatorname{rank}(B_2 C_1 \dots C_k) = \operatorname{rank}(C_1 \dots C_k) = r \leq k.$$

Это означает, что все $(r + 1)$ -блоки матрицы $(B_1 B_2 C_1 \dots C_k)$, в частности, содержащие B_1 и не содержащие B_2 , имеют равные нулю определители. Тогда

$$\operatorname{rank}(B_1 C_1 \dots C_k) = \operatorname{rank}(B_2 C_1 \dots C_k) = \operatorname{rank}(C_1 \dots C_k),$$

то есть $B_1 \in SL(C_1, \dots, C_k)$. Предложение доказано.

Предложение 5. Если $B \in SL(C_1, \dots, C_k)$, то $SL(B, C_1, \dots, C_k) \subseteq SL(C_1, \dots, C_k)$.

Доказательство. Из предложения 4 следует, что $SL(B, C_1, \dots, C_k) \subseteq SL(C_1, \dots, C_k)$ при условии $B \in SL(C_1, \dots, C_k)$.

Предложение 6. Если $B \in SL(C_1, \dots, C_k)$ — такой столбец, что ранг матрицы $(B C_1 \dots C_k)$ при приписывании к ней любого столбца $D \in SL(C_1, \dots, C_k)$ не меняется, то

$$SL(C_1, \dots, C_k) = SL(B, C_1, \dots, C_k).$$

Доказательство. То, что при приписывании любого столбца $D \in SL(C_1, \dots, C_k)$ к матрице $(B C_1 \dots C_k)$ ранг не меняется для некоторого $B \in SL(C_1, \dots, C_k)$, означает, что $\operatorname{rank}(D B C_1 \dots C_k) = \operatorname{rank}(B C_1 \dots C_k) \leq k + 1$, то есть $D \in SL(B C_1, \dots, C_k)$. Получаем, что $SL(C_1, \dots, C_k) \subseteq SL(B, C_1, \dots, C_k)$ и тогда, учитывая предложение 5, выполняется равенство $SL(C_1, \dots, C_k) = SL(B, C_1, \dots, C_k)$. Предложение доказано.

Замечание 1. Из предложения 6, в частности, следует, что

$$SL(C_1, \dots, C_k) = SL(O, C_1, \dots, C_k)$$

или

$$SL(C_1, \dots, C_k) = SL(C_i, C_1, \dots, C_k), \quad i = 1, \dots, k.$$

Следовательно, нулевой столбец или повторяющийся можно удалить из списка образующих полупространственной оболочки.

Пример 2. Булева матрица

$$(B_1 B_2 C_1 C_2) = \begin{pmatrix} \{c\} & \{b\} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \{c\} & \emptyset & \{a\} \\ \emptyset & \emptyset & \{a, c\} & \emptyset \end{pmatrix}$$

элементы которой являются подмножествами множества $\{a, b, c\}$, дает пример того, что $B_1 \in SL(C_1, C_2)$ и $B_2 \in SL(C_1, C_2)$, но $\operatorname{rank}(B_1 B_2 C_1 C_2) \neq \operatorname{rank}(C_1 C_2)$. Действительно, $\operatorname{rank}(B_1 B_2 C_1 C_2) = 3$, так как

$$\operatorname{Det} \begin{pmatrix} \{c\} & \{b\} & \emptyset \\ \emptyset & \{c\} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \{a, c\} \end{pmatrix} = \{c\} \neq \emptyset,$$

но $\operatorname{rank}(B_1 C_1 C_2) = \operatorname{rank}(B_2 C_1 C_2) = \operatorname{rank}(C_1 C_2) = 2$.

Предложение 7. Равенство $\text{rank}(B_1 B_2 C_1 \dots C_k) = \text{rank}(C_1 \dots C_k)$ выполняется тогда и только тогда, когда $B_1, B_2 \in SL(C_1, \dots, C_k)$ и $B_1 \in SL(B_2, C_1, \dots, C_k)$.

Доказательство. Из равенства

$$\text{rank}(B_1 B_2 C_1 \dots C_k) = \text{rank}(C_1 \dots C_k) = r$$

следует, что

$$\text{rank}(B_1 C_1 \dots C_k) = \text{rank}(B_2 C_1 \dots C_k) = \text{rank}(C_1 \dots C_k),$$

так как все блоки порядка $r + 1$ в матрицах $(B_1 C_1 \dots C_k)$, $(B_2 C_1 \dots C_k)$ также являются блоками матрицы $(B_1 B_2 C_1 \dots C_k)$ и, следовательно, дают нулевые определители. Получаем, что

$$\text{rank}(B_1 B_2 C_1 \dots C_k) = \text{rank}(B_1 C_1 \dots C_k) = \text{rank}(B_2 C_1 \dots C_k) = \text{rank}(C_1 \dots C_k).$$

Отсюда $B_1, B_2 \in SL(C_1, \dots, C_k)$, $B_1 \in SL(B_2, C_1, \dots, C_k)$, $B_2 \in SL(B_1, C_1, \dots, C_k)$. То, что из условий $B_1, B_2 \in SL(C_1, \dots, C_k)$ и $B_1 \in SL(B_2, C_1, \dots, C_k)$ следует равенство $\text{rank}(B_1 B_2 C_1 \dots C_k) = \text{rank}(C_1 \dots C_k)$, является очевидным. Предложение доказано.

Теорема 2. Какое бы множество столбцов $\{B_1, \dots, B_t\}$, удовлетворяющих условию $\text{rank}(C_1 \dots C_k B_1 \dots B_t) = \text{rank}(C_1 \dots C_k)$, ни приписывалось к столбцам матрицы $(C_1 \dots C_k)$, для любой t -подстановки P выполняется следующая цепочка включений:

$$\begin{aligned} L(C_1, \dots, C_k) &\subseteq L(C_1, \dots, C_k, B_{P(1)}) \subseteq \dots \subseteq L(C_1, \dots, C_k, B_{P(1)}, \dots, B_{P(t-1)}, B_{P(t)}) \\ &\subseteq SL(C_1, \dots, C_k, B_{P(1)}, \dots, B_{P(t-1)}, B_{P(t)}) \\ &\subseteq SL(C_1, \dots, C_k, B_{P(1)}, \dots, B_{P(t-1)}) \subseteq \dots \subseteq SL(C_1, \dots, C_k). \end{aligned}$$

Доказательство. Вначале покажем, что условие $\text{rank}(C_1 \dots C_k B_1 \dots B_t) = \text{rank}(C_1 \dots C_k)$ эквивалентно итерационным условиям $B_i \in SL(C_1, \dots, C_k, B_1 \dots B_{i-1})$ для $i = 1, \dots, t$. Пусть выполнены условия $B_i \in SL(C_1, \dots, C_k, B_1 \dots B_{i-1})$, $i = 1, \dots, t$. Это означает сохранение рангов при присоединении к матрице последовательно столбцов $B_1, \dots, B_t$:

$$\begin{aligned} \text{rank}(C_1 \dots C_k) &= \text{rank}(C_1 \dots C_k B_1) = \dots = \text{rank}(C_1 \dots C_k B_1 \dots B_{t-1}) \\ &= \text{rank}(C_1 \dots C_k B_1 \dots B_{t-1} B_t) \end{aligned}$$

Получаем, что

$$\text{rank}(C_1 \dots C_k B_1 \dots B_t) = \text{rank}(C_1 \dots C_k).$$

Обратно, из равенства $\text{rank}(C_1 \dots C_k B_1 \dots B_t) = \text{rank}(C_1 \dots C_k)$ следует, что ранги не будут меняться, если приписывать столбцы к матрице $(C_1 \dots C_k)$ по одному в любом порядке, так как все блоки порядка $r + 1$ в подматрицах матрицы $(C_1 \dots C_k B_1 \dots B_t)$, содержащих матрицу $(C_1 \dots C_k)$, также являются блоками матрицы $(C_1 \dots C_k B_1 \dots B_t)$ и, следовательно, дают нулевые определители. Получаем, что если $\text{rank}(C_1 \dots C_k B_1 \dots B_t) = \text{rank}(C_1 \dots C_k)$, то $B_{P(i)} \in SL(C_1, \dots, C_k, B_{P(1)}, \dots, B_{P(i-1)})$ для $i = 1, \dots, t$ и для любой t -подстановки P .

Так как из условий теоремы следует, что $B_t \in SL(C_1, \dots, C_k, B_1, \dots, B_{t-1})$, $B_{t-1} \in SL(C_1, \dots, C_k, B_1, \dots, B_{t-2})$, и так далее, то, учитывая предложение 5, получаем, что $SL(C_1, \dots, C_k, B_1, \dots, B_t) \subseteq SL(C_1, \dots, C_k, B_1, \dots, B_{t-1}) \subseteq \dots \subseteq SL(C_1, \dots, C_k)$. С другой стороны, $L(C_1, \dots, C_k) \subseteq L(C_1, \dots, C_k, B_1) \subseteq \dots \subseteq L(C_1, \dots, C_k, B_1, \dots, B_t)$. Учитывая предложение 3, получим указанную в теореме цепочку включений. Теорема доказана.

4. О минорно-ранговых столбцах и строках булевой матрицы

Теорема 3. Для любой булевой матрицы A и любого ее столбца A_j найдутся две линейные комбинации минорно-ранговых столбцов $\overset{+}{L} = \overset{+}{L}(A_j)$ и $\bar{L} = \bar{L}(A_j)$ такие, что

$$\overset{+}{L} \cup (\overset{+}{\nabla} M \cap A_j) = \bar{L} \cup (\bar{\nabla} M \cap A_j),$$

где $\overset{\pm}{\nabla} M$ — полуперманенты минорно-рангового блока M матрицы A . Аналогичное утверждение справедливо для строк.

Доказательство. Пусть минорный ранг булевой матрицы $A \in \mathbf{B}_{m \times n}$ равен r и ее минорно-ранговый блок $M = M_{1,2,\dots,r}^{1,2,\dots,r}$ расположен в левом верхнем углу матрицы A . Если это не так, то этого можно добиться за счет перемещения строк и столбцов, что не влияет на дальнейшие рассуждения.

Построим теперь окаймляющий блок $\tilde{M} = M_{1,2,\dots,r,j}^{1,2,\dots,r,i}$ порядка $r+1$, получающийся из блока M добавлением соответствующих элементов, стоящих в матрице A на пересечении ее минорно-ранговых строк, столбцов с произвольно выбранными i -й строкой и j -м столбцом. При этом допускается приписывание минорно-ранговых строк или столбцов, что уже образуют блок M . Таким образом, $i = 1, 2, \dots, m$ и $j = 1, 2, \dots, n$.

Для ориентированных полуперманентов $\overset{+}{\nabla} \tilde{M}$ и $\bar{\nabla} \tilde{M}$ окаймляющего блока $\tilde{M}$ можно выписать разложения по его $(r+1)$ -ой строке в виде

$$\overset{\pm}{\nabla} \tilde{M} = \bigcup_{t=1}^r (A_t^i \cap {}^{t+(r+1)}\overset{\pm}{\sigma}(\bar{\nabla})\partial_t^{r+1} \tilde{M}) \cup (A_j^i \cap {}^{2r+2}\overset{\pm}{\sigma}(\bar{\nabla})\partial_{r+1}^{r+1} \tilde{M}). \quad (1)$$

Здесь символ $\partial_t^{r+1} \tilde{M}$ обозначает матрицу, получаемую из $n \times n$ -матрицы $\tilde{M}$ удалением из нее $(r+1)$ -й строки и t -го столбца матрицы $\tilde{M}$, $t = 1, \dots, r+1$, с сохранением порядка следования остающихся строк и столбцов. Функция знака $\overset{k}{\sigma}$ на ориентированных полуперманентах определяется следующим образом:

$$\overset{k}{\sigma}(\overset{+}{\nabla})\partial_t^{r+1} \tilde{M} = \overset{+}{\nabla}\partial_t^{r+1} \tilde{M}, \quad \overset{k}{\sigma}(\bar{\nabla})\partial_t^{r+1} \tilde{M} = \bar{\nabla}\partial_t^{r+1} \tilde{M},$$

если k четно, и

$$\overset{k}{\sigma}(\overset{+}{\nabla})\partial_t^{r+1} \tilde{M} = \bar{\nabla}\partial_t^{r+1} \tilde{M}, \quad \overset{k}{\sigma}(\bar{\nabla})\partial_t^{r+1} \tilde{M} = \overset{+}{\nabla}\partial_t^{r+1} \tilde{M},$$

если k нечетно.

Заметим, что в равенстве (1), считая выбор j -го столбца матрицы A фиксированным, $j = 1, \dots, n$, а $(r+1)$ -ю строку блока $\tilde{M}$ произвольной i -й строкой, $i = 1, \dots, m$, матрицы A , ориентированные полуперманенты $\overset{\pm}{\nabla}\partial_t^{r+1} \tilde{M}$, $t = 1, \dots, r, r+1$, не зависят от выбора i -й строки. Кроме этого,

$${}^{2r+2}\overset{\pm}{\sigma}(\bar{\nabla})\partial_{r+1}^{r+1} \tilde{M} = \overset{\pm}{\nabla}\partial_{r+1}^{r+1} \tilde{M} = \overset{\pm}{\nabla} M.$$

Следовательно, введя обозначения

$$\sigma^{t+(r+1)}(\nabla) \partial_t^{r+1} \widetilde{M} = \lambda_t^\pm, \quad t = 1, \dots, r,$$

можно записать разложение (1) полуперманентов окаймляющего блока $\widetilde{M}$ в виде

$$\nabla^\pm \widetilde{M} = \bigcup_{t=1}^r (\lambda_t^\pm \cap A_t^i) \cup (\nabla^\pm M \cap A_j^i)$$

для всех $i = 1, \dots, m$. Тогда последние равенства дают следующее равенство для столбцов:

$$\begin{pmatrix} \nabla^\pm \widetilde{M} \\ \dots \\ \nabla^\pm \widetilde{M} \end{pmatrix} = \bigcup_{t=1}^r (\lambda_t^\pm \cap A_t) \cup (\nabla^\pm M \cap A_j) = \bar{L} \cup (\nabla^\pm M \cap A_j),$$

где

$$\bar{L} = \bigcup_{t=1}^r (\lambda_t^\pm \cap A_t)$$

— обозначение соответствующих линейных комбинаций минорно-ранговых столбцов.

Заметим, что $\text{Det } \widetilde{M} = |\nabla^+ \widetilde{M} - \nabla^- \widetilde{M}| = 0$, то есть выполняется равенство

$$\nabla^+ \widetilde{M} = \nabla^- \widetilde{M}.$$

Действительно, это следует из того, что определитель блока $\widetilde{M}$ при условии $i \leq r$ или $j \leq r$ равен нулю, поскольку содержит две одинаковые строки или два одинаковых столбца. При условии же, что $i > r$, $j > r$, блок $\widetilde{M}$ порядка $r + 1$ булевой матрицы A ранга r должен удовлетворять условию $\text{Det } \widetilde{M} = 0$ по определению минорного ранга. Из вышесказанного получаем, что

$$\nabla^+ \bar{L} \cup (\nabla^+ M \cap A_j) = \nabla^- \bar{L} \cup (\nabla^- M \cap A_j). \quad (2)$$

Теорема доказана.

Теорема 4. Для любой булевой матрицы A и любого ее столбца A_j найдутся две линейные комбинации минорно-ранговых столбцов $\nabla^+ \bar{L} = \nabla^+ \bar{L}(A_j)$ и $\nabla^- \bar{L} = \nabla^- \bar{L}(A_j)$ такие, что $|\nabla^+ \bar{L} - \nabla^- \bar{L}| \subseteq A_j \subseteq \nabla^+ \bar{L} \cup \nabla^- \bar{L} \cup (\text{Det } M)'$. Кроме того, справедливы включения $\nabla^+ \bar{L} \subseteq \nabla^+ M \cup \nabla^- \bar{L}$, $\nabla^- \bar{L} \subseteq \nabla^- M \cup \nabla^+ \bar{L}$, где M — минорно-ранговый блок матрицы A . Аналогичное утверждение справедливо для строк.

Доказательство. Пусть $\nabla^+ \bar{L}$ и $\nabla^- \bar{L}$ — линейные комбинации, существование которых для столбца A_j матрицы A утверждается в теореме 3. Рассуждения, которые приводятся ниже, дают систему неравенств для столбца A_j , эквивалентную равенству (2) (символ O означает далее нулевой столбец):

$$\begin{aligned}
& \bar{L}^+ \cup (\bar{\nabla} M \cap A_j) = \bar{L} \cup (\bar{\nabla} M \cap A_j) \longleftrightarrow \begin{cases} \bar{L}^+ \cup (\bar{\nabla} M \cap A_j) \subseteq \bar{L} \cup (\bar{\nabla} M \cap A_j) \\ \bar{L}^+ \cup (\bar{\nabla} M \cap A_j) \supseteq \bar{L} \cup (\bar{\nabla} M \cap A_j) \end{cases} \\
& \longleftrightarrow \begin{cases} [\bar{L}^+ \cup (\bar{\nabla} M \cap A_j)] \cap [\bar{L} \cup (\bar{\nabla} M \cap A_j)]' = O \\ [\bar{L} \cup (\bar{\nabla} M \cap A_j)] \cap [\bar{L}^+ \cup (\bar{\nabla} M \cap A_j)]' = O \end{cases} \\
& \longleftrightarrow \begin{cases} [\bar{L}^+ \cap (\bar{L})' \cap (\bar{\nabla} M \cap A_j)]' \cup [\bar{\nabla} M \cap A_j] \cap (\bar{L})' \cap (\bar{\nabla} M \cap A_j)]' = O \\ [\bar{L} \cap (\bar{L})' \cap (\bar{\nabla} M \cap A_j)]' \cup [\bar{\nabla} M \cap A_j] \cap (\bar{L})' \cap (\bar{\nabla} M \cap A_j)]' = O \end{cases} \\
& \longleftrightarrow \begin{cases} \bar{L}^+ \cap (\bar{L})' \cap (\bar{\nabla} M \cap A_j)' = O \\ (\bar{\nabla} M \cap A_j) \cap (\bar{L})' \cap (\bar{\nabla} M \cap A_j)' = O \\ \bar{L} \cap (\bar{L})' \cap (\bar{\nabla} M \cap A_j)' = O \\ (\bar{\nabla} M \cap A_j) \cap (\bar{L})' \cap (\bar{\nabla} M \cap A_j)' = O \end{cases} \\
& \longleftrightarrow \begin{cases} [\bar{L}^+ \cap (\bar{L})' \cap (\bar{\nabla} M)]' \cup [\bar{L}^+ \cap (\bar{L})' \cap A_j'] = O \\ [\bar{\nabla} M \cap A_j \cap (\bar{L})' \cap (\bar{\nabla} M)]' \cup [\bar{\nabla} M \cap A_j \cap (\bar{L})' \cap A_j'] = O \\ [\bar{L} \cap (\bar{L})' \cap (\bar{\nabla} M)]' \cup [\bar{L} \cap (\bar{L})' \cap A_j'] = O \\ [\bar{\nabla} M \cap A_j \cap (\bar{L})' \cap (\bar{\nabla} M)]' \cup [\bar{\nabla} M \cap A_j \cap (\bar{L})' \cap A_j'] = O \end{cases} \\
& \longleftrightarrow \begin{cases} \bar{L}^+ \cap (\bar{L})' \cap (\bar{\nabla} M)' = O \\ \bar{L}^+ \cap (\bar{L})' \cap A_j' = O \\ \bar{\nabla} M \cap A_j \cap (\bar{L})' \cap (\bar{\nabla} M)' = O \\ \bar{\nabla} M \cap A_j \cap (\bar{L})' \cap A_j' = O \\ \bar{L} \cap (\bar{L})' \cap (\bar{\nabla} M)' = O \\ \bar{L} \cap (\bar{L})' \cap A_j' = O \\ \bar{\nabla} M \cap A_j \cap (\bar{L})' \cap (\bar{\nabla} M)' = O \\ \bar{\nabla} M \cap A_j \cap (\bar{L})' \cap A_j' = O \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} \bar{L}^+ \subseteq \bar{\nabla} M \cup \bar{L} \\ \bar{L}^+ \setminus \bar{L} \subseteq A_j \\ R \text{Det } M \cap (\bar{L})' \subseteq A_j' \\ \bar{L} \subseteq \bar{\nabla} M \cup \bar{L}^+ \\ \bar{L} \setminus \bar{L}^+ \subseteq A_j \\ L \text{Det } M \cap (\bar{L})' \subseteq A_j' \end{cases} \\
& \longleftrightarrow \begin{cases} \bar{L}^+ \subseteq \bar{\nabla} M \cup \bar{L} \\ \bar{L}^+ \setminus \bar{L} \subseteq A_j \\ A_j \subseteq \bar{L} \cup (R \text{Det } M)' \\ \bar{L} \subseteq \bar{\nabla} M \cup \bar{L}^+ \\ \bar{L} \setminus \bar{L}^+ \subseteq A_j \\ A_j \subseteq \bar{L} \cup (L \text{Det } M)' \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\longleftrightarrow \begin{cases} \bar{L}^+ \subseteq \bar{\nabla} M \cup \bar{L} \\ \bar{L} \subseteq \bar{\nabla}^+ M \cup \bar{L}^+ \\ \bar{L} \setminus \bar{L} \cup \bar{L} \setminus \bar{L}^+ \subseteq A_j \subseteq [\bar{L} \cup (R \text{Det } M)'] \cap [\bar{L}^+ \cup (L \text{Det } M)'] \end{cases} \\
&\longleftrightarrow \begin{cases} \bar{L}^+ \subseteq \bar{\nabla} M \cup \bar{L} \\ \bar{L} \subseteq \bar{\nabla}^+ M \cup \bar{L}^+ \\ |\bar{L} - \bar{L}^+| \subseteq A_j \subseteq [\bar{L} \cap \bar{L}^+] \\ \cup [\bar{L} \cap (L \text{Det } M)'] \cup [\bar{L}^+ \cap (R \text{Det } M)'] \cup [(R \text{Det } M)' \cap (L \text{Det } M)'] \end{cases} \\
&\longleftrightarrow \begin{cases} \bar{L}^+ \subseteq \bar{\nabla} M \cup \bar{L} \\ \bar{L} \subseteq \bar{\nabla}^+ M \cup \bar{L}^+ \\ |\bar{L} - \bar{L}^+| \subseteq A_j \subseteq [\bar{L} \cap \bar{L}^+] \cup [\bar{L} \setminus L \text{Det } M] \cup [\bar{L}^+ \setminus R \text{Det } M] \cup (\text{Det } M)' \end{cases} \quad (3)
\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \bar{L}^+ \subseteq \bar{\nabla} M \cup \bar{L} \\ \bar{L} \subseteq \bar{\nabla}^+ M \cup \bar{L}^+ \end{cases} &\longrightarrow \begin{cases} \bar{L}^+ \cap R \text{Det } M \subseteq (\bar{\nabla} M \cup \bar{L}) \cap R \text{Det } M = \bar{L} \cap R \text{Det } M \\ \bar{L} \cap L \text{Det } M \subseteq (\bar{\nabla}^+ M \cup \bar{L}^+) \cap L \text{Det } M = \bar{L}^+ \cap L \text{Det } M \end{cases} \\
&\longleftrightarrow \begin{cases} (\bar{L}^+ \cap R \text{Det } M) \cap (\bar{L} \cap R \text{Det } M)' = O \\ (\bar{L} \cap L \text{Det } M) \cap (\bar{L}^+ \cap L \text{Det } M)' = O \end{cases} \\
&\longleftrightarrow \begin{cases} (\bar{L}^+ \cap R \text{Det } M) \cap ((\bar{L})' \cup (R \text{Det } M)') = O \\ (\bar{L} \cap L \text{Det } M) \cap ((\bar{L}^+)' \cup (L \text{Det } M)') = O \end{cases} \\
&\longleftrightarrow \begin{cases} (\bar{L}^+ \setminus \bar{L}) \cap R \text{Det } M = O \\ (\bar{L} \setminus \bar{L}^+) \cap L \text{Det } M = O \end{cases}
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{cases} (\bar{L}^+ \setminus \bar{L}) \cap R \text{Det } M = \bar{L}^+ \setminus \bar{L} \\ (\bar{L} \setminus \bar{L}^+) \cap L \text{Det } M = \bar{L} \setminus \bar{L}^+ \end{cases}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
[(\bar{L} \cap \bar{L}^+) \setminus R \text{Det } M] \cup [(\bar{L} \cap \bar{L}^+) \setminus L \text{Det } M] &= [(\bar{L} \cap \bar{L}^+)] \cap [(R \text{Det } M)' \cup (L \text{Det } M)'] \\
&= (\bar{L} \cap \bar{L}^+) \cap [R \text{Det } M \cap L \text{Det } M]' \\
&= (\bar{L} \cap \bar{L}^+) \cap O' = \bar{L} \cap \bar{L}^+.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \bar{L} \cup \bar{L}^+ &= (\bar{L}^+ \setminus \bar{L}) \cup (\bar{L} \setminus \bar{L}^+) \cup (\bar{L} \cap \bar{L}^+) \\
 &= [(\bar{L}^+ \setminus \bar{L}) \setminus R \text{Det } M] \cup [(\bar{L} \setminus \bar{L}^+) \setminus L \text{Det } M] \\
 &\quad \cup [(\bar{L} \cap \bar{L}^+) \setminus R \text{Det } M] \cup [(\bar{L} \cap \bar{L}^+) \setminus L \text{Det } M] \\
 &= \{[(\bar{L}^+ \setminus \bar{L}) \setminus R \text{Det } M] \cup [(\bar{L} \cap \bar{L}^+) \setminus R \text{Det } M]\} \\
 &\quad \cup \{[(\bar{L} \setminus \bar{L}^+) \setminus L \text{Det } M] \cup [(\bar{L} \cap \bar{L}^+) \setminus L \text{Det } M]\} \\
 &= \{[(\bar{L}^+ \setminus \bar{L}) \cup (\bar{L} \cap \bar{L}^+)] \setminus R \text{Det } M\} \cup \{[(\bar{L} \setminus \bar{L}^+) \cup (\bar{L} \cap \bar{L}^+)] \setminus L \text{Det } M\} \\
 &= (\bar{L}^+ \setminus R \text{Det } M) \cup (\bar{L} \setminus L \text{Det } M).
 \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что системе условий (3) эквивалентна система

$$\begin{cases} \bar{L}^+ \subseteq \bar{\nabla} M \cup \bar{L} \\ \bar{L} \subseteq \bar{\nabla} M \cup \bar{L}^+ \\ |\bar{L}^+ - \bar{L}| \subseteq A_j \subseteq \bar{L} \cup \bar{L}^+ \cup (\text{Det } M)' \end{cases} \quad (4)$$

Теорема доказана.

Пример 3. Для матрицы

$$\begin{pmatrix} [0; 1] & [-1; -1/2] & [-1; 1] \\ [-1; 1/2] & [0; 1] & [1/2; 1] \\ [0; 1/2] & [0; 1/2] & (-1/2; 0] \end{pmatrix}$$

с элементами из булевой алгебры всех подмножеств множества действительных чисел полуперманенты равны

$$\bar{\nabla}^{\pm} A = [0; 1/2].$$

Минорно-ранговый блок

$$M = M_{1,3}^{1,2} = \begin{pmatrix} [0; 1] & [-1; 1] \\ [-1; 1/2] & [1/2; 1] \end{pmatrix}$$

имеет полуперманенты

$$\bar{M}^+ = [1/2; 1], \quad \bar{M}^- = [-1; 1/2],$$

а его определитель равняется

$$\text{Det } M = [-1; 1] \setminus \{1/2\}.$$

Следовательно,

$$(\text{Det } M)' = (-\infty; -1) \cup \{1/2\} \cup (1; \infty).$$

Окаймляющий минор для $M = M_{1,3}^{1,2}$ есть

$$M_{1,3,2}^{1,2,3} = \begin{pmatrix} [0; 1] & [-1; 1] & [-1; -1/2] \\ [-1; 1/2] & [1/2; 1] & [0; 1] \\ [0; 1/2] & (-1/2; 0] & [0; 1/2] \end{pmatrix}.$$

Найдем коэффициенты линейных комбинаций и сами линейные комбинации, упоминаемые в теореме 3:

$$\begin{aligned} \overset{+}{L} &= (\overset{+}{\lambda}_1 \cap A_1) \cup (\overset{+}{\lambda}_2 \cap A_3) = \left([0; 1] \cap \begin{pmatrix} [0; 1] \\ [-1; 1/2] \\ [0; 1/2] \end{pmatrix} \right) \cup \left([-1; -1/2] \cap \begin{pmatrix} [-1; 1] \\ [1/2; 1] \\ (-1/2; 0] \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} [-1; -1/2] \cup [0; 1] \\ [0; 1/2] \\ [0; 1/2] \end{pmatrix}, \\ \bar{L} &= (\bar{\lambda}_1 \cap A_1) \cup (\bar{\lambda}_2 \cap A_3) = \left(\emptyset \cap \begin{pmatrix} [0; 1] \\ [-1; 1/2] \\ [0; 1/2] \end{pmatrix} \right) \cup \left([0; 1] \cap \begin{pmatrix} [-1; 1] \\ [1/2; 1] \\ (-1/2; 0] \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} [0; 1] \\ [1/2; 1] \\ \{0\} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\bar{L} - \overset{+}{L}| &= (\bar{L} \setminus \overset{+}{L}) \cup (\overset{+}{L} \setminus \bar{L}) = \left| \begin{pmatrix} [-1; -1/2] \cup [0; 1] \\ [0; 1/2] \\ [0; 1/2] \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} [0; 1] \\ [1/2; 1] \\ \{0\} \end{pmatrix} \right| \\ &= \begin{pmatrix} [-1; -1/2] \\ [0; 1/2] \cup (1/2; 1] \\ (0; 1/2] \end{pmatrix} \subseteq A_2 = \begin{pmatrix} [-1; -1/2] \\ [0; 1] \\ [0; 1/2] \end{pmatrix} \subseteq \bar{L} \cup \overset{+}{L} \\ &= \begin{pmatrix} [0; 1] \\ [1/2; 1] \\ \{0\} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} [-1; -1/2] \cup [0; 1] \\ [0; 1/2] \\ [0; 1/2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-1; -1/2] \cup [0; 1] \\ [0; 1] \\ [0; 1/2] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что условия теоремы 3 выполнены, причем неравенства выполняются строго.

Если булева матрица A такова, что каждый ее элемент не превосходит определителя ее выбранного минорно-рангового блока M , то

$$\overset{+}{L} = \overset{+}{L} \cap \text{Det } M, \quad \bar{L} = \bar{L} \cap \text{Det } M$$

для линейных комбинаций $\overset{+}{L}, \bar{L}$, описанных в теоремах 3 и 4, поэтому

$$\begin{aligned} \overset{+}{L} \subseteq \bar{\nabla} M \cup \bar{L} &\longleftrightarrow \overset{+}{L} \subseteq L \text{Det } M \cup \bar{L}, \\ \bar{L} \subseteq \overset{+}{\nabla} M \cup \overset{+}{L} &\longleftrightarrow \bar{L} \subseteq R \text{Det } M \cup \overset{+}{L}. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$A_j \cap (\text{Det } M)' = 0.$$

Указанные в теореме 4 условия (4) принимают вид

$$\begin{aligned} \bar{L}^+ &\subseteq L \text{ Det } M \cup \bar{L}^-, \\ \bar{L}^- &\subseteq R \text{ Det } M \cup \bar{L}^+, \\ |\bar{L}^+ - \bar{L}^-| &\subseteq A_j \subseteq \bar{L}^- \cup \bar{L}^+, \end{aligned}$$

которые выполняются для некоторых линейных комбинаций $\bar{L}^+$, $\bar{L}^-$ минорно-ранговых столбцов (строк) и любого столбца A_j (или строки, соответственно) этой булевой матрицы A . Очевидно, это заведомо выполнено, когда элементы матрицы выбираются из булевой алгебры $\mathbf{B}_2 = \{0, 1\}$. Более того, выполняется либо

$$\begin{cases} \bar{L}^+ \subseteq 0 \cup \bar{L}^- \\ \bar{L}^- \subseteq 1 \cup \bar{L}^+ \end{cases}$$

либо

$$\begin{cases} \bar{L}^+ \subseteq 1 \cup \bar{L}^- \\ \bar{L}^- \subseteq 0 \cup \bar{L}^+ \end{cases}$$

то есть выполняется либо

$$\begin{cases} \bar{L}^+ \subseteq \bar{L}^- \\ \bar{L}^- \setminus \bar{L}^+ \subseteq A_j \subseteq \bar{L}^- \end{cases}$$

либо

$$\begin{cases} \bar{L}^- \subseteq \bar{L}^+ \\ \bar{L}^+ \setminus \bar{L}^- \subseteq A_j \subseteq \bar{L}^+ \end{cases}$$

Следовательно, эквивалентность условий (2) и (4) становится для $(0, 1)$ -матриц совсем очевидной:

$$\bar{L}^+ \cup A_j = \bar{L}^- \longleftrightarrow \begin{cases} \bar{L}^+ \subseteq \bar{L}^- \\ \bar{L}^- \setminus \bar{L}^+ \subseteq A_j \subseteq \bar{L}^- \end{cases}$$

или

$$\bar{L}^- \cup A_j = \bar{L}^+ \longleftrightarrow \begin{cases} \bar{L}^- \subseteq \bar{L}^+ \\ \bar{L}^+ \setminus \bar{L}^- \subseteq A_j \subseteq \bar{L}^+ \end{cases}$$

Тогда теорема 3 в случае булевой алгебры $\mathbf{B}_2 = \{0, 1\}$ будет формулироваться следующим образом: в любой $(0, 1)$ -матрице A всякий столбец A_j (или строка) обладает двумя такими линейными комбинациями $L_1(j)$, $L_2(j)$ минорно-ранговых столбцов (или строк), что

$$L_1(j) \cup A_j = L_2(j).$$

Как очевидное следствие теорем 3 и 4, получаем следующее утверждение.

Теорема 5. Если определитель квадратной $(0, 1)$ -матрицы равен нулю, то объединение столбца, не входящего в некоторый список минорно-ранговых столбцов, с некоторой линейной комбинацией всех остальных столбцов данной матрицы есть линейная комбинация этих остальных столбцов. Аналогичное утверждение справедливо для строк.

Замечание 2. Утверждение, обратное теореме 5, не выполняется. Примером тому может служить матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Объединение любого ее столбца с нетривиальной линейной комбинацией оставшихся двух столбцов есть линейная комбинация этих двух столбцов. Кроме этого, ни один из столбцов не является линейной комбинацией остальных двух столбцов. Однако $\text{Det } A = 1$.

5. Приложения к матричным уравнениям и неравенствам

Теорема 6. Пусть A — булева матрица размера $m \times n$ и B — столбец размера $m \times 1$ над булевой алгеброй $\mathbf{B}_2 = \{0, 1\}$, тогда уравнение

$$A \sqcap X = (A \sqcap Y) \cup B,$$

где X, Y — столбцы неизвестных, имеет решение, если столбец $B \in SL(A_1 \dots A_n)$, то есть он не увеличивает ранга матрицы A .

Доказательство. Будем считать, что $A_1, \dots, A_r$ являются минорно-ранговыми столбцами матрицы $A = (A_1 \dots A_r A_{r+1} \dots A_n)$, составленной из подматриц $\tilde{A} = (A_1 \dots A_r)$ и $\tilde{\tilde{A}} = (A_{r+1} \dots A_n)$, то есть $A = (\tilde{A} \mid \tilde{\tilde{A}})$, и при этом $\text{rank } A = r < n$. Так как $\text{rank}(A_1 \dots A_r A_{r+1} \dots A_n) = \text{rank}(A_1 \dots A_r)$, в силу теоремы 2 из включения $B \in SL(A_1, \dots, A_r, A_{r+1}, \dots, A_n)$ следует, что $B \in SL(A_1, \dots, A_r)$. Это означает, что $A_1, \dots, A_r$ — минорно-ранговые столбцы в матрице $(BA_1 \dots A_r)$ и столбец B удовлетворяет утверждению теоремы 3, которое можно сформулировать как утверждение о существовании таких столбцов $\tilde{X}, \tilde{Y}$, что

$$\tilde{A} \sqcap \tilde{X} = (\tilde{A} \sqcap \tilde{Y}) \cup B.$$

Тогда

$$(\tilde{A} \sqcap \tilde{X}) \cup (\tilde{\tilde{A}} \sqcap O) = [(\tilde{A} \sqcap \tilde{Y}) \cup (\tilde{\tilde{A}} \sqcap O)] \cup B$$

или

$$(\tilde{A} \mid \tilde{A}) \sqcap \left(\frac{\tilde{X}}{O} \right) = (\tilde{A} \mid \tilde{A}) \sqcap \left(\frac{\tilde{Y}}{O} \right) \cup B.$$

Получаем, что

$$X = \left(\frac{\tilde{X}}{O} \right), \quad Y = \left(\frac{\tilde{Y}}{O} \right)$$

суть решения уравнения $A \sqcap X = (A \sqcap Y) \cup B$.

Теорема 7. Пусть A — булева матрица размера $t \times n$ и B — столбец размера $t \times 1$ над булевой алгеброй $\mathbf{B}_2 = \{0, 1\}$, тогда система матричных неравенств

$$|A \sqcap X - A \sqcap Y| \subseteq B \subseteq A \sqcap (X \cup Y),$$

где X, Y — столбцы неизвестных, имеет решение, если столбец $B \in SL(A_1 \dots A_n)$, то есть он не увеличивает ранга матрицы A .

Доказательство. Используя обозначения, применяемые при доказательства предыдущей теоремы, из теоремы 4 для случая булевой алгебры $\mathbf{B}_2 = \{0, 1\}$ получаем, что существуют такие столбцы $\tilde{X}, \tilde{Y}$, что

$$|\tilde{A} \sqcap \tilde{X} - \tilde{A} \sqcap \tilde{Y}| \subseteq B \subseteq \tilde{A} \sqcap (\tilde{X} \cup \tilde{Y}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & |((\tilde{A} \sqcap \tilde{X}) \cup (\tilde{A} \sqcap O)) - ((\tilde{A} \sqcap \tilde{Y}) \cup (\tilde{A} \sqcap O))| \subseteq B \subseteq (\tilde{A} \sqcap (\tilde{X} \cup \tilde{Y})) \cup (\tilde{A} \sqcap O) \\ & = (\tilde{A} \sqcap \tilde{X}) \cup (\tilde{A} \sqcap \tilde{Y}) \cup (\tilde{A} \sqcap O) = ((\tilde{A} \sqcap \tilde{X}) \cup (\tilde{A} \sqcap O)) \cup ((\tilde{A} \sqcap \tilde{Y}) \cup (\tilde{A} \sqcap O)). \end{aligned}$$

Здесь применяются формулы дистрибутивности, которые, как легко проверить, выполняются с двух сторон для любых булевых матриц P, R и S подходящего размера:

$$\begin{aligned} P \sqcap (R \cup S) &= (P \sqcap R) \cup (P \sqcap S), \\ (P \cup R) \sqcap S &= (P \sqcap S) \cup (R \sqcap S). \end{aligned}$$

Окончательно получаем, что

$$\left| (\tilde{A} \mid \tilde{A}) \sqcap \left(\frac{\tilde{X}}{O} \right) - (\tilde{A} \mid \tilde{A}) \sqcap \left(\frac{\tilde{Y}}{O} \right) \right| \subseteq B \subseteq \left((\tilde{A} \mid \tilde{A}) \sqcap \left(\frac{\tilde{X}}{O} \right) \right) \cup \left((\tilde{A} \mid \tilde{A}) \sqcap \left(\frac{\tilde{Y}}{O} \right) \right),$$

что и требовалось показать.

Теорема 8. Пусть A — булева матрица размера $t \times n$ и B — столбец размера $t \times 1$ над булевой алгеброй $\mathbf{B}_2 = \{0, 1\}$, тогда матричное неравенство $B \subseteq A \sqcap X$, где X — столбец неизвестных, имеет решение, если столбец $B \in SL(A_1 \dots A_n)$, то есть он не увеличивает ранга матрицы A .

Доказательство. Пусть столбец $B \in SL(A_1 \dots A_n)$. Тогда по теореме 6 система матричных неравенств

$$|A \sqcap X - A \sqcap Y| \subseteq B \subseteq A \sqcap (X \cup Y),$$

где X, Y — столбцы неизвестных, имеет решение. Следовательно, неравенство $B \subseteq A \sqcap (X \cup Y)$ имеет решение. Переобозначив столбец неизвестных $(X \cup Y)$ через X , получаем, что матричное неравенство $B \subseteq A \sqcap X$ имеет решение, если столбец B не увеличивает ранга матрицы A .

Следующие примеры показывают, что в случаях, когда столбец B увеличивает ранг матрицы A , возможны как совместность, так и несовместность матричного неравенства $B \subseteq A \sqcap X$.

Пример 4. Очевидно, что любой ненулевой столбец $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ является решением неравенства

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sqcap \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \supseteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

для матриц с элементами из $\mathbf{B}_2$. Однако, столбец $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ увеличивает ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Неравенство

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sqcap \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \supseteq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

не имеет решения, и столбец $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ увеличивает ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Теорема 9. Пусть A и B — булевы матрицы размеров $m \times n$ и $m \times k$ соответственно и C — столбец размера $m \times 1$ над $\mathbf{B}_2 = \{0, 1\}$ такие, что система m линейных уравнений с $n + k$ неизвестными, записываемая в матричной форме как

$$(A \sqcap X) \cup (B \sqcap Y) = C,$$

имеет решение. Тогда матричное неравенство $C \subseteq A \sqcap Z$, где Z — столбец неизвестных, имеет решение, если столбцы матрицы B не увеличивали ранга матрицы A .

Доказательство. Из условия теоремы получаем, что $C \in L(A_1 \dots A_n B_1 \dots B_k)$. По теореме 2, справедливо включение $L(A_1 \dots A_n B_1 \dots B_k) \subseteq SL(A_1 \dots A_n)$. Таким образом, $C \in SL(A_1 \dots A_n)$, то есть C не увеличивает ранга матрицы A . Тогда неравенство $C \subseteq A \sqcap Z$ имеет решение.

Замечание 3. Как было отмечено выше, матричное неравенство $B \subseteq A \sqcap X$, в котором A и B — булевы матрицы произвольного согласованного размера, может быть совместным или несовместным, в отличие от $B \supseteq A \sqcap X$. Известно (см. [7], §1 в гл. 7 в [3]), что матричное неравенство $A \sqcap X \subseteq B$ эквивалентно матричному неравенству $X \subseteq (A^T \sqcap B')'$, то есть всегда совместно. Если определить конъюнктивное произведение $A \sqcap B$ матриц согласованных размеров дуально определенному выше дизъюнктивному произведению $A \sqcup B$ формулой

$$A \sqcup B = (A' \sqcap B')',$$

то получаем, что

$$A \sqcap X \subseteq B \iff X \subseteq (A^T)' \sqcup B.$$

Аналогично,

$$X \sqcap A \subseteq B \longleftrightarrow X \subseteq B \sqcup (A^T)'$$

Очевидно, это обобщает на булевы матрицы известную эквивалентность

$$a \cap x \subseteq b \longleftrightarrow x \subseteq a' \cup b,$$

которая справедлива для элементов a , b и x произвольной булевой алгебры.

6. Свойства матриц с нулевым определителем

Любая квадратная матрица A может быть представлена в виде объединения

$$A = \check{A} \cup \mathring{A} \cup \hat{A}$$

внешней, детерминантной и внутренней частей, которые получаются, как пересечения

$$\check{A} = (\text{Per } A)' \cap A, \quad \mathring{A} = \text{Det } A \cap A, \quad \hat{A} = \Delta A \cap A.$$

Известно [5], что перманенты этих частей удовлетворяют равенствам

$$\text{Per } \check{A} = 0, \quad \text{Per } \mathring{A} = \text{Det } \mathring{A} = \text{Det } A, \quad \text{Per } \hat{A} = \overset{+}{\nabla} \hat{A} = \bar{\nabla} \hat{A} = \Delta \hat{A} = \Delta A.$$

Очевидно, выполняются равенства, дающие дизъюнктивные перманентные разложения, разложения общей части и определителя матрицы A :

$$\text{Per } A = \text{Per } \check{A} \cup \text{Per } \mathring{A} \cup \text{Per } \hat{A},$$

$$\Delta A = \Delta \check{A} \cup \Delta \mathring{A} \cup \Delta \hat{A},$$

$$\text{Det } A = \text{Det } \check{A} \cup \text{Det } \mathring{A} \cup \text{Det } \hat{A},$$

при этом

$$\Delta \check{A} = \Delta \mathring{A} = \text{Det } \check{A} = \text{Det } \hat{A} = 0.$$

Определение 4. Ненулевую матрицу A назовем внешней (или внешностью), если $A = \check{A}$, детерминантной, если $A = \mathring{A}$ и внутренней (или внутренностью), если $A = \hat{A}$. Матрицу $\check{A} \cup \hat{A}$ назовем вырожденной частью матрицы A .

Нулевая матрица считается внешней, детерминантной и внутренней одновременно.

Для детерминантной матрицы выполняется равенство

$$\mathring{A} = \text{Det } \mathring{A} \cap \mathring{A},$$

а для внутренней матрицы — равенство

$$\hat{A} = \Delta \hat{A} \cap \hat{A}.$$

Следующая теорема, доказательство которой можно найти в [5], указывает на однозначность разложения матрицы A на внешнюю, детерминантную и внутреннюю части.

Теорема 10. Если B — внешняя, C — детерминантная и D — внутренняя матрицы, причем

$$B \subseteq (\text{Det } C \cup \Delta D)' \cap B, \quad \text{Det } C \cap \Delta D = 0,$$

то для внешней, детерминантной и внутренней частей матрицы $A = B \cup C \cup D$ выполняются равенства

$$\check{A} = B, \quad \overset{\circ}{A} = C, \quad \hat{A} = D.$$

Отметим, что для матриц над двухэлементной булевой алгеброй $\mathbf{B}_2 = \{0, 1\}$ проблема разложения выглядит проще. Возможен один из вариантов: любая $(0, 1)$ -матрица является либо внешней, либо детерминантной, либо внутренней.

Внешняя ненулевая булева матрица определяется как матрица, перманент которой равен нулю. Такие матрицы над различными полукольцами хорошо описаны и играют значительную роль в комбинаторной математике. Строчение такой матрицы описывается следующей известной теоремой Фробениуса–Кёнига, доказательство которой приводится, например, в §4 гл. 7 в [8] и в §2 гл. 3 в [9] для неотрицательных матриц, и его можно дословно повторить для случая матриц с элементами из булевой алгебры $\mathbf{B}_2 = \{0, 1\}$.

Теорема 11. Перманент квадратной матрицы над двухэлементной булевой алгеброй $\mathbf{B}_2$ равен нулю тогда и только тогда, когда в результате перестановок строк или столбцов этой матрицы можно получить нулевую подматрицу размера $s \times t$ с условием $s + t = n + 1$.

Следующая теорема перечисляет свойства множества всевозможных внешних матриц одного размера.

Теорема 12. Следующие свойства внешностей выполняются для любых булевых матриц A, B и элемента $\lambda \in \mathbf{B}$:

- (1) $\check{J} = \check{O} = O$;
- (2) $\check{A} \subseteq A$;
- (3) $\check{\check{A}} = \check{A}$;
- (4) если $A \subseteq B = \check{B}$, то $A = \check{A}$;
- (5) $\overbrace{\check{A} \cap \check{B}} = \check{A} \cap \check{B} \subseteq \overbrace{A \cap B}$;
- (6) $\overbrace{\lambda \cap \check{A}} = \lambda \cap \check{A} = \overbrace{\lambda \cap A}$;
- (7) если $A \cap B = \overbrace{A \cap B}$, то $A \cap B = \overbrace{A \cap B}$;
- (8) $\overbrace{A \cap B} \subseteq (\check{A} \cap B) \cup (A \cap \check{B}) \subseteq A \cap B$.

Доказательство. Равенство п. 1 проверяется непосредственно. Свойство 2 следует из определения внутренности. Справедливость свойства 3 следует из тождества

$$\text{Per}(\lambda \cap A) = \lambda \cap \text{Per } A$$

и равенств

$$\check{A} = \check{A} \cap (\text{Per } \check{A})' = A \cap (\text{Per } A)' \cap (\text{Per}(A \cap (\text{Per } A)'))' = A \cap (\text{Per } A)' = \check{A}.$$

Для доказательства свойства 4 заметим, что из соотношения $A \subseteq B = \check{B}$ следует, что

$$\text{Per } A \subseteq \text{Per } B = \text{Per } \check{B} = 0.$$

Поэтому $A = \check{A}$.

Докажем свойство 5. Прежде всего заметим, что из свойства 2 следует, что

$$\overbrace{\check{A} \cap \check{B}}^{\check{A} \cap \check{B}} \subseteq \check{A} \cap \check{B}.$$

Учитывая, что включение $C \subseteq D$ для любых матриц C, D влечет включение $\text{Per } C \subseteq \text{Per } D$, получаем, что

$$\text{Per } C \cup \text{Per } D \supseteq \text{Per } C \cap \text{Per } D \supseteq \text{Per}(C \cap D).$$

Тогда

$$(\text{Per } C)' \cap (\text{Per } D)' = (\text{Per } C \cup \text{Per } D)' \subseteq (\text{Per } C \cap \text{Per } D)' \subseteq (\text{Per}(C \cap D))'.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \overbrace{\check{A} \cap \check{B}}^{\check{A} \cap \check{B}} &= (\check{A} \cap \check{B}) \cap (\text{Per}(\check{A} \cap \check{B}))' \supseteq (\check{A} \cap \check{B}) \cap (\text{Per } \check{A})' \cap (\text{Per } \check{B})' \\ &= \check{A} \cap \check{B} = \check{A} \cap \check{B}, \end{aligned}$$

и, следовательно, равенство $\overbrace{\check{A} \cap \check{B}}^{\check{A} \cap \check{B}} = \check{A} \cap \check{B}$ доказано. Кроме того,

$$\check{A} \cap \check{B} \subseteq \overbrace{\check{A} \cap B}^{\check{A} \cap B},$$

так как

$$\check{A} \cap \check{B} = A \cap (\text{Per } A)' \cap B \cap (\text{Per } B)' \subseteq (A \cap B) \cap (\text{Per}(A \cap B))' = \overbrace{\check{A} \cap B}^{\check{A} \cap B}.$$

Свойство 6 получается из того, что

$$\text{Per}(\lambda \cap A) = \lambda \cap \text{Per } A.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \overbrace{\lambda \cap A}^{\lambda \cap A} &= (\lambda \cap A) \cap (\text{Per}(\lambda \cap A))' = \lambda \cap A \cap (\lambda \cap \text{Per } A)' \\ &= \lambda \cap A \cap (\lambda' \cup (\text{Per } A)') = \lambda \cap A \cap (\text{Per } A)' = \lambda \cap \check{A}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\lambda \cap \check{A} \subseteq \check{A},$$

и, в силу доказанного свойства 4,

$$\overbrace{\lambda \cap \check{A}} = \lambda \cap \check{A}.$$

Проверим свойство 7. Если

$$A \sqcap B = \overbrace{A \sqcap B},$$

то $\text{Per}(A \sqcap B) = 0$. Учитывая, что

$$\text{Per}(A \sqcap B) \supseteq \text{Per } A \cap \text{Per } B \supseteq \text{Per}(A \cap B),$$

получаем равенство

$$\text{Per}(A \cap B) = 0.$$

Это означает, что

$$A \cap B = \overbrace{A \cap B}.$$

Свойство 8 получим, используя неравенство

$$(\text{Per}(A \sqcap B))' \subseteq (\text{Per } A \cap \text{Per } B)'$$

или

$$(\text{Per}(A \sqcap B))' \subseteq (\text{Per } A)' \cup (\text{Per } B)'.$$

Тогда

$$A \cap (\text{Per}(A \sqcap B))' \subseteq A \cap ((\text{Per } A)' \cup (\text{Per } B)') = \check{A} \cup (A \cap (\text{Per } B)').$$

Умножая последнее неравенство справа на матрицу B , находим, что

$$(A \cap (\text{Per}(A \sqcap B))') \sqcap B \subseteq (\check{A} \cup (A \cap (\text{Per } B)')) \sqcap B.$$

или

$$(\text{Per}(A \sqcap B))' \cap (A \sqcap B) \subseteq (\check{A} \cup (A \cap (\text{Per } B)')) \sqcap B.$$

Учитывая дистрибутивность произведения относительно объединения матриц, получим включение

$$\overbrace{A \sqcap B} \subseteq (\check{A} \sqcap B) \cup ((A \cap (\text{Per } B)') \sqcap B).$$

Используя тождество

$$(\lambda \cap A) \sqcap B = A \sqcap (\lambda \cap B) = (\lambda \cap A) \sqcap (\lambda \cap B),$$

получаем, что

$$\overbrace{A \sqcap B} \subseteq (\check{A} \sqcap B) \cup (A \sqcap \check{B}).$$

С другой стороны, так как $\check{A} \subseteq A$,

$$\check{A} \sqcap B \subseteq A \sqcap B.$$

Аналогично,

$$A \sqcap \check{B} \subseteq A \sqcap B.$$

Поэтому

$$(\check{A} \sqcap B) \cup (A \sqcap \check{B}) \subseteq A \sqcap B.$$

Теорема доказана.

Здесь и далее существенно используются изотонность перманента и его свойства, а также свойства произведения булевых матриц, которые более полно представлены в [2, 5, 6].

Теорема 13. Пусть $\check{\mathbf{B}}_{n \times n}$ — множество всех внешних булевых матриц размера $n \times n$. Тогда

- (1) $\check{\mathbf{B}}_{n \times n}$ — нижняя (минорантная) полурешетка с наименьшим элементом O ;
- (2) главный идеал булевой алгебры $\mathbf{B}_{n \times n}$, порожденный внешней матрицей, является главным идеалом и в $\check{\mathbf{B}}_{n \times n}$.

Доказательство. Свойства 1 и 5 из теоремы 12 указывают на то, что множество всех внешностей образует нижнюю (минорантную) полурешетку с минимальным элементом $O = \check{O}$. Свойство 4 означает, что множество всех внешностей вложено нормально в булеву алгебру квадратных матриц $\mathbf{B}_{n \times n}$ в терминологии [10]. Получаем, что всякая внешняя матрица $A = \check{A}$ порождает главный идеал

$$[O; A] = \{B: B \subseteq A = \check{A}\},$$

который состоит из внешностей. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь внутренние матрицы. Матрица является внутренней тогда и только тогда, когда $\text{Per } A \sqcap A = A$ и перманент и полуперманенты совпадают:

$$\text{Per } A = \overset{+}{\nabla} A = \bar{\nabla} A = \Delta A.$$

Как будет показано далее, внутренности образуют верхнюю (мажорантную) полурешетку с наибольшим элементом J и полукольцо с аддитивной операцией $\cup$ и мультипликативной операцией $\sqcap$. Кроме того, множество всех внутренностей замкнуто относительно взятия линейных комбинаций и, следовательно, любой многочлен от внутренних матриц $f(A) = \bigcup_{i=0}^k (\lambda_i \cap A^{n_i})$ является внутренним.

Теорема 14. Следующие свойства внутренностей выполняются для любых булевых матриц A, B и элемента $\lambda \in \mathbf{B}$:

- (1) $\hat{O} = O, \hat{J} = J$;
- (2) $\hat{A} \subseteq A$;
- (3) $\hat{\hat{A}} = \hat{A}$;
- (4) если $A \subseteq B$, то $\hat{A} \subseteq \hat{B}$;

$$(5) \widehat{\hat{A} \cap \hat{B}} = \widehat{\hat{A} \cap B} = \widehat{A \cap \hat{B}} = \widehat{A \cap B} \subseteq \hat{A} \cap \hat{B};$$

$$(6) \widehat{\hat{A} \cup \hat{B}} = \hat{A} \cup \hat{B} \subseteq \widehat{A \cup B};$$

$$(7) \widehat{\lambda \cap \hat{A}} = \lambda \cap \hat{A} = \widehat{\lambda \cap A};$$

$$(8) \widehat{\hat{A} \sqcap \hat{B}} = \hat{A} \sqcap \hat{B} \subseteq \widehat{A \sqcap B}.$$

Доказательство. Свойство 1 верно, так как

$$\hat{O} = \Delta O \cap O = O \cap O = O,$$

$$\hat{J} = \Delta J \cap J = 1 \cap J = J.$$

Свойство 2 следует из определения внутренности.

Свойство 3 проверяется непосредственно:

$$\hat{\hat{A}} = \Delta \hat{A} \cap \hat{A} = \Delta \hat{A} \cap (\Delta A \cap A) = \Delta A \cap A = \hat{A}.$$

Справедливость свойства 4 следует из того, что включение $A \subseteq B$ влечет включение $\Delta A \subseteq \Delta B$. Следовательно, $A \cap \Delta A \subseteq B \cap \Delta B$, то есть $\hat{A} \subseteq \hat{B}$.

Для проверки справедливости свойства 5 заметим, что из свойств 2 и 4 следует, что $\widehat{\hat{A} \cap \hat{B}} \subseteq \widehat{A \cap B}$. С другой стороны, $\Delta(A \cap B) \subseteq \Delta A \cap \Delta B$. Поэтому

$$\widehat{A \cap B} = \Delta(A \cap B) \cap (A \cap B) \subseteq \Delta A \cap \Delta B \cap A \cap B = \hat{A} \cap \hat{B}.$$

Таким образом, справедлива цепочка включений

$$\widehat{\hat{A} \cap \hat{B}} \subseteq \widehat{A \cap B} \subseteq \hat{A} \cap \hat{B},$$

из которой и свойства 4 следует, что

$$\widehat{\widehat{\hat{A} \cap \hat{B}}} \subseteq \widehat{\widehat{A \cap B}} \subseteq \widehat{\hat{A} \cap \hat{B}}.$$

Применяя к последнему выражению свойство 3, получаем равенство

$$\widehat{\hat{A} \cap \hat{B}} = \hat{A} \cap \hat{B}.$$

Равенства

$$\widehat{\hat{A} \cap B} = \widehat{A \cap \hat{B}} = \widehat{A \cap B}$$

доказываются аналогично.

Свойство 6 следует из того, что

$$\begin{aligned} \hat{A} \cup \hat{B} &\supseteq \widehat{\hat{A} \cup \hat{B}} = \Delta(\hat{A} \cup \hat{B}) \cap (\hat{A} \cup \hat{B}) \supseteq (\Delta \hat{A} \cup \Delta \hat{B}) \cap (\hat{A} \cup \hat{B}) \\ &\supseteq (\Delta \hat{A} \cap \hat{A}) \cup (\Delta \hat{B} \cap \hat{B}) = (\Delta A \cap A) \cup (\Delta B \cap B) = \hat{A} \cup \hat{B}. \end{aligned}$$

Проверим выполнение свойства 7. Так как $\Delta(\lambda \cap A) = \lambda \cap \Delta A$,

$$\widehat{\lambda \cap A} = \Delta(\lambda \cap A) \cap (\lambda \cap A) = (\lambda \cap \Delta A \cap A) = \lambda \cap \hat{A}.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda \cap \hat{A}} &= \Delta(\lambda \cap \hat{A}) \cap (\lambda \cap \hat{A}) = (\lambda \cap \Delta \hat{A}) \cap (\lambda \cap \Delta A \cap A) \\ &= \lambda \cap \Delta A \cap A = \lambda \cap \hat{A}.\end{aligned}$$

Для доказательства свойства 8 сначала покажем, что для всех матриц A и B выполняется неравенство $\Delta A \cap \Delta B \subseteq \Delta(A \sqcap B)$. Для этого воспользуемся известными формулами для полуперманентов (см., например, [11] или §19 в [12]):

$$\begin{aligned}(\overset{+}{\nabla} A \cap \overset{+}{\nabla} B) \cup (\bar{\nabla} A \cap \bar{\nabla} B) &\subseteq \overset{+}{\nabla}(A \sqcap B), \\ (\bar{\nabla} A \cap \overset{+}{\nabla} B) \cup (\overset{+}{\nabla} A \cap \bar{\nabla} B) &\subseteq \bar{\nabla}(A \sqcap B).\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}(\overset{+}{\nabla} A \cap \overset{+}{\nabla} B) \cap (\bar{\nabla} A \cap \bar{\nabla} B) &\subseteq \overset{+}{\nabla}(A \sqcap B), \\ (\bar{\nabla} A \cap \overset{+}{\nabla} B) \cap (\overset{+}{\nabla} A \cap \bar{\nabla} B) &\subseteq \bar{\nabla}(A \sqcap B).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Delta A \cap \Delta B \subseteq \overset{+}{\nabla}(A \sqcap B)$$

и

$$\Delta A \cap \Delta B \subseteq \bar{\nabla}(A \sqcap B).$$

Таким образом,

$$\Delta A \cap \Delta B \subseteq \Delta(A \sqcap B).$$

Учитывая тождество

$$\lambda \cap (A \sqcap B) = (\lambda \cap A) \sqcap B = A \sqcap (\lambda \cap B) = (\lambda \cap A) \sqcap (\lambda \cap B),$$

получаем, что

$$\begin{aligned}\widehat{A \sqcap B} &= \Delta(A \sqcap B) \cap (A \sqcap B) \supseteq (\Delta A \cap \Delta B) \cap (A \sqcap B) \\ &= (\Delta A \cap A) \cap (\Delta B \cap B) = \hat{A} \sqcap \hat{B}.\end{aligned}$$

Последнее соотношение справедливо, в частности, для внутренних матриц $A = \hat{A}$ и $B = \hat{B}$. Поэтому

$$\widehat{\hat{A} \sqcap \hat{B}} \supseteq \hat{A} \sqcap \hat{B} = \hat{A} \sqcap \hat{B}.$$

С другой стороны, верно обратное включение (свойство 2). Следовательно, выполняется равенство

$$\widehat{\hat{A} \sqcap \hat{B}} = \hat{A} \sqcap \hat{B}$$

для любых квадратных булевых матриц A и B .

Теорема 15. *Внутренность квадратной булевой матрицы есть наибольшая из всех внутренних матриц, содержащихся в этой матрице.*

Доказательство. Пусть существует внутренняя матрица $\hat{B}$ и $\hat{A} \subseteq \hat{B} \subseteq A$. Из свойства 4 теоремы 14 получаем, что $\hat{A} \subseteq \hat{\hat{B}} \subseteq \hat{A}$, а учитывая свойство 3, находим, что $\hat{A} = \hat{\hat{B}}$.

Теорема 16. Пусть $\hat{\mathbf{B}}_{n \times n}$ — множество всех внутренних булевых матриц размера $n \times n$. Тогда

- (1) $\hat{\mathbf{B}}_{n \times n}$ — верхняя (мажорантная) полурешетка с наибольшим элементом J ;
- (2) $\hat{\mathbf{B}}_{n \times n}$ — полукольцо с аддитивной операцией $\cup$ и мультипликативной операцией $\sqcap$;
- (3) $\hat{\mathbf{B}}_{n \times n}$ — полумодуль над булевой алгеброй $\mathbf{B}$.

Доказательство. Первое утверждение сразу следует из свойств 1 и 6 теоремы 14.

Второе утверждение следует из свойств 6, 8 этой же теоремы и выполнения дистрибутивного закона операции $\sqcap$ относительно операции $\cup$.

Из свойств 1, 6, 7 теоремы 14 следует справедливость третьего утверждения.

Приведенные в теореме 14 свойства 1–5 показывают, насколько близки между собой введенное здесь понятие внутренности булевой квадратной матрицы и понятие внутренности подмножества топологического пространства. Это поясняет выбор термина внутренность для булевой матрицы. От аксиом Куратовского, определяющих топологию через понятие внутренности подмножества, их отличает неравенство свойства 5, записанное вместо равенства.

7. Приложения к комбинаторике матриц

Предложение 8. Пусть A и B — квадратные матрицы над произвольной булевой алгеброй, причем $\text{Per } A = 1$ и $\text{Per } B = 0$, то есть $B = \check{B}$. Если уравнение $A \sqcap X = B$ или неравенство $A \sqcap X \subseteq B$ имеет решение, то оно является внешностью.

Доказательство. Достаточно доказать данное утверждение для неравенства. Если неравенство $A \sqcap X \subseteq B$ имеет решение, то выполняется неравенство

$$\text{Per } B \supseteq \text{Per}(A \sqcap X) \supseteq \text{Per } A \cap \text{Per } X$$

для любого решения X . Тогда из равенств $\text{Per } B = 0$, $\text{Per } A = 1$ следует, что $\text{Per } X = 0$, то есть $X = \check{X}$.

Определение 5. Скалярным произведением строки A на столбец B назовем $A \sqcap B \in \mathbf{B}$. Скалярным произведением строки A на строку B назовем $A \sqcap B^T \in \mathbf{B}$. Скалярным произведением столбца A на столбец B назовем $A^T \sqcap B \in \mathbf{B}$. Скалярным произведением столбца A на строку B назовем $A^T \sqcap B^T = B \sqcap A \in \mathbf{B}$.

Теорема 17. Для квадратной $(0, 1)$ -матрицы B размера $n \times n$ выполняется равенство $\text{Per } B = 0$ тогда и только тогда, когда для любой квадратной $(0, 1)$ -матрицы A с перманентом $\text{Per } A = 1$ в матрице B' можно выбрать t столбцов, а в матрице A можно выбрать s столбцов таких, что $s + t = n + 1$ и скалярное произведение каждого из выбранных в B' столбцов на каждый из выбранных столбцов в A равно 1. Такое же утверждение верно для строк матрицы A и строк матрицы B , а также столбцов матрицы A и строк матрицы B , и наоборот.

Доказательство. Проверим необходимость. Рассмотрим неравенство $A \sqcap X \subseteq B$. Так как $B = \tilde{B}$, то из предложения 8 следует, что любое частное решение является внешностью. Как было замечено в конце раздела 5, $X = (A^T \sqcap B')' = (A^T)' \sqcup B$ есть наибольшее решение неравенства $A \sqcap X \subseteq B$, и к нему применима теорема 11 Фробениуса–Кёнига. Это значит, что в результате перестановок строк или столбцов матрицы $A^T \sqcap B'$ можно получить подматрицу размера $s \times t$, состоящую только из единиц, причем $s + t = n + 1$. Пусть эти перестановки P_1 и P_2 совершены и получена матрица $P_1 \sqcap A^T \sqcap B' \sqcap P_2$. Здесь теми же символами обозначены перестановочные матрицы P_1 и P_2 , полученные из единичной матрицы соответствующими перестановками столбцов или строк. Тогда

$$P_1 \sqcap A^T \sqcap B' \sqcap P_2 = (A \sqcap P_1^T)^T \sqcap (B' \sqcap P_2)$$

содержит $s \times t$ -подматрицу, состоящую только из единиц. Допустим, что эта подматрица занимает первые s строк и первые t столбцов. Получаем, что произведение каждой из первых s строк матрицы $(A \sqcap P_1^T)^T$ на каждый из t первых столбцов матрицы $B' \sqcap P_2$ дает 1. Тогда скалярное произведение каждого из первых s столбцов матрицы $A \sqcap P_1^T$ с каждым из t первых столбцов в матрице $B' \sqcap P_2$ равно 1. Следовательно, проводя обратные перестановки столбцов в матрицах $A \sqcap P_1^T$ и $B \sqcap P_2$, получаем, что в матрице A есть (по крайней мере) s столбцов, скалярное произведение которых с каждым из некоторой совокупности t столбцов матрицы B' равно 1, при этом $s + t = n + 1$.

Аналогичное утверждение верно и для строк матрицы A и строк матрицы B , а также столбцов в матрице A и строк в матрице A , и наоборот. Это следует из того, что перманенты сохраняются при транспонировании матриц.

Докажем достаточность. В качестве матрицы, перманент которой равен 1, возьмем единичную матрицу, то есть $A = E$. Тогда по условию теоремы $(E^T \sqcap B') = B'$ содержит подматрицу размера $s \times t$, причем $s + t = n + 1$, состоящую из единиц. Тогда B содержит подматрицу размера $s \times t$, состоящую из нулей, и по теореме Фробениуса–Кёнига получаем, что $\text{Per } B = 0$.

Предложение 9. *Каковы бы ни были булевы $(0, 1)$ -матрицы A и B размера $n \times n$, для которых $\text{Per } A = 1$ и $\text{Per } B = 0$, найдутся s столбцов в матрице A и t столбцов в матрице B , такие, что $s + t = n + 1$ и каждый из этих столбцов в матрице A отличен от каждого из выбранных столбцов в матрице B . Такое же утверждение верно для строк матрицы A и строк матрицы B , а также столбцов матрицы A и строк матрицы B , и наоборот.*

Доказательство. Пользуясь теоремой 17, выберем s столбцов в A и t столбцов в B со свойствами, описанными в теореме 17. Так как скалярные произведения каждого из выбранных s столбцов в A на каждый из выбранных t столбцов в B' равны 1, то в каждом из выбранных столбцов в матрице A обязательно есть совпадение единиц, по крайней мере в одном месте, с каждым из выбранных столбцов в матрице B' . Тогда в каждом из выбранных s столбцов в матрице A обязательно есть отличие, по крайней мере одним элементом, с каждым из t выбранных столбцов в матрице B .

Список литературы

1. Гутерман А. Э., Михалев А. В., Общая алгебра и линейные отображения, сохраняющие матричные инварианты. *Фундаментальная и прикладная математика* (2003) **9**, №1, 83–101.
2. Поплавский В. Б., О рангах, классах Грина и теории определителей булевых матриц. *Дискретная математика* (2008) **20**, №4, 42–60.

3. Rudeanu S., *Boolean functions and equations*. North-Holland, Amsterdam, 1974.
4. Rudeanu S., *Lattice functions and equations*. Springer, London, 2001.
5. Поплавский В. Б., О разложении определителей булевых матриц. *Фундаментальная и прикладная математика* (2007) **13**, №4, 199–223.
6. Поплавский В. Б., Объемы и определители степеней транзитивных и рефлексивных булевых отношений на конечных множествах. *Известия Тульского госуниверситета. Сер. математика, механика, информатика* (2004) **10**, №1, 134–141.
7. Luce R. D., A note on Boolean matrix theory. *Proc. Amer. Math. Soc.* (1952) **3**, 382–388.
8. Сачков В. Н., *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*. Наука, Москва, 1982.
9. Минк Х., *Перманенты*. Мир, Москва, 1982.
10. Владимиров Д. А., *Булевы алгебры*. Наука, Москва, 1969.
11. Golan J. S., *Semirings and their applications*. Kluwer, Dordrecht, 1999.
12. Reutenauer C, Straubing H., Inversion of matrices over a commutative semiring. *J. Algebra* (1984) **88**, 350–360.

Статья поступила 17.03.2010.