Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Кольца, над которыми все циклические модули вполне целозамкнуты, *Дискрет. матем.*, 2011, том 23, выпуск 3, 120–137

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1156>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 13:15:33

Кольца, над которыми все циклические модули вполне целозамкнуты

© 2011 г. А. А. Туганбаев

Описаны кольца, над которыми все циклические модули вполне целозамкнуты.

1. Введение

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, а модули – унитарными. Выражения типа A — цепное кольцо означают, что A_A и ${}_A A$ — цепные модули. Модуль X называется инъективным относительно модуля Y (или Y -инъективным), если для любого подмодуля Y_1 модуля Y все гомоморфизмы $Y_1 \rightarrow X$ продолжаются до гомоморфизмов $Y \rightarrow X$. Модуль M над кольцом A называется инъективным, если M инъективен относительно любого A -модуля. Модуль называется самоинъективным (или квазиинъективным), если он инъективен относительно себя. В [6] описаны кольца, над которыми все циклические правые модули инъективны. В [5] описаны кольца, над которыми все циклические правые модули самоинъективны. Над кольцом вычетов $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ все циклические модули самоинъективны, но самоинъективный циклический $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ -модуль $2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ не инъективен.

Модуль X называется вполне целозамкнутым, если для любого его подмодуля Y каждый гомоморфизм $Y \rightarrow X$, переводящий в себя некоторый существенный подмодуль из Y , продолжается до гомоморфизма $X \rightarrow X$. Терминология объясняется тем, что коммутативная область A с полем частных Q является вполне целозамкнутым A -модулем в точности тогда, когда область A — вполне целозамкнутое (в классическом смысле) подкольцо в поле Q (см. лемму 14). Ясно, что каждый самоинъективный модуль вполне целозамкнут. Над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ все циклические модули вполне целозамкнуты, но вполне целозамкнутый циклический $\mathbb{Z}$ -модуль $\mathbb{Z}$ не самоинъективен.

Основным результатом данной работы является теорема 1, описывающая кольца, над которыми все циклические модули вполне целозамкнуты.

Теорема 1. *Для кольца A равносильны следующие условия:*

- (1) *все циклические правые A -модули и все циклические левые A -модули являются вполне целозамкнутыми модулями;*
- (2) *$A = A_1 \times \dots \times A_n$, где либо A_i — простое артиново кольцо, либо A_i — инвариантное цепное кольцо с не более чем двумя первичными идеалами, причем для любого нильпотентного идеала B кольца A_i факторкольцо A_i/B самоинъективно, либо A_i — инвариантная вполне целозамкнутая область, у которой для любого ненулевого*

идеала B факторкольцо A_i/B является конечным прямым произведением инвариантных цепных колец $A_{i1}, \dots, A_{ik(i)}$, причем кольцо A_{ij} либо самоинъективно, либо является областью с не более чем двумя первичными идеалами, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, k(i)$.

Например, все коммутативные дедекиндовы области и все артиновы кольца главных правых (левых) идеалов удовлетворяют теореме 1. В частности, кольцо целых чисел $\mathbf{Z}$ и все кольца вычетов $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ удовлетворяют теореме 1.

Приведем необходимые определения и обозначения. Модуль M называется цепным, если в M любые два подмодуля сравнимы по включению. Модуль M называется инвариантным, если в M все подмодули вполне инвариантны. Ясно, что кольцо инвариантно справа (слева) в точности тогда, когда все его правые (левые) идеалы являются идеалами. В частности, все коммутативные кольца инвариантны. Модуль M называется малоинъективным, если каждый эндоморфизм любого его подмодуля продолжается до эндоморфизма модуля M . Модуль M называется малопроективным, если каждый эндоморфизм любого его фактормодуля поднимается до эндоморфизма модуля M ; это означает, что для каждого эндоморфизма $\tilde{f}$ произвольного фактормодуля M/X модуля M существует такой эндоморфизм f модуля M , что $hf = \tilde{f}h$, где $h: M \rightarrow M/X$ — естественный эпиморфизм.

Подмодуль Y модуля X называется существенным, если Y имеет ненулевое пересечение с каждым ненулевым подмодулем в X . В этом случае говорят, что M есть существенное расширение модуля X . Если инъективный модуль M есть существенное расширение модуля X , то M называется инъективной оболочкой модуля X . Хорошо известно, что каждый модуль имеет инъективную оболочку, причем она единственна с точностью до изоморфизма. Кроме того, каждый инъективный модуль, содержащий модуль X , также содержит некоторое свое прямое слагаемое, являющееся инъективной оболочкой модуля X . Модуль M называется равномерным, если в M любые два ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение. Ясно, что модуль равномерен в точности тогда, когда все его ненулевые подмодули существенны. Кроме того, равномерные справа области совпадают с правыми областями Оре.

Модуль M с инъективной оболочкой E называется квазинепрерывным [4] (или π -инъективным [3]) при выполнении следующих эквивалентных условий (см. [4, 3]):

- (1) для любого подмодуля X модуля M каждый идемпотентный эндоморфизм модуля X продолжается до идемпотентного эндоморфизма модуля M ;
- (2) для любого подмодуля X модуля M каждое конечное прямое разложение $X = X_1 \oplus \dots \oplus X_n$ продолжается до прямого разложения $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$;
- (3) $f(M) \subseteq M$ для любого идемпотента кольца $\text{End}(E)$;
- (4) $M = \bigoplus_{i \in I} (M \cap E_i)$ для любого прямого разложения $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$.

Для любого подмножества X правого (соответственно левого) A -модуля M через $r(X)$ (соответственно $l(X)$) обозначается правый (соответственно левый) аннулятор множества X в A , т.е. $r(X)$ (соответственно $l(X)$) — правый (соответственно левый) идеал кольца A , состоящий из всех элементов $a \in A$, аннулирующих X .

Подкольцо A кольца Q называется классически вполне целозамкнутым справа в Q , если A содержит каждый такой элемент $q \in Q$, что $q^n a \in A$ для некоторого нечетного делителя нуля $a \in A$ и для всех $n \in \mathbf{N}$. Подкольцо A кольца Q называется вполне целозамкнутым

справа в Q , если A содержит каждый такой элемент $q \in Q$, что $qB \subseteq B$ для некоторого существенного правого идеала B кольца A . Кольцо A называется регулярным, если $a \in aAa$ для любого $a \in A$. Кольцо A называется локальным, если $A/J(A)$ есть тело. Модуль M называется конечномерным, если M не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых модулей.

Мы разобьем доказательство теоремы 1 на ряд утверждений, некоторые из которых представляют самостоятельный интерес. Эти утверждения сгруппированы в два раздела. Окончание доказательства теоремы 1 приведено в замечании 1.

2. Малоинъективные и вполне целозамкнутые модули

Лемма 1. Пусть $\bar{X}$ есть существенное расширение модуля X и Y есть модуль.

- (1) Если f есть гомоморфизм из Y в $\bar{X}$ и существует такой гомоморфизм $g: Y \rightarrow X$, что f совпадает с g на $f^{-1}(X)$, то $f(Y) \subseteq X$.
- (2) Если X есть Y -инъективный модуль, то $f(Y) \subseteq X$ для любого гомоморфизма $f: Y \rightarrow \bar{X}$.
- (3) Если f есть эндоморфизм модуля $\bar{X}$ и существует такой эндоморфизм g модуля X , что f совпадает с g на $X \cap f^{-1}(X)$, то $f(X) \subseteq X$.
- (4) Если $X \oplus Y$ есть квазинепрерывный модуль, то все его прямые слагаемые квазинепрерывны, X есть Y -инъективный модуль, и $f(Y) \subseteq X$ для любого гомоморфизма $f: Y \rightarrow \bar{X}$.

Доказательство. Докажем п. 1. Допустим, что

$$x^* = (f - g)(x) \in X \cap (f - g)(Y), \quad x \in Y.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(x) &= (f - g)(x) + g(x) = x^* + g(x) \in X, \quad x \in f^{-1}(X), \\ x^* &\in (f - g)(f^{-1}(X)) = 0, \quad X \cap (f - g)(Y) = 0. \end{aligned}$$

Так как $\bar{X}$ есть существенное расширение модуля X , получаем $(f - g)(Y) = 0$. Поэтому $f(Y) = g(Y) \subseteq X$.

Докажем п. 2. Так как $f(f^{-1}(X)) \subseteq X$ и X есть Y -инъективный модуль, то существует такой гомоморфизм $g: Y \rightarrow X$, что g совпадает с f на $f^{-1}(X)$. В силу п. 1, $f(Y) \subseteq X$.

Утверждение п. 3 следует из п. 1.

Докажем п. 4. Непосредственно проверяется, что все прямые слагаемые квазинепрерывных модулей квазинепрерывны. В силу п. 2, остается доказать, что X есть Y -инъективный модуль. Пусть $u: Y \rightarrow X \oplus Y$ есть естественное вложение, $\pi: X \oplus Y \rightarrow X$ есть проекция с ядром Y , Y_1 есть подмодуль в Y , и $f_1: Y_1 \rightarrow X$ есть гомоморфизм. Существует такой эндоморфизм g_1 модуля $X \oplus Y_1$, что $g_1(x + y_1) = x + f_1(y_1)$. Тогда $g_1 = g_1^2$. Так как модуль $X \oplus Y$ квазинепрерывен, то g_1 продолжается до некоторого эндоморфизма g модуля $X \oplus Y$. Гомоморфизм $\pi g u: Y \rightarrow X$ есть искомое продолжение гомоморфизма f_1 .

Лемма 2. Пусть X есть малоинъективный модуль, $\bar{X}$ есть существенное расширение модуля X , и f есть эндоморфизм модуля $\bar{X}$. Пусть

$$N = \{x \in X \mid f(x) \in X\}.$$

- (1) Если $f(N) \subseteq N$, то $f(X) \subseteq X$.
- (2) Если $f^2(m) \in X$ для любого такого элемента $x \in X$, что $f(x) \in X$, то $f(X) \subseteq X$.
- (3) Если $(f^2 - f)(N) \subseteq X$, то $f(X) \subseteq X$.
- (4) Если $(f^2 - f)(X) \subseteq X$, то $f(X) \subseteq X$.

Доказательство. Докажем п. 1. Поскольку $f(N) \subseteq N$ и X малоинъективен, то $(f - g)(N) = 0$ для некоторого эндоморфизма g модуля X . Теперь п. 1 следует из п. 3 леммы 1.

Утверждение п. 2 следует из п. 1.

Докажем п. 3. Пусть $x \in N$. Тогда $f(x) \in X$. По условию, $(f^2 - f)(x) \in X$. Поэтому

$$f^2(x) = (f^2 - f)(x) + f(x) \in X.$$

В силу п. 2, $f(X) \subseteq X$.

Утверждение п. 4 следует из п. 3.

Лемма 3. *Каждый вполне целозамкнутый модуль малоинъективен, каждый малоинъективный модуль квазинепрерывен, причем неразложимые квазинепрерывные модули совпадают с равномерными модулями.*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что неразложимые квазинепрерывные модули совпадают с равномерными модулями.

Допустим, что M есть вполне целозамкнутый модуль, X есть подмодуль в M , и f есть эндоморфизм модуля X . Тогда f есть гомоморфизм из X в M , переводящий в себя существенный подмодуль X модуля X . Так как M есть вполне целозамкнутый модуль, то f продолжается до эндоморфизма g модуля M . Поэтому модуль M малоинъективен.

Допустим, что M есть малоинъективный модуль, E есть инъективная оболочка модуля M , f есть идемпотентный эндоморфизм модуля E . Так как $(f^2 - f)(M) = 0 \in M$, то $f(M) \subseteq M$ в силу п. 4 леммы 2.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Для кольца A равносильны следующие условия:*

- (1) $xAy = 0$ для любых элементов $x, y \in A$ с условием $xu = 0$;
- (2) в кольце A все правые аннуляторы являются идеалами;
- (3) в кольце A все левые аннуляторы являются идеалами.

Утверждения леммы 4 проверяются непосредственно.

Лемма 5. *Для кольца A равносильны следующие условия:*

- (1) A есть инвариантное слева кольцо;
- (2) в кольце A все правые аннуляторы являются идеалами и каждый эндоморфизм любого главного правого идеала xA продолжается до эндоморфизма модуля A_A .

Следовательно, если A есть малоинъективное справа и слева кольцо и $xAy = 0$ для любых элементов $x, y \in A$ с условием $xu = 0$, то A есть инвариантное справа и слева кольцо.

Доказательство. Докажем, что из условия 1 следует условие 2. По лемме 4, $r(x)$ есть идеал кольца A . Пусть f есть эндоморфизм модуля xA_A . Тогда $f(x) = xb$ для некоторого $b \in A$. Поэтому $f(xc) = xbc$ для любого элемента $c \in A$. Так как кольцо A инвариантно слева, получаем, что $xb = dx$ для некоторого элемента $d \in A$. Определим эндоморфизм g модуля A_A правилом $g(a) = da$. Для любого элемента $c \in A$ справедливы равенства

$$g(xc) = dxc = xbc = f(xc).$$

Поэтому g совпадает с f на xA .

Докажем, что из условия 2 следует условие 1. Пусть x и a есть два элемента кольца A . Поскольку $r(x)$ есть идеал кольца A , получаем, что $r(x) \subseteq r(xa)$. Поэтому существует такой гомоморфизм $f: xA \rightarrow xaA \subseteq xA$, что $f(x) = xa$. По условию, эндоморфизм f модуля xA продолжается до эндоморфизма g модуля A_A . Введем обозначение $b = g(1)$. Тогда $xa = g(1 \cdot x) = g(1)x = bx$. Поэтому кольцо A инвариантно слева.

Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть M есть модуль и все его фактормодули квазинепрерывны.

- (1) Если все фактормодули модуля M неразложимы, то M есть цепной модуль.
- (2) Если M есть циклический модуль над локальным кольцом, то M есть цепной модуль.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Пусть X и Y есть подмодули в M , $X \not\subseteq Y$, и $h: M \rightarrow M/(X \cap Y)$ есть естественный эпиморфизм. Неразложимый квазинепрерывный модуль $h(M)$ равномерен. Кроме того, $h(X) \cap h(Y) = h(0)$ и $h(X) \neq h(0)$. Тогда $h(Y) = h(0)$ и $Y = X \cap Y \subseteq X$.

Докажем утверждение 2. Так как все фактормодули циклических модулей цикличны, то утверждение 2 вытекает из уже доказанного утверждения 1 и того, что все циклические модули над локальными кольцами неразложимы.

Лемма доказана.

Лемма 7 ([1]). Модуль M является самоинъективным в точности тогда, когда M есть вполне инвариантный подмодуль своей инъективной оболочки.

Лемма 8. Пусть M есть существенное расширение вполне целозамкнутого модуля X .

- (1) $f(X) \subseteq X$ для любого эндоморфизма f модуля M , переводящего в себя некоторый существенный подмодуль модуля X .
- (2) Если f есть эндоморфизм модуля M и $\text{Ker}(f)$ есть существенный подмодуль в M , то $f(X) \subseteq X$.
- (3) Если X есть существенное расширение некоторого модуля Y , который вполне инвариантен в M , то X является вполне инвариантным подмодулем в M .
- (4) Если X есть существенное расширение самоинъективного модуля Y , то X является самоинъективным вполне инвариантным подмодулем в M .
- (5) Если X есть существенное расширение полупростого модуля, то X является самоинъективным вполне инвариантным подмодулем в M .

Доказательство. Докажем п. 1. По условию $f(Y) \subseteq Y$ для некоторого существенного подмодуля Y в X . Обозначим через X_1 модуль $X \cap f^{-1}(X)$ и через $f_1 \in \text{Hom}(X_1, X)$ ограничение гомоморфизма f на модуль X_1 . Так как $Y \subseteq X_1$ и $f_1(Y) = f(Y) \subseteq Y$, гомоморфизм $f_1: X_1 \rightarrow X$ переводит в себя существенный подмодуль вполне целозамкнутого модуля X . Поэтому f_1 продолжается до гомоморфизма $g: X \rightarrow X$. Согласно п. 3 леммы 1, справедливо включение $f(X) \subseteq X$.

Докажем п. 2. Положим $Y = X \cap \text{Ker}(f)$. Тогда Y есть существенный подмодуль в X и $f(Y) = 0 \subseteq Y$. Согласно п. 1, $f(X) \subseteq X$.

Утверждение п. 3 следует из п. 1.

Докажем п. 4. Пусть M' есть инъективная оболочка модуля M . Тогда M' есть существенное расширение модуля Y , поскольку M' есть существенное расширение модуля M , M есть существенное расширение модуля X , и X есть существенное расширение модуля Y . Согласно лемме 7, Y есть вполне инвариантный подмодуль в M и M' . Согласно п. 3, X есть вполне инвариантный подмодуль в M и M' . Согласно лемме 7, модуль X самоинъективен.

Все полупростые модули самоинъективны, поэтому п. 5 следует из п. 4.

Лемма 9. Пусть X есть модуль с инъективной оболочкой $\bar{X}$, $\text{sg}(\bar{X})$ есть идеал кольца $\text{End}(\bar{X})$, образованный всеми эндоморфизмами, ядра которых являются существенными подмодулями в $\bar{X}$. Равносильны следующие условия:

- (1) X есть вполне целозамкнутый модуль;
- (2) $f(X) \subseteq X$ для любого эндоморфизма f модуля $\bar{X}$, переводящего в себя некоторый существенный подмодуль модуля X ;
- (3) X есть малоинъективный модуль и $h(X) \subseteq X$ для любого $h \in \text{sg}(\bar{X})$;
- (4) X есть малоинъективный модуль, являющийся конечной прямой суммой вполне целозамкнутых модулей.

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (4) следует из леммы 3.

Докажем, что (4) $\Rightarrow$ (3). По соображениям индукции можно считать, что $X = X_1 \oplus X_2$, где модули X_1 и X_2 вполне целозамкнуты. По лемме 3, модуль X квазинепрерывен. Пусть $\bar{X}$ есть инъективная оболочка модуля X . Тогда $\bar{X} = \bar{X}_1 \oplus \bar{X}_2$, где $\bar{X}_1$ и $\bar{X}_2$ есть инъективные оболочки модулей X_1 и X_2 соответственно. Пусть $h \in \text{sg}(\bar{X})$, $u_1: \bar{X}_1 \rightarrow \bar{X}$ и $u_2: \bar{X}_2 \rightarrow \bar{X}$ есть естественные вложения, $\pi_1: \bar{X} \rightarrow \bar{X}_1$ и $\pi_2: \bar{X} \rightarrow \bar{X}_2$ есть естественные проекции. Пусть

$$\begin{aligned} h_{11} &= \pi_1 h u_1 \in \text{End}(\bar{X}_1), & h_{22} &= \pi_2 h u_2 \in \text{End}(\bar{X}_2), \\ h_{12} &= \pi_2 h u_1 \in \text{Hom}(\bar{X}_1, \bar{X}_2), & h_{21} &= \pi_1 h u_2 \in \text{Hom}(\bar{X}_2, \bar{X}_1). \end{aligned}$$

Так как модули X_1 и X_2 вполне целозамкнуты, то по условию (4)

$$h_{11}(X_1) \subseteq X_1, \quad h_{22}(X_2) \subseteq X_2.$$

Кроме того, согласно п. 4 леммы 1,

$$h_{21}(X_2) \subseteq X_1, \quad h_{12}(X_1) \subseteq X_2.$$

Поэтому

$$h(X) = h(X_1 \oplus X_2) = h_{11}(X_1) + h_{12}(X_1) + h_{22}(X_2) + h_{21}(X_2) \subseteq X.$$

Докажем, что (3) $\Rightarrow$ (1). Пусть Y_1 есть подмодуль модуля X и f_1 переводит в себя некоторый существенный подмодуль в Y_1 . Тогда $f_1(Y_2) \subseteq Y_2$ для некоторого существенного подмодуля Y_2 модуля Y_1 . Существует такой подмодуль Z в X , что $Y_1 \cap Z = 0$ и X есть существенное расширение модуля $Z \oplus Y_1$. Непосредственно проверяется, что X есть существенное расширение модуля $Z \oplus Y_2$, поскольку Y_1 есть существенное расширение модуля Y_2 . Поэтому $\bar{X}$ есть существенное расширение модуля $Z \oplus Y_2$. Обозначим через f_2 такой гомоморфизм из $Z \oplus Y_1$ в X , что $f_2(z + y_1) = f_1(y_1)$ для любых элементов $z \in Z$ и $y_1 \in Y_1$. Обозначим через f_3 такой эндоморфизм модуля $Z \oplus Y_2$, что $f_3(z + y_2) = f_1(y_2) \in Y_2 \subseteq Z \oplus Y_2$ для любых элементов $z \in Z$ и $y_2 \in Y_2$. Так как модуль $\bar{X}$ малоинъективен, то эндоморфизм f_3 продолжается до эндоморфизма f_4 модуля X . Гомоморфизм f_2 и эндоморфизм f_4 продолжаются до эндоморфизмов f и f' инъективного модуля $\bar{X}$. Обозначим $h = f - f' \in \text{End}(\bar{X})$. Так как

$$h(Z \oplus Y_2) = (f - f')(Z \oplus Y_2) = 0$$

и $\bar{X}$ есть существенное расширение модуля $Z \oplus Y_2$, по условию $h(X) \subseteq X$. Тогда

$$f(X) \subseteq h(X) + f'(X) = h(X) + f_4(X) \subseteq X,$$

причем f совпадает с f_1 на модуле Y_1 . Поэтому f_1 продолжается до эндоморфизма модуля X и X есть вполне целозамкнутый модуль.

Утверждение (1) $\Rightarrow$ (2) следует из п. 1 леммы 8.

Докажем, что (2) $\Rightarrow$ (3). Пусть Y_1 есть подмодуль модуля X и $f_1 \in \text{End}(Y_1)$. Существует такой подмодуль Z в X , что $Y_1 \cap Z = 0$ и X есть существенное расширение модуля $Z \oplus Y_1$. Обозначим через f_2 такой эндоморфизм модуля $Z \oplus Y_1$, что $f_2(z + y_1) = f_1(y_1)$ для любых элементов $z \in Z$ и $y_1 \in Y_1$. Эндоморфизм f_2 продолжается до эндоморфизма f инъективного модуля $\bar{X}$. Так как $f(Z \oplus Y_1) \subseteq Z \oplus Y_1$, получаем, что f переводит в себя некоторый существенный подмодуль в X . По условию, $f(X) \subseteq X$. Тогда модуль X малоинъективен, поскольку f_1 продолжается до эндоморфизма модуля X . Пусть h есть эндоморфизм модуля $\bar{X}$ и $\text{Ker}(h)$ является существенным подмодулем в $\bar{X}$. Пусть $Y = X \cap \text{Ker}(h)$. Так как Y есть существенный подмодуль в X и $h(Y) = 0 \subseteq Y$, мы видим, что h переводит в себя некоторый существенный подмодуль в X . По условию, $h(X) \subseteq X$.

Лемма доказана.

Лемма 10. Пусть X есть самоинъективный модуль и $R = \text{End}(X)$.

- (1) $\text{sg}(X) = J(R)$, $R/J(R)$ есть регулярное кольцо, и все его идемпотенты поднимаются до идемпотентов кольца R .
- (2) Если X есть неразложимый модуль, то X есть равномерный модуль с локальным кольцом эндоморфизмов.
- (3) Если A есть самоинъективное справа кольцо, то при естественном изоморфизме $A \rightarrow \text{End}(A_A)$ идеал $J(A)$ переходит на идеал $\text{sg}(A_A)$.

Доказательство. Утверждение 1 доказано в [1]. Утверждение 2 вытекает из утверждения 1 и леммы 3. Утверждение 3 вытекает из утверждения 1.

Лемма 11. Пусть X есть малоинъективный модуль, $\bar{X}$ есть инъективная оболочка модуля X , и $\text{sg}(X)$ есть идеал кольца $\text{End}(X)$, образованный всеми эндоморфизмами, ядра которых являются существенными подмодулями в X .

- (1) Если $\alpha(Z) \subseteq Z$ для любого $\alpha \in \text{sg}(X)$ и каждого существенного подмодуля Z в X , то X есть вполне целозамкнутый модуль.
- (2) Если каждый существенный подмодуль Y в X вполне инвариантен в X , то X является вполне целозамкнутым модулем. В частности, если X есть инвариантный модуль, то X есть вполне целозамкнутый модуль.
- (3) Если $\text{sg}(X) = 0$, то X есть вполне целозамкнутый модуль.
- (4) Если модуль X несингулярен, то X есть вполне целозамкнутый модуль.
- (5) Если X есть конечная прямая сумма инвариантных модулей, то X есть вполне целозамкнутый модуль.
- (6) Если X есть цепной модуль и α есть автоморфизм модуля $\bar{X}$ с условием $\alpha(X) \not\subseteq X$, то $\alpha^{-1}(X) \subseteq X$.
- (7) Если X есть цепной модуль и $\text{sg}(X) \subseteq J(\text{End}(X))$, то X есть вполне целозамкнутый модуль.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Пусть $h \in \text{sg}(\bar{X})$. Согласно лемме 9, достаточно доказать, что $h(X) \subseteq X$. Обозначим через Y сумму всех подмодулей в X , переходящих в себя под действием h . Так как $X \cap \text{Ker}(h) \subseteq Y$, мы видим, что Y есть существенный подмодуль в X . Поскольку $h(Y) \subseteq Y$ и модуль X малоинъективен, получаем, что $(h - g)(Y) = 0$ для некоторого эндоморфизма g модуля X . Так как $g(X \cap \text{Ker}(h)) = 0$, находим, что $g \in \text{sg}(X)$. Пусть

$$Z = \{x \in X \mid (h - g)(x) \in Y\},$$

$$Z^* = \{x \in X \mid h(x) \in X\}.$$

Так как $h(Z) \subseteq (h - g)(Z) + g(Z) \subseteq X$, получаем, что $Z \subseteq Z^* \subseteq X$. Кроме того, $Y \subseteq Z$, Z есть существенный подмодуль в X , и $(h - g)(Z) \subseteq Y \subseteq Z$. Существует такой гомоморфизм $\beta^*: Z^*/Y \rightarrow X$, что $\beta^*(z^* + Y) = (h - g)(z^*) \in X$. Тогда

$$Z/Y = \{z^* + Y \in Z^*/Y \mid \beta^*(z^* + Y) \in Y\}.$$

Так как Y есть существенный подмодуль в X , получаем, что Z/Y есть существенный подмодуль в Z^*/Y . Так как модуль X малоинъективен и $(h - g)(Z) \subseteq Z$, получаем, что $(h - g - f)(Z) = 0$ для некоторого эндоморфизма f модуля X . Так как $f(Y) = (h - g)(Y) = 0$, мы видим, что $f \in \text{sg}(X)$. Следовательно, $f + g \in \text{sg}(X)$. По условию, $(g + f)(Z) \subseteq Z$. Кроме того, $(h - g - f)(Z) = 0$. Поэтому $h(Z) = (g + f)(Z) \subseteq Z$. Так как Y есть сумма всех подмодулей в X , переходящих в себя под действием h , заключаем, что $Z \subseteq Y \subseteq Z$ и $Z = Y$. Кроме того, Z/Y есть существенный подмодуль в Z^*/Y . Поэтому $Z^*/Y = 0$ и $Z^* = Y$. Согласно п. 3 леммы 1, $h(X) \subseteq X$.

Утверждения 2 и 3 вытекают из утверждения 1.

Утверждение 4 вытекает из утверждения 3 и того, что $\text{sg}(X) = 0$ для несингулярного модуля X .

Утверждение 5 вытекает из утверждения 2 и леммы 9.

Докажем утверждение 6. Введем обозначение

$$N = \{x \in X \mid \alpha^{-1}(x) \in X\}.$$

Тогда

$$\alpha^{-1}(N) = \{x \in X \mid \alpha(x) \in N\}.$$

По п. 1 леммы 2, примененной к α^{-1} , достаточно доказать, что $\alpha^{-1}(N) \subseteq N$. Допустим, что $\alpha^{-1}(N) \not\subseteq N$. Так как X есть цепной модуль, то $N \subseteq \alpha^{-1}(N)$. Тогда $\alpha(\alpha^{-1}(N)) \subseteq \alpha^{-1}(N)$. Из п. 1 леммы 2, примененного к α , вытекает, что $\alpha(X) \subseteq X$. Получено противоречие.

Докажем утверждение 7. Пусть $h \in \text{sg}(\bar{X})$ и $K = X \cap \text{Ker}(h)$. По лемме 9, достаточно доказать, что $h(X) \subseteq X$. Согласно п. 1 леммы 10,

$$\text{sg}(\bar{X}) = J(\text{End}(\bar{X})).$$

Поэтому $1 - h$ есть автоморфизм модуля $\bar{X}$ и действует тождественно на существенном подмодуле K модуля X . Тогда автоморфизм $(1 - h)^{-1}$ модуля $\bar{X}$ действует тождественно на существенном подмодуле K модуля X . Если $(1 - h)(X) \subseteq X$, то $h(X) \subseteq X + (1 - h)(X) \subseteq X$, и все доказано.

Допустим, что $(1 - h)(X) \not\subseteq X$. Согласно утверждению 6, $(1 - h)^{-1}(X) \subseteq X$. Поэтому существует такой эндоморфизм f модуля X , что $f(x) = (1 - h)^{-1}(x)$ для всех $x \in X$. Кроме того, $(1 - f)(K) = 0$, поскольку $(1 - h)^{-1}$ действует тождественно на K . Поэтому $1 - f \in \text{sg}(X)$. Кроме того, $\text{sg}(X) \subseteq J(\text{End}(X))$ по условию. Поэтому $f = 1 - (1 - f)$ есть автоморфизм модуля X . Поскольку $f(x) = (1 - h)^{-1}(x)$ для всех $x \in X$, заключаем, что $(1 - h)^{-1}(X) = X$. Поэтому $X = (1 - h)(X)$. Получено противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 12 ([1]). Пусть A есть кольцо и Q есть его максимальное правое кольцо частных. Если модуль Q_A является инъективной оболочкой модуля A_A , то отображение $\varphi: \text{End}(Q_A) \rightarrow Q$, при котором $\varphi(f) = f(1)$, является изоморфизмом колец.

Лемма 13. Если A есть несингулярное справа кольцо и Q есть его максимальное правое кольцо частных, то равносильны следующие условия:

- (1) A_A есть вполне целозамкнутый модуль;
- (2) A есть вполне целозамкнутое справа подкольцо в Q ;
- (3) A_A есть малоинъективный модуль.

Доказательство. Так как кольцо A несингулярно справа, мы видим, что Q_A есть инъективная оболочка модуля A_A [1]. Согласно лемме 12, кольцо Q можно естественным образом отождествить с кольцом $\text{End}(Q_A)$. Поэтому эквивалентность (1) $\iff$ (2) вытекает из леммы 9.

Эквивалентность (1) $\iff$ (3) вытекает из леммы 3 и п. 4 леммы 11.

Лемма доказана.

Лемма 14. Для кольца A равносильны следующие условия:

- (1) A есть несингулярное справа кольцо без нетривиальных идемпотентов, и A_A есть вполне целозамкнутый модуль;
- (2) A есть несингулярное справа кольцо без нетривиальных идемпотентов, и A_A есть малоинъективный модуль;
- (3) A есть равномерная справа область, и A_A есть вполне целозамкнутый модуль;

- (4) *А есть инвариантная слева область, А имеет классическое двустороннее тело частных Q , причем А есть вполне целозамкнутое справа подкольцо в Q и классически вполне целозамкнутое справа подкольцо в Q .*

Доказательство. Эквивалентность (1) $\iff$ (2) и импликация (4) $\Rightarrow$ (3) вытекают из леммы 13.

Импликация (4) $\Rightarrow$ (3) вытекает из леммы 3.

Импликация (3) $\Rightarrow$ (1) очевидна.

Докажем, что (1) $\Rightarrow$ (3). Так как кольцо A не имеет нетривиальных идемпотентов, то A_A есть вполне целозамкнутый неразложимый модуль. По лемме 3, кольцо A равномерно справа. Непосредственно проверяется, что несингулярное справа, равномерное справа кольцо A является областью.

Докажем, что (3) $\Rightarrow$ (4). Так как A есть равномерная справа область, мы заключаем, что A имеет классическое правое тело частных Q . По лемме 5, область A инвариантна слева. Тогда область A равномерна слева и имеет классическое левое тело частных. Поэтому классическое правое тело частных Q является двусторонним телом частных области A . По лемме 13, A является вполне целозамкнутым справа подкольцом в Q .

Пусть $0 \neq q \in Q$, $0 \neq a \in A$, и $q^i a \in A$ для всех натуральных чисел i . Обозначим через B существенный правый идеал $\sum_{i=1}^{\infty} q^i a A$ равномерной области A . Так как $qB \subseteq B$ и A есть вполне целозамкнутое справа подкольцо в Q , получаем, что $qA \subseteq A$ и $q \in A$. Поэтому A является классически вполне целозамкнутым справа подкольцом в Q .

Лемма доказана.

Лемма 15. *Для модуля X равносильны следующие условия:*

- (1) *X есть вполне целозамкнутый неразложимый модуль;*
- (2) *X есть равномерный модуль, и либо X есть самоинъективный модуль с локальным кольцом $\text{End}(X)$ и $\text{sg}(X) = J(\text{End}(X))$, либо X есть малоинъективный модуль и каждый его ненулевой эндоморфизм является мономорфизмом.*

Доказательство. Пусть M есть инъективная оболочка модуля X .

Докажем, что (1) $\Rightarrow$ (2). По лемме 3, X есть малоинъективный равномерный модуль. Если каждый ненулевой эндоморфизм модуля X является мономорфизмом, то все доказано.

Допустим, что существует ненулевой эндоморфизм $g \in \text{End}(X)$ с ненулевым ядром. Эндоморфизм g продолжается до ненулевого эндоморфизма $h \in \text{sg}(M)$. Обозначим через Y ненулевой вполне инвариантный подмодуль $\sum_{f \in \text{sg}(M)} f(M)$ инъективного равномерного модуля M . По лемме 9, $Y \subseteq X$; согласно п. 3 леммы 8, X есть вполне инвариантный подмодуль в M . По лемме 7, модуль X самоинъективен. Так как X есть неразложимый самоинъективный модуль, согласно п. 2 леммы 10 $\text{End}(X)$ есть локальное кольцо и $\text{sg}(X) = J(\text{End}(X))$.

Докажем, что (2) $\Rightarrow$ (1). Без ограничения общности можно считать, что X есть малоинъективный модуль и каждый его ненулевой эндоморфизм является мономорфизмом. Согласно п. 3 леммы 11, X есть вполне целозамкнутый модуль.

Лемма доказана.

Лемма 16. *Пусть A есть кольцо и $N_l(A)$ есть множество всех его левых делителей нуля. Равносильны следующие условия:*

- (1) кольцо A не имеет нетривиальных идемпотентов, и A_A есть вполне целозамкнутый модуль;
- (2) A есть равномерное справа кольцо, и либо A есть самоинъективное справа локальное кольцо и

$$J(A) = \text{sg}(A_A) = \text{Sing}(A_A) = N_l(A),$$

либо A есть инвариантная слева область и A_A есть малоинъективный модуль.

Доказательство. Импликация (2) $\Rightarrow$ (1) очевидна.

Докажем, что (1) $\Rightarrow$ (2). По лемме 3, кольцо A равномерно справа. Поэтому

$$\text{Sing}(A_A) = N_l(A) = \text{sg}(A_A).$$

Остальные утверждения вытекают из лемм 14 и 15.

3. Вполне целозамкнутые циклические модули

Лемма 17. Пусть A есть область, a есть ее необратимый элемент, причем модуль A_A малоинъективен.

$$(1) \bigcap_{i=1}^{\infty} a^i A = 0.$$

- (2) Если главный правый идеал aA строго содержит некоторый первичный идеал P области A , то $P = 0$.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Можно считать, что $a \neq 0$. По лемме 14, область A имеет классическое тело частных Q , которое содержит элемент a^{-1} . Обозначим через X правый идеал $\bigcap_{i=1}^{\infty} a^i A$ области A . Существует такой эндоморфизм f модуля X_A , что $f(x) = a^{-1}x$ для всех $x \in X$. По условию, эндоморфизм f продолжается до некоторого эндоморфизма g модуля A_A . Введем обозначение $b = g(1) \in A$. Допустим, что $X \neq 0$. Возьмем ненулевой элемент $x \in X$. Тогда $a^{-1}x = f(x) = g(1 \cdot x) = bx$, откуда следует, что $a^{-1} = b \in A$ и элемент a обратим в A . Получено противоречие. Поэтому $X = 0$.

Докажем утверждение 2. Пусть $h: A \rightarrow A/P$ есть естественный кольцевой эпиморфизм. Так как $P \subsetneq aA$, заключаем, что $h(a) \neq h(0)$, $P = aY \subseteq Y$ для некоторого идеала Y области A и $h(a)h(Y) = h(0)$. По лемме 5, область A инвариантна слева. Тогда $h(A)$ есть инвариантное слева первичное кольцо. Поэтому $h(A)$ есть область, причем $h(a)h(Y) = h(0)$. Тогда $h(Y) = h(0)$, $Y \subseteq P \subseteq Y$, и $P = Y$. Поэтому $P = aP$ и $P \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} a^i A$. Согласно утверждению 1, $P = 0$.

Лемма 18. Пусть A есть цепная справа, малоинъективная справа область. Тогда

- (1) A имеет не более двух первичных идеалов;
- (2) A есть инвариантная цепная область.

Доказательство. Согласно лемме 5, область A инвариантна слева.

Докажем утверждение 1. Допустим противное. Тогда инвариантная слева, цепная справа область A имеет ненулевой первичный идеал P , строго лежащий в $J(A)$. Пусть $a \in J(A) \setminus P$. Это противоречит п. 2 леммы 17.

Докажем утверждение 2. Так как A есть инвариантная слева, цепная справа область, она является цепной слева областью. Остается доказать, что область A инвариантна справа. Достаточно доказать, что $ba \in aA$ для любых ненулевых элементов $a \in J(A)$, $b \in A$. Допустим, что $ba \notin aA$. Так как A есть цепная справа область, получаем, что $aA \subseteq baA$. Тогда $a = bac$ для некоторого ненулевого элемента $c \in A$, причем элемент c необратим в A , поскольку $ba \notin aA$. Поэтому $c \in J(A)$ и $a = b^i ac^i$ для всех натуральных чисел i . Тогда $0 \neq a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} Ac^i$.

Так как A есть область и $0 \neq a \in J(A)$, заключаем, что $a \notin Aa^2$. Поэтому правый идеал aA не лежит в $Aa^2 = Aa^2A$. Пусть $h: A \rightarrow Aa^2$ есть естественный кольцевой эпиморфизм. Так как $h(J(A))$ есть единственный первичный идеал кольца $h(A)$, заключаем, что $h(J(A))$ является первичным радикалом кольца $h(A)$. Поэтому $h(c)$ есть нильпотентный элемент кольца $h(A)$. Тогда $c^n = xa^2$ для некоторых $n \in \mathbb{N}$ и $x \in A$. Так как $0 \neq a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} Ac^i$, получаем, что $0 \neq a \in Axa^2$. Поэтому $1 \in Aa$, получаем противоречие. Лемма доказана.

Лемма 19. Пусть A есть инвариантная цепная область и Q есть ее классическое тело частных. Если $q \in Q \setminus A$, то $q^{-1} \in A$. Кроме того, равносильны следующие условия:

- (1) A есть классически вполне целозамкнутое справа подкольцо в Q ;
- (2) модуль A_A малоинъективен;
- (3) $\bigcap_{i=1}^{\infty} a^i A = 0$ для любого необратимого элемента a области A ;
- (4) A имеет не более двух первичных идеалов.

Доказательство. Пусть $q = ab^{-1} \in Q \setminus A$, где a и b есть ненулевые элементы цепной области A . Так как $ab^{-1} \notin A$, то $a \notin Ab$. Поэтому $b \in Aa$ и $q^{-1} = ba^{-1} \in A$.

Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) следует из леммы 14.

Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) следует из п. 1 леммы 17.

Докажем, что (1) $\Rightarrow$ (4). Допустим противное. Тогда инвариантная цепная область A имеет ненулевой первичный идеал X , строго лежащий в $J(A)$. Первичный идеал X инвариантного кольца A вполне первичен. Пусть $a \in J(A) \setminus X$. Так как идеал X инвариантного цепного кольца A не содержит идеал aA , получаем, что главный идеал aA строго содержит вполне первичный идеал X . Поэтому $X = aX$. Тогда $X = a^i X$ для всех i . Поэтому $X \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} a^i A = 0$ и $X = 0$. Получено противоречие.

Докажем, что (4) $\Rightarrow$ (3). Пусть a есть необратимый элемент инвариантной цепной области A , $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} a^i A$, и $h: A \rightarrow A/X$ есть естественный эпиморфизм. Тогда a есть элемент первичного идеала $J(A)$ области A . Допустим, что $X \neq 0$. Так как 0 есть первичный идеал и A имеет не более двух первичных идеалов, то кольцо $h(A)$ имеет ровно один первичный идеал $h(J(A))$, который является первичным радикалом кольца $h(A)$. Так как первичный радикал является нильидеалом, элемент $h(a)$ нильпотентен. Поэтому $a^n \in X$ для некоторого натурального числа n . Тогда $a^n = a^{n+1}b$ для некоторого элемента b области A . Поэтому $1 = ab$ и элемент a обратим. Получено противоречие.

Докажем, что (3) $\Rightarrow$ (1). Пусть $0 \neq q \in Q$, $0 \neq a \in A$, и $q^i a \in A$ для всех натуральных чисел i . Допустим, что $q \notin A$. Тогда $q^{-1} = b$ есть необратимый элемент области A . Пусть Y есть ненулевой идеал $\sum_{i=1}^{\infty} q^i a$ области A . Так как $qY \subseteq Y$ и $q^{-1} = b \in A$, получаем, что $Y \subseteq bY \subseteq Y$, $Y = bY$, и $Y = b^i Y$ для всех i . Поэтому $Y \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} b^i A = 0$. Получено противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 20. Для кольца A равносильны следующие условия:

- (1) A есть цепная справа область, причем A_A есть вполне целозамкнутый модуль;
- (2) A есть цепная слева область, причем A_A есть вполне целозамкнутый модуль;
- (3) A есть цепная справа область, причем модуль A_A малоинъективен;
- (4) A есть цепная слева область, причем модуль A_A малоинъективен;
- (5) A есть инвариантная цепная область, имеющая не более двух первичных идеалов.

Доказательство. Эквивалентности (1) $\iff$ (3) и (2) $\iff$ (4) вытекают из леммы 14.

Импликация (3) $\Rightarrow$ (5) следует из леммы 18.

Импликация (5) $\Rightarrow$ (4) следует из леммы 19.

Докажем, что (4) $\Rightarrow$ (3). Пусть a и b есть два ненулевых элемента области A . Так как по лемме 3 область A равномерна справа, заключаем, что $ac = bd \neq 0$ для некоторых ненулевых элементов $c, d \in A$. Так как A есть цепная слева область, видим, что либо $c = xd$, либо $d = yc$ для некоторых $x, y \in A$. Поэтому либо $axd = bd$, либо $ac = byc$. Так как A есть область, получаем, что либо $b = ax$, либо $a = by$. Поэтому A является цепной справа областью.

Лемма доказана.

Лемма 21. Для кольца A равносильны следующие условия:

- (1) A есть цепное справа, малоинъективное справа кольцо;
- (2) либо A есть инвариантная цепная область, имеющая не более двух первичных идеалов, либо A есть самоинъективное справа, цепное справа и слева кольцо.

Доказательство. Импликация (2) $\Rightarrow$ (1) следует из леммы 20.

Докажем, что (1) $\Rightarrow$ (2). Если A есть область, то по лемме 20 A есть инвариантная цепная область, имеющая не более двух первичных идеалов. Допустим, что A не область. Так как A есть цепное справа кольцо и $A = \text{End}(A_A)$, получаем, что $\text{sg}(A_A) = J(A)$. Согласно п. 7 леммы 11, A_A есть вполне целозамкнутый модуль. По лемме 16, A есть самоинъективное справа кольцо.

Пусть $x, y \in A$. Так как A есть цепное справа кольцо, мы видим, что либо $r(y) \subseteq r(x)$, либо $r(x) \subseteq r(y)$. Поэтому либо существует гомоморфизм $f: yA \rightarrow xA$ с условием $f(y) = x$, либо существует гомоморфизм $g: xA \rightarrow yA$ с условием $g(x) = y$. Кроме того, кольцо A самоинъективно справа. Поэтому либо существует элемент $a \in A$ с условием $ay = x$, либо существует элемент $b \in A$ с условием $bx = y$. Поэтому A есть цепное слева кольцо.

Лемма доказана.

Лемма 22 ([7]). Для кольца A равносильны следующие условия:

(1) все циклические правые A -модули квазинепрерывны;

(2) $A = \prod_{i=1}^n A_i$, где A_i есть либо простое артиново кольцо, либо равномерное справа кольцо, над которым все циклические правые модули квазинепрерывны, $i = 1, \dots, n$.

При выполнении этих условий каждый циклический правый A -модуль является конечной прямой суммой циклических равномерных модулей.

Лемма 23. Для модуля M равносильны следующие условия:

(1) модуль M малопроективен и все его фактормодули малоинъективны;

(2) модуль M малоинъективен и все его подмодули малопроективны.

Доказательство. Докажем, что (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть N есть подмодуль модуля M , $\bar{f}$ есть эндоморфизм фактормодуля $\bar{N} = N/P$, и $h: M \rightarrow M/P$ есть естественный эпиморфизм. Так как модуль M/P малоинъективен, $\bar{f}$ продолжается до эндоморфизма $\bar{g}$ модуля M/P . Поскольку модуль M малопроективен, справедливо равенство $\bar{g}h = hg$ для некоторого эндоморфизма g модуля M . Поэтому $g(N) \subseteq N$. Тогда g индуцирует эндоморфизм f модуля N и $\bar{f}h_N = h_N f$, где $h_N: N \rightarrow N/P$ есть естественный эпиморфизм. Поэтому модуль N малопроективен.

Докажем, что (2) $\Rightarrow$ (1). Пусть M/N есть фактормодуль модуля M , $\bar{X}$ есть подмодуль модуля M/N , и $\bar{f}$ есть эндоморфизм модуля $\bar{X}$. Существует такой подмодуль X модуля M , что $N \subseteq X$ и $\bar{X} = X/N$. Пусть $h: X \rightarrow X/N$ есть естественный эпиморфизм. По условию, модуль X малопроективен. Поэтому $\bar{f}h = hf$ для некоторого эндоморфизма f модуля X с условием $f(N) \subseteq N$. Так как модуль M малоинъективен, то f продолжается до некоторого эндоморфизма g модуля M . Поскольку $g(N) = f(N) \subseteq N$, мы видим, что g индуцирует эндоморфизм $\bar{g}$ модуля M/N . Так как $\bar{g}$ совпадает с $\bar{f}$ на модуле $\bar{X}$, заключаем, что модуль M/N малоинъективен.

Лемма 24. Для кольца A равносильны следующие условия:

(1) все циклические правые A -модули малоинъективны;

(2) A малоинъективно справа и все его правые идеалы являются малопроективными правыми A -модулями;

(3) $A = \prod_{i=1}^n A_i$, где A_i есть либо простое артиново кольцо, либо равномерное справа кольцо, над которым все циклические правые модули малоинъективны и конечномерны, $i = 1, \dots, n$;

(4) $A = \prod_{i=1}^n A_i$, где A_i есть либо простое артиново кольцо, либо малоинъективное справа равномерное справа кольцо, в котором все правые идеалы малопроективны, $i = 1, \dots, n$.

Доказательство. Эквивалентность (1) $\Longleftrightarrow$ (2) следует из леммы 23 и того, что модуль A_A проективен.

Импликация (1) $\Rightarrow$ (3) следует из леммы 22 и того, что по лемме 3 каждый малоинъективный модуль квазинепрерывен.

Эквивалентность (3) $\iff$ (4) следует из эквивалентности (1) $\iff$ (2).

Докажем, что (3) $\Rightarrow$ (1). Так как над простым артиновым кольцом все модули инъективны, заключаем, что все циклические правые A_i -модули малоинъективны, $i = 1, \dots, n$. Непосредственно проверяется, что все циклические правые A -модули малоинъективны.

Лемма 25 ([5]). Пусть A есть инвариантное цепное кольцо, и пусть A имеет ровно один первичный идеал. Тогда все циклические правые A -модули и все циклические левые A -модули квазиинъективны.

Лемма 26. Для кольца A равносильны следующие условия:

- (1) A есть локальная область, и все циклические правые A -модули вполне целозамкнуты;
- (2) A есть локальная область, и все циклические левые A -модули вполне целозамкнуты;
- (3) A есть локальная область, и все циклические правые A -модули малоинъективны;
- (4) A есть локальная область, и все циклические левые A -модули малоинъективны;
- (5) A есть инвариантная цепная область, и A имеет не более двух первичных идеалов.

Доказательство. Достаточно доказать эквивалентность условий 1, 3 и 5.

Импликация (1) $\Rightarrow$ (3) следует из леммы 3.

Докажем, что (3) $\Rightarrow$ (5). Согласно п. 2 леммы 6, A есть цепное справа кольцо. Поэтому условие 5 следует из леммы 4.

Докажем, что (5) $\Rightarrow$ (1). Пусть B есть идеал инвариантного кольца A . Если $B = 0$, то A/B по лемме 4 есть вполне целозамкнутый правый модуль над кольцом A/B . Если $B \neq 0$, то кольцо A/B имеет ровно один первичный идеал, и A/B по лемме 9 есть вполне целозамкнутый правый модуль над кольцом A/B .

Лемма доказана.

Лемма 27 ([2]). Пусть A есть цепное кольцо, и пусть $xA \subseteq Ax$ или $Ax \subseteq xA$ для любого элемента $x \in A$.

- (1) В A каждый первичный идеал вполне первичен.
- (2) Если A есть кольцо с условием минимальности для первичных идеалов, то A есть инвариантное кольцо.

Лемма 28. Пусть A есть локальное кольцо, все циклические правые A -модули вполне целозамкнуты, и A не область.

- (1) A есть самоинъективное справа, цепное (справа и слева) кольцо.
- (2) $Jx \subseteq xA$ для любого $x \in A$.
- (3) $xA \subseteq Ax$ или $Ax \subseteq xA$ для любого элемента $x \in A$.
- (4) A есть инвариантное цепное кольцо с ненулевым первичным радикалом P , A/P есть область, и A имеет не более двух первичных идеалов.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Согласно п. 2 леммы 6, A есть цепное справа кольцо. По лемме 21, A есть самоинъективное справа, цепное слева кольцо.

Докажем утверждение 2. Введем обозначение $J = J(A)$. Согласно п. 3 леммы 10, при естественном изоморфизме $A \rightarrow \text{End}(A_A)$ идеал J переходит на идеал $\text{sg}(A_A)$. Если $0 \neq x \in A$, то инъективный цепной модуль A_A есть инъективная оболочка циклического вполне целозамкнутого модуля x_A , откуда $Jx_A \subseteq x_A$ по лемме 9.

Докажем утверждение 3. Допустим, что $x \in A$, $xa \notin Ax$, и $bx \notin xA$ для некоторых $a, b \in A$. Так как A есть цепное кольцо согласно утверждению 1, получаем, что

$$x = cxa = bxd = cbxda$$

для некоторых $c, d \in A$. Если элемент c обратим, то $xa = c^{-1}cxa = c^{-1}x \in Ax$, и получаем противоречие. Если элемент d обратим, то $bxd = bxd d^{-1} = xd^{-1} \in xA$, и получаем противоречие. Поэтому $c, d \in J$ и $x = cbxda \in JxJ$, причем $Jx \subseteq xA$. Поэтому $x \in JxJ \subseteq xJ$ и $x = xy$ для некоторого $y \in J$. Тогда элемент $1 - y$ обратим и $x(1 - y) = 0$, откуда $x = 0$, $xa \in Ax$, и получаем противоречие.

Докажем утверждение 4. Первичный радикал P цепного кольца A является первичным идеалом. Согласно п. 3 и п. 1 леммы 11, первичный идеал P вполне первичен. Тогда A/P есть цепная область, над которой все циклические правые модули вполне целозамкнуты. По лемме 10, A/P есть инвариантная цепная область, и A/P имеет не более двух первичных идеалов. Так как каждый первичный идеал кольца A содержит первичный радикал P , кольцо A имеет не более двух первичных идеалов. Согласно п. 2 леммы 27, A есть инвариантное кольцо.

Лемма доказана.

Лемма 29. Для кольца A равносильны следующие условия:

- (1) A есть локальное кольцо, и все циклические правые A -модули вполне целозамкнуты;
- (2) A есть инвариантное цепное кольцо, A имеет не более двух первичных идеалов, и либо A есть область, либо для любого нильпотентного непервичного идеала B кольца A факторкольцо A/B самоинъективно справа.

Доказательство. Докажем что (1) $\Rightarrow$ (2). По лемме 26 можно считать, что A не область. Согласно п. 4 леммы 28, A есть инвариантное цепное кольцо с ненулевым первичным радикалом P , A/P есть область, и A имеет не более двух первичных идеалов. Пусть B есть нильпотентный непервичный идеал кольца A . Тогда B строго содержится в P . Поэтому A/B не область. Так как A/B есть локальное кольцо и все циклические правые модули над A/B вполне целозамкнуты, согласно п. 4 леммы 28 кольцо A/B самоинъективно справа.

Докажем, что (2) $\Rightarrow$ (1). Пусть B есть идеал инвариантного кольца A . Достаточно доказать, что факторкольцо A/B является вполне целозамкнутым правым модулем над кольцом A/B . Первичный радикал P инвариантного цепного кольца A является вполне первичным идеалом. Тогда A/P есть инвариантная цепная область, и A/P имеет не более двух первичных идеалов. Если $P \subseteq B$, то A/B есть, по лемме 26, вполне целозамкнутый правый модуль над A/B . Допустим, что $B \subsetneq P$ и $p \in P \setminus B$. Так как A есть инвариантное цепное кольцо, очевидно, что pA есть нильпотентный идеал и $B \subset pA$. Тогда B есть нильпотентный непервичный идеал. По условию, кольцо A/B самоинъективно справа. Поэтому A/B является вполне целозамкнутым правым модулем над A/B .

Лемма доказана.

Лемма 30. Для кольца A равносильны следующие условия:

- (1) все циклические правые A -модули вполне целозамкнуты;
- (2) $A = A_1 \times \dots \times A_n$, и A_i есть либо простое артиново кольцо, либо равномерное справа кольцо, над которым все циклические правые модули вполне целозамкнуты и конечномерны, $i = 1, \dots, n$;
- (3) $A = A_1 \times \dots \times A_n$, и для любого i верно, что либо A_i есть простое артиново кольцо, либо A_i есть инвариантная слева, равномерная справа область, над которой все циклические правые модули вполне целозамкнуты, либо A_i есть инвариантное цепное кольцо, A_i имеет не более двух первичных идеалов, и для любого нильпотентного непервичного идеала B кольца A_i факторкольцо A_i/B самоинъективно справа.

Доказательство. Импликация (3) $\Rightarrow$ (2) вытекает из леммы 29.

Импликация (2) $\Rightarrow$ (1) проверяется непосредственно.

Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) вытекает из лемм 3 и 22.

Докажем, что (2) $\Rightarrow$ (3). Без ограничения общности можно считать, что $A = A_i$ есть равномерное справа кольцо. Если A есть область, то по лемме 5 область A инвариантна слева. Остается рассмотреть случай, когда равномерное справа кольцо A не является областью. По лемме 15, A есть самоинъективное справа локальное кольцо. Остается применить лемму 29.

Лемма доказана.

Лемма 31. Пусть A есть кольцо, и пусть все циклические правые A -модули вполне целозамкнуты.

- (1) Если A имеет существенный нильпотентный левый идеал, то A есть инвариантное кольцо, и A есть конечное прямое произведение цепных колец.
- (2) Если A есть область, то A есть инвариантная слева, равномерная справа, вполне целозамкнутая справа область, и для любого ее ненулевого идеала B факторкольцо A/B есть конечное прямое произведение инвариантных цепных колец.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Так как A имеет существенный нильпотентный левый идеал, мы видим, что кольцо A не имеет прямых сомножителей, являющихся простыми артиновыми кольцами или областями. Поэтому из леммы 30 следует, что A есть конечное прямое произведение инвариантных цепных колец. В частности, A есть инвариантное кольцо.

Докажем утверждение 2. По лемме 30, A есть инвариантная слева, равномерная справа область. Пусть B есть ненулевой собственный идеал в A , содержащий ненулевой необратимый элемент b . Пусть $h: A \rightarrow A/(Ab^2)$ есть естественный кольцевой эпиморфизм. Так как A есть инвариантная слева область и $Ab \neq A$, получаем, что Ab^2 является идеалом, $b \notin Ab^2$, и $h(Ab)$ есть ненулевой нильпотентный идеал кольца $h(A)$.

Покажем, что нильпотентный идеал $h(Ab)$ кольца $h(A)$ является существенным левым идеалом в $h(A)$. Пусть $a \in A$ и $h(a) \neq h(0)$. Тогда $h(ab) \in h(Aa) \cap h(Ab)$. Остается доказать, что $h(ab) \neq h(0)$. Допустим противное. Тогда $ab = cb^2$ для некоторого $c \in A$. Поэтому $a = cb$, $h(a) = h(cb) = h(0)$, и получаем противоречие.

Так как $h(A)$ имеет существенный нильпотентный левый идеал, $h(A)$ есть конечное прямое произведение инвариантных цепных колец согласно утверждению 1. Так как

$Ab^2 \subseteq B$, заключаем, что A/B есть гомоморфный образ кольца $h(A)$. Поэтому A/B есть конечное прямое произведение инвариантных цепных колец.

Лемма доказана.

Лемма 32. *Если A есть область, то равносильны следующие условия:*

- (1) *все циклические правые A -модули и все циклические левые A -модули вполне целозамкнуты;*
- (2) *A есть вполне целозамкнутая инвариантная область, и для любого ее ненулевого идеала B факторкольцо A/B есть конечное прямое произведение инвариантных цепных колец $A_1, \dots, A_n$, причем каждое кольцо A_i имеет не более двух первичных идеалов, и либо A_i есть область, либо для любого нильпотентного непервичного идеала B кольца A_i факторкольцо A_i/B самоинъективно.*

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) следует из п. 2 леммы 31 и леммы 29.

Докажем, что (2) $\Rightarrow$ (1). Для этого достаточно доказать, что для любого ненулевого идеала B инвариантной области A кольцо A/B является вполне целозамкнутым правым и левым модулями над A/B . Это вытекает из леммы 29 и того, что конечное прямое произведение вполне целозамкнутых колец является вполне целозамкнутым кольцом.

Лемма доказана.

Замечание 1. Теорема 1 вытекает из лемм 30 и 32.

Список литературы

1. Фейс К., *Алгебра: кольца, модули и категории*, 2. Мир, Москва, 1979.
2. Brungs H. H., Törner G., Chain rings and prime ideals. *Arch. Math.* (1976) **27**, 253–260.
3. Goel V. K., Jain S. K., π -injective modules and rings whose cyclics are π -injective. *Commun. Algebra* (1978) **6**, 59–73.
4. Jeremy L., Modules et anneaux quasi-continus. *Canadian Math. Bull.* (1974) **17**, 217–228.
5. Koehler A., Rings with quasi-injective cyclic modules. *Quart. J. Math., Oxford* (1974) **25**, 51–55.
6. Osofsky B. L., Rings all of whose finitely generated modules are injective. *Pacific J. Math.* (1964) **14**, 645–650.
7. Osofsky B. L., Smith P. F., Cyclic modules whose quotients have all complement submodules direct summands. *J. Algebra* (1991) **139**, 342–354.

Статья поступила 4.06.2010.