Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Снегова, Критерий сводимости задачи об опасной близости к одномерному интервальному поиску, *Дискрет. матем.*, 2011, том 23, выпуск 3, 138–159

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1157>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 12:53:52

Критерий сводимости задачи об опасной близости к одномерному интервальному поиску

© 2011 г. Е. А. Снегова

В работе рассматривается задача о поиске движущихся объектов, которые могут столкнуться с движущимся объектом-запросом, где под столкновением понимается нахождение объектов в опасной близости. Приведен критерий сводимости данной задачи к задаче одномерного интервального поиска.

1. Введение

Традиционно в системах управления базами данных предполагается, что каждый движущийся объект имеет свою собственную независимую скорость и собственное направление движения, то есть объекты движутся хаотично. В данной статье рассматриваются потоки движущихся объектов и конфликты между потоками.

Приведем пример приложения задачи об опасной близости.

Рассмотрим квадрат над аэропортом и два типа самолетов: самолеты одного типа (запросы) движутся с юга на север внутри квадрата, а самолеты другого типа (объекты) движутся с запада на восток также внутри квадрата. Каждый самолет, когда он появляется на границе квадрата, объявляет координаты появления и время своего появления. Задача об опасной близости заключается в перечислении для каждого нового самолета-запроса тех и только тех самолетов-объектов, которые будут в некоторый момент времени в процессе своего движения на расстоянии не более, чем ρ от запроса по Манхэттену.

Рис. 1. Движение объектов и запросов в задаче об опасной близости

Расстояние ρ может быть интерпретировано следующим образом: рассмотрим самолет, представляющий собой круг радиуса ρ в Манхэттенской метрике, как это показано на рис. 1. Задача об опасной близости заключается в том, чтобы для каждого самолета-запроса перечислить те и только те самолеты-объекты, которые будут пересекаться с запросом в процессе своего движения.

В основной части этой статьи приводится формальная постановка задачи об опасной близости, формулируется и доказывается критерий сводимости данной задачи к задаче одномерного интервального поиска. Для случая задачи об опасной близости, сводящейся к задаче одномерного интервального поиска, получены логарифмические оценки сложности поиска, вставки и удаления, и линейный объем памяти.

Автор выражает глубокую благодарность Э. Э. Гасанову за постановку задачи и помощь в работе.

2. Обзор литературы

Задача об опасной близости тесно связана с задачей поиска объекта, ближайшего к запросу. Рассмотрим существующие методы решения последней задачи и сравним их с решением задачи об опасной близости в том случае, когда она сводится к задаче одномерного интервального поиска.

В большей части методов решения задачи поиска объекта, ближайшего к запросу, используются структуры данных, основанные на конструкции R -дерева [1].

Первая группа методов относится к случаю статической базы данных, состоящей из неподвижных точек, и статического точечного запроса [2]. Идея этих методов заключается в многоступенчатой проверке данных, происходящей до тех пор, пока не достигается подходящий радиус. Например, в статье [2] разработан алгоритм, состоящий из нескольких предварительных и одного финального этапа отбора.

Для движущихся объектов и статических запросов в [3] разработан алгоритм, позволяющий получать ответ на запрос о положении объектов в пространстве. Структура данных для этого алгоритма основана на R^* -дереве [4] — модификации R -дерева. В [5] упрощен упомянутый алгоритм без потери в эффективности, а в [6] приведено его расширение на случай непрерывно движущихся объектов.

В [7] предложено решение задачи нахождения k ближайших к запросу объектов. Большинство алгоритмов для случая непрерывного движения объектов основываются на повторных применениях алгоритмов для решения обычной задачи о нахождении ближайшего соседа, что приносит значительные издержки (см., например, [8]). В отличие от этого подхода, в [9] разработаны методы, которые решают данную задачу путем формирования единого запроса для всей базы данных.

Случай движущихся объектов и движущихся запросов — самый близкий к задаче об опасной близости. В [10] введено понятие структуры, позволяющей в режиме реального времени определять текущее положение объектов.

Все методы, приведенные выше, основаны на структуре R -дерева или ее модификации, предназначенной для хранения двух- или трехмерных объектов. Данные методы полезны в случае хаотического движения объектов. Во всех работах нет аналитических оценок сложности, и авторы показывают эффективность их результатов с помощью экспериментов. Однако нетрудно заметить, что в худшем случае оценки не более чем линейные от размера базы данных.

Случай предопределенного движения объектов рассмотрен в [11]. Автор предложил алгоритмы для поиска самых близких к запросу и самых быстрых относительно запроса

объектов и также алгоритмы для вычисления выпуклой оболочки движущихся точек. Для некоторых алгоритмов получены линейные нижние оценки сложностей.

В данной работе также рассматривается случай предопределенного движения объектов. Данные о законах движения объектов и запросов позволяют нам в каждом конкретном случае определить, может ли задача об опасной близости быть сведена к задаче одномерного интервального поиска.

В ряде работ было разработано множество методов решения задачи одномерного интервального поиска, например, [12–20]. Для динамического случая наиболее подходящим является метод, основанный на структуре 2–3 дерева [21]. Данный метод описан в [22, 23]. Соответствующий алгоритм имеет логарифмическую сложность поиска, вставки и удаления, что значительно меньше, чем оценки, полученные в [11].

3. Постановка задачи

Пусть заданы две функции

$$\begin{aligned} f: [0, \tau_{\max}] &\rightarrow [-\rho, 1 + \rho], \\ f_q: [0, \tau_{\max}^q] &\rightarrow [-\rho, 1 + \rho], \end{aligned}$$

называемые законами движения объектов и объектов-запросов, соответственно. Функции являются непрерывными и строго монотонными на всей области определения и удовлетворяют условиям

$$f(0) = f_q(0) = -\rho, \quad f(\tau_{\max}) = f_q(\tau_{\max}^q) = 1 + \rho.$$

Считаем, что на плоскости имеется счетное множество объектов, движущихся таким образом, что их координаты в зависимости от времени задаются парой $(f(t - t_i), y_i)$, где $i \in \mathbf{N}$, $y_i \in [0, 1]$, а t_i образуют строго возрастающую последовательность вещественных чисел. Аналогично, движение объекта-запроса задается парой $(x, f_q(t - t_q))$, где $x \in [0, 1]$, t_q — вещественное число.

Библиотекой $V(t_q)$ назовем множество объектов, находящихся в текущий момент времени t_q внутри прямоугольника $[-\rho, 1 + \rho] \times [0, 1]$, то есть

$$V(t_q) = \{(t_i, y_i): t_q \in [t_i, t_i + \tau_{\max}], y_i \in [0, 1]\}.$$

Вместо $V(t_q)$ будем писать просто V , понимая под этим множество всех объектов, находящихся в текущий момент времени внутри квадрата. Через $|V|$ обозначим число объектов в этой библиотеке.

В задаче требуется для произвольного запроса перечислить все объекты из библиотеки, с которыми он в процессе своего движения будет находиться на расстоянии меньшем, чем ρ по Манхэттену, то есть ответом на запрос $q = (t_q, x)$ при библиотеке $V = V(t_q)$ и расстоянии опасной близости ρ является множество

$$J(\rho, q, V) = \{o_i \in V \mid \exists t: |f(t - t_i) - x| + |y_i - f_q(t - t_q)| \leq \rho\}.$$

Тройку (f, f_q, ρ) будем называть задачей об опасной близости.

Задачей одномерного интервального поиска назовем пару (I, Z) , где библиотека Z — конечное подмножество множества действительных чисел $\mathbf{R}$, а множество запросов I — есть множество всех интервалов с концами из $\mathbf{R}$. Содержательно эта задача состоит в

том, чтобы для произвольного запроса $p \in I$ перечислить все те и только те точки из Z , которые попадают в интервал p .

Ответ на запрос $p \in I$ при библиотеке Z в задаче одномерного интервального поиска есть множество

$$J(p, Z) = \{z \in Z : z \in p\}.$$

Будем говорить, что задача об опасной близости (f, f_q, ρ) сводится к задаче одномерного интервального поиска, если существуют такие отображения $\varphi, \varphi_1, \varphi_2: \mathbf{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, что для любой библиотеки $V = V(t_q)$, любого запроса $q = (t_q, x)$ и любого объекта $o \in V$

$$o \in J(\rho, q, V) \iff \varphi(o) \in J([\varphi_1(q), \varphi_2(q)], Z),$$

где

$$Z = \{\varphi(o) : o \in V\}.$$

Тройку $(\varphi, \varphi_1, \varphi_2)$ будем называть функциями сведения.

Введем обозначения

$$F_L(x, y) = \min_{\xi \in [0, \rho]} (f_q^{-1}(y + \xi - \rho) - f^{-1}(x + \xi)), \quad (1)$$

$$F_R(x, y) = \max_{\xi \in [-\rho, 0]} (f_q^{-1}(y + \xi + \rho) - f^{-1}(x + \xi)), \quad (2)$$

$$X_R = \{x \in [0, 1] : \exists y \ F_R(x, y) \leq 0\}, \quad (3)$$

$$X_L = \{x \in [0, 1] : \exists y \ F_L(x, y) \leq 0\}, \quad (4)$$

$$Y_L = \{y \in [0, 1] : \exists x \ F_L(x, y) \leq 0\}. \quad (5)$$

Теорема 1. *Задача об опасной близости (f, f_q, ρ) сводится к задаче одномерного интервального поиска тогда и только тогда, когда существуют функции $\psi, \psi_L, \psi_R: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, такие, что для любой пары (x, y) , для которой выполнено условие $F_L(x, y) \leq 0$, справедливо равенство*

$$F_L(x, y) = \psi(y) + \psi_L(x), \quad (6)$$

а для любой пары (x, y) , такой, что $F_R(x, y) \leq 0$, справедливо равенство

$$F_R(x, y) = \psi(y) + \psi_R(x). \quad (7)$$

При этом, если выполнены условия (6) и (7) и

$$\psi^*(y) = \begin{cases} \psi(y), & \text{если } y \in Y_L, \\ F_L(0, 1), & \text{если } y \notin Y_L, \end{cases} \quad (8)$$

$$\psi_R^*(x) = \begin{cases} \psi_R(x), & \text{если } x \in X_R, \\ F_R(0, 1), & \text{если } x \notin X_R, \end{cases} \quad (9)$$

$$\psi_L^*(x) = \begin{cases} \psi_L(x), & \text{если } x \in X_L, \\ F_L(0, 1), & \text{если } x \notin X_L, \end{cases} \quad (10)$$

то функции сведения $(\varphi, \varphi_1, \varphi_2)$ имеют вид

$$\varphi(t_i, y_i) = t_i - \psi^*(y_i), \quad (11)$$

$$\varphi_1(t_q, x) = t_q + \psi_L^*(x), \quad (12)$$

$$\varphi_2(t_q, x) = t_q + \psi_R^*(x). \quad (13)$$

Рис. 2. Области знакопостоянства функций $F_L(x, y)$, $F_R(x, y)$

Области $F_L(x, y) \leq 0$, $F_R(x, y) \leq 0$ изображены на рис. 2.

Теорема 1 в случае, когда выполнены условия (6) и (7), позволяет решать задачу об опасной близости путем сведения ее к динамической задаче одномерного интервального поиска следующим образом.

Пусть дана динамическая база данных вещественных точек для решения задачи одномерного интервального поиска. Если в текущий момент t на границе области наблюдения появляется объект $o_i = (t_i, y_i)$, то есть $t = t_i$, то точка $\varphi(t_i, y_i)$ заносится в базу данных. Если в текущий момент t объект $o_i = (t_i, y_i)$ выходит из области наблюдения, то есть $t = t_i + \tau_{\max}$, то точка $\varphi(t_i, y_i)$ удаляется из базы данных. Если в текущий момент t появляется запрос $q = (t_q, x)$, то есть $t = t_q$, то в базе данных ищутся все точки, попадающие в интервал $[\varphi_1(t_q, x), \varphi_2(t_q, x)]$.

В работах [22, 23] подробно описывается способ решения задачи об опасной близости путем сведения ее к динамической задаче одномерного интервального поиска. Там же показано, что динамическая задача одномерного интервального поиска имеет логарифмическую относительно общего числа объектов в базе данных сложность поиска (без учета сложности перечисления ответа), вставки и удаления, и линейный объем памяти. Так в [22] рассматривался случай фиксированных скоростей объектов, то есть $f(t) = vt$, а $f_q(t) = v_q t$, а в [23] рассматривался случай, когда $f'(t + t') - f'_q(t) \leq 0$ для любого $t \in [0, \tau_{\max}^q]$ и любого t' , такого, что $t + t' \in [0, \tau_{\max}]$. Можно проверить, что оба этих случая подпадают под условия теоремы 1.

Если воспользоваться структурами данных и алгоритмами, описанными в [21], то помимо логарифмического времени поиска, вставки и удаления в худшем случае, можно добиться константного времени выполнения этих операций в среднем.

4. Доказательство основного результата

4.1. Свойства функций $F_R(x, y)$, $F_L(x, y)$

Перечислим некоторые свойства функций $F_L(x, y)$, $F_R(x, y)$.

Свойство 1. Функции $F_R(x, y)$ и $F_L(x, y)$ строго возрастают по y и убывают по x .

Доказательство. Покажем, для примера, что $F_L(x, y)$ возрастает по y . Возьмем $y_1 < y_2$ и фиксируем ξ_2 такой, что $\xi_2 \in \arg \min_{\xi \in [0, \rho]} [f_q^{-1}(y + \xi - \rho) - f^{-1}(x + \xi)]$. Тогда верна цепочка неравенств

$$\begin{aligned} F_L(x, y_2) &= f_q^{-1}(y_2 + \xi_2 - \rho) - f^{-1}(x + \xi_2) \\ &> f_q^{-1}(y_1 + \xi_2 - \rho) - f^{-1}(x + \xi_2) \\ &\geq \min_{\xi \in [0, \rho]} [f_q^{-1}(y_1 + \xi - \rho) - f^{-1}(x + \xi)]. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что $F_L(x, y)$ возрастает по y .

Остальные случаи доказываются аналогично. Свойство 1 доказано.

Свойство 2. Функции $F_R(x, y)$, $F_L(x, y)$ непрерывны по y при фиксированном x и непрерывны по x при фиксированном y .

Доказательство. Рассмотрим последовательность x_n , стремящуюся к x . Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{x_n \rightarrow x} F_L(x_n, y) &= \lim_{x_n \rightarrow x} \min_{\xi \in [0, \rho]} (f_q^{-1}(y + \xi - \rho) - f^{-1}(x_n + \xi)) \\ &= \min_{\xi \in [0, \rho]} (f_q^{-1}(y + \xi - \rho) - f^{-1}(x + \xi)) \end{aligned}$$

в силу непрерывности функции f^{-1} .

Остальные случаи доказываются аналогично. Свойство 2 доказано.

Свойство 3. Для любой пары $(x, y) \in [0, 1]^2$

$$F_L(x, y) + \tau_{\max} > 0.$$

Доказательство. Справедливы оценки

$$\begin{aligned} F_L(x, y) &\geq F_L(1, 0) = \min_{\xi \in [0, \rho]} (f_q^{-1}(\xi - \rho) - f^{-1}(1 + \xi)) \\ &\geq f_q^{-1}(0) - f^{-1}(1 + \rho) > -f^{-1}(1 + \rho) = \tau_{\max}, \end{aligned}$$

так как $f_q^{-1}(0) > f_q^{-1}(-\rho) = 0$.

Свойство 3 доказано.

Свойство 4. Для любой пары $(x, y) \in [0, 1]^2$

$$F_R(x, y) - F_L(x, y) > 0.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{aligned} F_R(x, y) &\geq f_q^{-1}(y + \rho) - f^{-1}(x), \\ F_L(x, y) &\leq f_q^{-1}(y - \rho) - f^{-1}(x), \end{aligned}$$

то есть

$$F_R(x, y) - F_L(x, y) \geq f_q^{-1}(y + \rho) - f_q^{-1}(y - \rho) > 0,$$

так как функция f_q^{-1} строго возрастает. Свойство 4 доказано.

4.2. Основная лемма

Лемма 1. *Объект $o_i = (t_i, y_i)$ из библиотеки $V = V(t_q)$ принадлежит ответу на запрос $q = (t_q, x)$, то есть $o_i \in J(\rho, q, V)$ тогда и только тогда, когда*

$$t_i - t_q \in [F_L(x, y_i), F_R(x, y_i)]. \quad (14)$$

Доказательство. Пусть $o_i \in V$. Тогда по определению

$$o_i \in J(\rho, q, V) \iff \exists t: |f(t - t_i) - x| + |f_q(t - t_q) - y_i| \leq \rho.$$

Введем обозначение

$$\xi = f(t - t_i) - x.$$

Тогда

$$o_i \in J(\rho, q, V) \iff \exists \xi: g(\xi) = |\xi| + |f_q(f^{-1}(x + \xi) + t_i - t_q) - y_i| \leq \rho.$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1: $f(f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i) - x \geq 0$. Этот случай соответствует ситуации, когда объект пролетел точку x к моменту, когда запрос достиг точки y_i . Раскрывая это неравенство, получаем, что

$$\begin{aligned} f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i &\geq f^{-1}(x), \\ t_i - t_q &\leq f_q^{-1}(y_i) - f^{-1}(x) \leq f_q^{-1}(y_i + \rho) - f^{-1}(x) \leq F_R(x, y_i). \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что в данном случае минимум $g(\xi)$ нужно искать на отрезке $[0, f(f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i) - x]$, на котором

$$g(\xi) = \xi - f_q(f^{-1}(x + \xi) + t_i - t_q) + y_i \leq \rho.$$

Последнее равносильно неравенству

$$t_i - t_q \geq f_q^{-1}(y_i + \xi - \rho) - f^{-1}(x + \xi).$$

Теперь покажем, что условие $\xi \in [0, f(f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i) - x]$ эквивалентно условию $\xi \in [0, \rho]$. Если $f(f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i) - x \leq \rho$, то возьмем $\xi_1 = f(f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i) - x$ и, очевидно, $g(\xi_1) \leq \rho$, а если $f(f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i) - x > \rho$, то для любого $\xi_2 \in (\rho, f(f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i) - x]$ справедливо неравенство $g(\xi_2) \geq \xi_2 > \rho$, то есть в этом случае искомая точка минимума лежит на отрезке $[0, \rho]$.

Случай 2: $f(f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i) - x < 0$. Этот случай соответствует ситуации, когда запрос достиг точки y_i , а объект еще не долетел до точки x . Раскрывая это неравенство, получаем, что

$$\begin{aligned} f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i &< f^{-1}(x), \\ t_i - t_q &> f_q^{-1}(y_i) - f^{-1}(x) \geq f_q^{-1}(y_i - \rho) - f^{-1}(x) \geq F_L(x, y_i). \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что в данном случае минимум $g(\xi)$ нужно искать на отрезке $[f(f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i) - x, 0]$, на котором

$$g(\xi) = -\xi - y_i + f_q(f^{-1}(x + \xi) + t_i - t_q) \leq \rho.$$

Последнее равносильно неравенству

$$t_i - t_q \leq f_q^{-1}(y_i + \xi + \rho) - f^{-1}(x + \xi).$$

Аналогично первому случаю, условие $\xi \in [f(f_q^{-1}(y_i) + t_q - t_i) - x, 0]$ можно заменить на условие $\xi \in [-\rho, 0]$.

Лемма 1 доказана.

4.3. Достаточность

Пусть выполнены условия теоремы 1 и существуют некоторые функции $\psi, \psi_L, \psi_R: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, такие, что выполнены условия (6), (7). Пусть X_R, X_L и Y_L — множества, задаваемые соотношениями (3), (4) и (5) соответственно.

Заметим, что $X_R \subseteq X_L$ и некоторые из этих множеств могут быть пустыми. Поскольку функции $F_R(x, y)$, $F_L(x, y)$ возрастают и непрерывны по y при фиксированном x , но убывают и непрерывны по x при фиксированном y , то для множества X_R верно, что если оно не пусто, то $X_R = [\alpha_{xR}, 1]$ для некоторого положительного α_{xR} .

Аналогично, если $X_L \neq \emptyset$, то $X_L = [\alpha_{xL}, 1]$, и если $Y_L \neq \emptyset$, то $Y_L = [0, \alpha_{yL})$.

Пусть $\psi^*, \psi_R^*, \psi_L^*: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ — функции, определяемые соотношениями (8), (9) и (10) соответственно.

По определению и лемме 1, ψ^* не убывает на всей области определения, а ψ_L^*, ψ_R^* не возрастают, и при этом $\psi_L^*(x) \leq \psi_R^*(x)$ для любого x из отрезка $[0, 1]$.

Покажем, что если выполнены условия теоремы 1, то для любой пары (x, y) , такой, что $F_L(x, y) > 0$, справедливо неравенство

$$\psi^*(y) + \psi_L^*(x) > 0, \quad (15)$$

а для любой пары (x, y) , такой, что $F_R(x, y) > 0$, справедливо неравенство

$$\psi^*(y) + \psi_R^*(x) > 0. \quad (16)$$

Докажем (15). Пусть $F_L(x, y) > 0$. Возможны два случая.

1. $y \leq \alpha_{yL}$. Следовательно, существует $x_1 > x$ такой, что $F_L(x_1, y) \leq 0$. Из непрерывности и убывания $F_L(x, y)$ по x при фиксированном y следует, что существует $x_0 \in [x, x_1]$, такой, что

$$0 = F_L(x_0, y) = \psi_L^*(x_0) + \psi^*(y) < \psi_L^*(x) + \psi^*(y).$$

Последнее неравенство выполняется в силу убывания функции $\psi_L(x)$.

2. $y > \alpha_{yL}$. Следовательно,

$$\psi_L^*(x) + \psi^*(y) = \psi_L^*(x) + F_L(0, 1) \geq \psi_L^*(x) + \psi^*(\alpha_{yL}) > 0.$$

Последнее неравенство выполняется в силу предыдущего пункта.

Аналогично доказывается неравенство (16).

Пусть $\varphi, \varphi_1, \varphi_2: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ — отображения, задаваемые соотношениями (11), (12) и (13) соответственно. Покажем, что для произвольного запроса $q = (t_q, x)$ и произвольного объекта $o_i = (t_i, y_i)$ из библиотеки $V = V(t_q)$ выполнено соотношение

$$o_i \in J(\rho, q, V) \iff \varphi(o_i) \in J([\varphi_1(q), \varphi_2(q)], Z),$$

где

$$Z = \{\varphi(o): o \in V\}.$$

По лемме 1,

$$o_i \in J(\rho, q, V) \iff t_i - t_q \in [F_L(x, y_i), F_R(x, y_i)].$$

Рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть (x, y) таковы, что $F_R(x, y) \leq 0$. Тогда по условию верно, что

$$\begin{aligned} F_L(x, y) &= \psi^*(y) + \psi_1^*(x), \\ F_R(x, y) &= \psi^*(y) + \psi_2^*(x), \end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned} t_i - t_q \in [F_L(x, y_i), F_R(x, y_i)] &\iff t_i - \psi^*(y_i) \in [t_q + \psi_1^*(x), t_q + \psi_2^*(x)] \\ &\iff \varphi(o_i) \in [\varphi_1(q), \varphi_2(q)] \\ &\iff \varphi(o_i) \in J([\varphi_1(q), \varphi_2(q)], Z), \end{aligned}$$

где

$$Z = \{\varphi(o): o \in V\}.$$

2. Пусть (x, y) таковы, что $F_L(x, y) \leq 0, F_R(x, y) > 0$. Тогда по доказанному ранее верно, что

$$F_L(x, y) = \psi^*(y) + \psi_1^*(x), \quad \psi^*(y) + \psi_2^*(x) > 0.$$

Поскольку $o_i \in V(t_q)$, то $t_i - t_q \leq 0$ и

$$\begin{aligned} t_i - t_q \in [F_L(x, y_i), F_R(x, y_i)] &\iff t_i - t_q \in [F_L(x, y_i), \psi^*(y) + \psi_2^*(x)] \\ &\iff t_i - t_q \in [\psi^*(y) + \psi_1^*(x), \psi^*(y) + \psi_2^*(x)] \\ &\iff \varphi(o_i) \in [\varphi_1(q), \varphi_2(q)] \\ &\iff \varphi(o_i) \in J([\varphi_1(q), \varphi_2(q)], Z). \end{aligned}$$

3. Пусть (x, y) таковы, что $F_L(x, y) > 0$. Тогда по доказанному ранее верно, что

$$\psi^*(y) + \psi_1^*(x) > 0, \quad \psi^*(y) + \psi_2^*(x) > 0.$$

Поскольку $o_i \in V(t_q)$, то $t_i - t_q \leq 0$ и

$$\begin{aligned} t_i - t_q \notin [F_L(x, y_i), F_R(x, y_i)] &\iff t_i - t_q \notin [\psi^*(y) + \psi_2^*(x), \psi^*(y) + \psi_2^*(x)] \\ &\iff \varphi(o_i) \notin J([\varphi_1(q), \varphi_2(q)], Z). \end{aligned}$$

Достаточность доказана.

Рис. 3. Два возможных расположения точек $\varphi(o_1)$, $\varphi(o_2)$, $\varphi(o_3)$

4.4. Необходимость

Лемма 2. Если для задачи об опасной близости (f, f_q, ρ) существует четыре объекта $\{o_1, o_2, o_3, o_4\}$ и четыре запроса $\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$, такие что

$$\begin{aligned} V(t_q^1) = V(t_q^2) = V(t_q^3) = V(t_q^4) = \{o_1, o_2, o_3, o_4\} = V, \\ J(\rho, q_1, V) = \{o_1, o_2\}, \quad J(\rho, q_2, V) = \{o_1, o_3\}, \\ J(\rho, q_3, V) = \{o_1, o_2, o_4\}, \quad J(\rho, q_4, V) = \{o_1, o_3, o_4\}, \end{aligned} \quad (17)$$

то задача об опасной близости (f, f_q, ρ) не может быть сведена к задаче одномерного интервального поиска.

Доказательство. Пусть утверждение леммы неверно. Тогда существуют отображения $\varphi, \varphi_1, \varphi_2: \mathbf{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, такие, что для библиотеки V , любого запроса q_j , $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, и любого объекта o_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ справедливо соотношение

$$o_i \in J(\rho, q_j, V) \iff \varphi(o_i) \in J([\varphi_1(q_j), \varphi_2(q_j)], Z),$$

где

$$Z = \{\varphi(o_i) : i \in \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

Так как

$$J(\rho, q_1, V) = \{o_1, o_2\},$$

на прямой $\mathbf{R}$ должен существовать отрезок $[\varphi_1(q_1), \varphi_2(q_1)]$, который содержит только точки $\varphi(o_1)$, $\varphi(o_2)$ и не содержит точки $\varphi(o_3)$, $\varphi(o_4)$.

Так как

$$J(\rho, q_2, V) = \{o_1, o_3\},$$

на прямой $\mathbf{R}$ должен существовать отрезок $[\varphi_1(q_2), \varphi_2(q_2)]$, который содержит только точки $\varphi(o_1)$, $\varphi(o_3)$ и не содержит точки $\varphi(o_2)$, $\varphi(o_4)$.

Отсюда следует, что возможны только два расположения тройки точек $\varphi(o_1)$, $\varphi(o_2)$, $\varphi(o_3)$ (они показаны на рис. 3), и при этом в обоих случаях $\varphi(o_4)$ не может лежать между $\varphi(o_2)$ и $\varphi(o_3)$.

Так как

$$J(\rho, q_3, V) = \{o_1, o_2, o_4\},$$

Рис. 4. Два возможных расположения точек $\varphi(o_1)$, $\varphi(o_2)$, $\varphi(o_3)$, $\varphi(o_4)$

на прямой $\mathbf{R}$ должен существовать отрезок $[\varphi_1(q_3), \varphi_2(q_3)]$, который содержит только точки $\varphi(o_1)$, $\varphi(o_2)$, $\varphi(o_4)$ и не содержит точки $\varphi(o_3)$. Тогда в первом случае точка $\varphi(o_4)$ должна располагаться на прямой $\mathbf{R}$ правее $\varphi(o_2)$, а во втором случае — левее $\varphi(o_2)$. Данное расположение показано на рис. 4.

Но, так как

$$J(\rho, q_4, V) = \{o_1, o_3, o_4\},$$

на прямой $\mathbf{R}$ должен существовать отрезок $[\varphi_1(q_4), \varphi_2(q_4)]$, который содержит только точки $\varphi(o_1)$, $\varphi(o_3)$, $\varphi(o_4)$ и не содержит точки $\varphi(o_2)$. На рис. 4 видно, что такого отрезка не существует в обоих случаях.

Тем самым лемма 2 доказана.

Лемма 3. Если задача об опасной близости (f, f_q, ρ) сводится к задаче одномерного интервального поиска, то существуют функции $\psi'_L, \psi'_R: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ и функция $g: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbf{R}$, такие, что для любой пары (x, y) такой, что $F_R(x, y) \leq 0$

$$F_L(x, y) = g(x, y) + \psi'_L(x),$$

$$F_R(x, y) = g(x, y) + \psi'_R(x).$$

Доказательство. Докажем утверждение для случая $F_R(x, y) < 0$. Пусть

$$\zeta(x, y) = F_R(x, y) - F_L(x, y).$$

Покажем, что $\zeta(x, y)$ зависит существенно только от x . Предположим, что это не так. Тогда существует тройка (x_0, y^1, y^2) , такая, что $F_R(x_0, y^1) < 0$, $F_R(x_0, y^2) < 0$ и $\zeta(x_0, y^1) > \zeta(x_0, y^2)$. Для доказательства будем использовать схему (17). Для объекта $o_i = (t_i, y^i)$ положим

$$t'_i = t_i - F_R(x_0, y^i).$$

Тогда для объекта $o_i \in V(t_q)$ и запроса $q(t_q, x_0)$, в соответствии с леммой 1,

$$o_i \in J(\rho, q, V) \iff t_q \in [t', t' + \zeta(x_0, y^i)].$$

Выберем

$$\varepsilon \in \left(0, \min \left\{ \frac{\zeta(x_0, y^1) - \zeta(x_0, y^2)}{3}, \frac{\zeta(x_0, y^1)}{2}, \zeta(x_0, y^2), -\frac{F_R(x_0, y^2)}{2}, -\frac{F_R(x_0, y^1)}{2}, \frac{1}{2}(F_L(x_0, y^2) + \tau_{\max}), \frac{1}{3}(\tau_{\max} + F_R(x_0, y^1)) \right\} \right) \quad (18)$$

Рис. 5. Расположение моментов появления объектов и запросов

и произвольное число t . Зададим объекты следующим образом:

$$\begin{aligned} o_1 &= (t + F_R(x_0, y^1), y^1), & o_2 &= (t + F_R(x_0, y^2) + \varepsilon, y^2), \\ o_3 &= (t + F_R(x_0, y^2) + 3\varepsilon, y^2), & o_4 &= (t + F_R(x_0, y^2) + 2\varepsilon, y^2). \end{aligned}$$

Для этих объектов

$$t'_1 = t, \quad t'_2 = t + \varepsilon, \quad t'_3 = t + 3\varepsilon, \quad t'_4 = t + 2\varepsilon.$$

Зададим запросы следующим образом:

$$\begin{aligned} q_1 &= (t + \varepsilon, x_0), & q_2 &= (t + 3\varepsilon + \zeta(x_0, y^2), x_0), \\ q_3 &= (t + 2\varepsilon, x_0), & q_4 &= (t + \zeta(x_0, y^2) + 2\varepsilon, x_0). \end{aligned}$$

Моменты t'_i и t_q^j показаны на рис. 5, где $\zeta_i = \zeta(x_0, y^i)$.

Покажем, что

$$V = V(t_q^1) = V(t_q^2) = V(t_q^3) = V(t_q^4) = \{o_1, o_2, o_3, o_4\},$$

то есть $t_q^j \in [t_i, t_i + \tau_{\max}]$, где $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Для этого необходимо показать, что $\min_{j=1, \dots, 4} t_q^j \geq \max_{i=1, \dots, 4} t_i$ и $\max_{j=1, \dots, 4} t_q^j \leq \min_{i=1, \dots, 4} t_i + \tau_{\max}$.

Справедливы следующие утверждения:

$$\min_{j=1, \dots, 4} t_q^j = t + \varepsilon \geq t + \max_{k=1, 2} F_R(x_0, y^k) + 3\varepsilon = \max_{i=1, \dots, 4} t_i,$$

что равносильно $\varepsilon \leq -\max_{k=1, 2} \frac{1}{2} F_R(x_0, y^k)$ и это верно из-за выбора ε ;

$$\begin{aligned} \max_{j=1, \dots, 4} t_q^j &= t + 3\varepsilon + \zeta(x_0, y^2) \geq \min_{i=1, \dots, 4} t_i + \tau_{\max} \\ &= t + \min\{F_R(x_0, y^1), F_R(x_0, y^2) + \varepsilon\} + \tau_{\max}, \end{aligned}$$

что выполнено, поскольку в силу выбора ε справедливы неравенства

$$\varepsilon \geq \frac{F_L(x_0, y^2) + \tau_{\max}}{2}, \quad \varepsilon \geq \frac{F_R(x_0, y^1) + \tau_{\max}}{3}.$$

Используя утверждение леммы 1, покажем, что справедливы равенства

$$\begin{aligned} J(\rho, q_1, V) &= \{o_1, o_2\}, & J(\rho, q_2, V) &= \{o_1, o_3\}, \\ J(\rho, q_3, V) &= \{o_1, o_2, o_4\}, & J(\rho, q_4, V) &= \{o_1, o_3, o_4\}. \end{aligned}$$

Далее,

$$o_1 \in J(\rho, q_1, V) \iff F_R(x_0, y^1) - \varepsilon \in [F_L(x_0, y^1), F_R(x_0, y^1)],$$

что верно, поскольку в силу (18) $\varepsilon < F_R(x_0, y^1) - F_L(x_0, y^1) = \zeta(x_0, y^1)$;

$$o_2 \in J(\rho, q_1, V) \iff F_R(x_0, y^2) \in [F_L(x_0, y^2), F_R(x_0, y^2)],$$

что верно;

$$o_3 \notin J(\rho, q_1, V) \iff F_R(x_0, y^2) + 2\varepsilon \notin [F_L(x_0, y^2), F_R(x_0, y^2)],$$

что верно, поскольку $\varepsilon > 0$;

$$o_4 \notin J(\rho, q_1, V) \iff F_R(x_0, y^2) + \varepsilon \notin [F_L(x_0, y^2), F_R(x_0, y^2)],$$

что верно, поскольку $\varepsilon > 0$;

$$\begin{aligned} o_1 \in J(\rho, q_2, V) &\iff F_R(x_0, y^1) - 3\varepsilon - \zeta(x_0, y^2) \in [F_L(x_0, y^1), F_R(x_0, y^1)] \\ &\iff -3\varepsilon - \zeta(x_0, y^2) \in [-\zeta(x_0, y^1), 0] \\ &\iff \varepsilon \in [0, \frac{1}{3}(\zeta(x_0, y^1) - \zeta(x_0, y^2))], \end{aligned}$$

что верно по условию (18) выбора ε ;

$$o_2 \notin J(\rho, q_2, V) \iff F_L(x_0, y^2) - 2\varepsilon \notin [F_L(x_0, y^2), F_R(x_0, y^2)],$$

что верно, поскольку $\varepsilon > 0$;

$$o_3 \in J(\rho, q_2, V) \iff F_L(x_0, y^2) \in [F_L(x_0, y^2), F_R(x_0, y^2)],$$

что верно;

$$o_4 \notin J(\rho, q_2, V) \iff F_L(x_0, y^2) - \varepsilon \notin [F_L(x_0, y^2), F_R(x_0, y^2)],$$

что верно, поскольку $\varepsilon > 0$;

$$o_1 \in J(\rho, q_3, V) \iff F_R(x_0, y^1) - 2\varepsilon \in [F_L(x_0, y^1), F_R(x_0, y^1)],$$

что верно, поскольку $0 < \varepsilon < \zeta(x_0, y^1)/2$ в силу (18);

$$o_2 \in J(\rho, q_3, V) \iff F_R(x_0, y^2) - \varepsilon \in [F_L(x_0, y^2), F_R(x_0, y^2)],$$

что верно, поскольку $0 < \varepsilon < \zeta(x_0, y^2)$ в силу (18);

$$o_3 \notin J(\rho, q_3, V) \iff F_R(x_0, y^2) + \varepsilon \notin [F_L(x_0, y^2), F_R(x_0, y^2)],$$

что верно, поскольку $\varepsilon > 0$;

$$o_4 \in J(\rho, q_3, V) \iff F_R(x_0, y^2) \in [F_L(x_0, y^2), F_R(x_0, y^2)],$$

что верно;

$$o_1 \in J(\rho, q_4, V) \iff F_R(x_0, y^1) - 2\varepsilon - \zeta(x_0, y^2) \in [F_L(x_0, y^1), F_R(x_0, y^1)],$$

что верно, поскольку $0 < 2\varepsilon < \zeta(x_0, y^1) - \zeta(x_0, y^2)$ в силу (18);

$$o_2 \notin J(\rho, q_4, V) \iff F_L(x_0, y^2) - \varepsilon \notin [F_L(x_0, y^2), F_R(x_0, y^2)],$$

что верно, поскольку $\varepsilon > 0$;

$$o_3 \in J(\rho, q_4, V) \iff F_L(x_0, y^2) + \varepsilon \in [F_L(x_0, y^2), F_R(x_0, y^2)],$$

что верно, поскольку $0 < \varepsilon < F_R(x_0, y^2) - F_L(x_0, y^2) = \zeta(x_0, y^2)$;

$$o_4 \in J(\rho, q_4, V) \iff F_L(x_0, y^2) \in [F_L(x_0, y^2), F_R(x_0, y^2)],$$

что верно.

Докажем теперь утверждение для случая $F_R(x, y) = 0$. Выберем последовательность $(x_n) \rightarrow x$ такую, что $x_n > x$. Для этой последовательности получим, что $F_R(x_n, y) < 0$, $F_R(x_n, y) \rightarrow F_R(x, y)$, $F_L(x_n, y) \rightarrow F_L(x, y)$. По доказанному, $F_R(x_n, y) - F_L(x_n, y)$ зависит только от x_n . Обозначим эту функцию $\psi(x_n)$. Данная функция непрерывна, так как непрерывны функции $F_R(x_n, y)$, $F_L(x_n, y)$. Поэтому разность $F_R(x, y) - F_L(x, y) = \psi(x)$ также не зависит от y .

Лемма 3 доказана.

Введем обозначение

$$h_{x_0, x_1}(y) = F_L(x_0, y) - F_L(x_1, y).$$

Лемма 4. Если задача об опасной близости (f, f_q, ρ) сводится к задаче одномерного интервального поиска, то для любых $x_0, x_1 \in [0, 1]$ таких, что $x_0 < x_1$, функция $h_{x_0, x_1}(y)$ принимает не более двух значений для y из области

$$F_L(x_0, y) < 0, \quad h_{x_0, x_1}(y) \leq F_L(1, 0) + \tau_{\max}. \quad (19)$$

Доказательство. Сначала заметим, что $h_{x_0, x_1}(y) > 0$ для любого y при $x_0 < x_1$.

Предположим, что утверждение леммы неверно, то есть существуют $y^0, y^1, y^2 \in [0, 1]$ из области (19), такие, что

$$0 < h_{x_0, x_1}(y^0) < h_{x_0, x_1}(y^1) < h_{x_0, x_1}(y^2). \quad (20)$$

Будем использовать схему доказательства (17).

Выберем

$$\varepsilon \in (0, \min\{h_{x_0, x_1}(y^1), h_{x_0, x_1}(y^2) - h_{x_0, x_1}(y^1), h_{x_0, x_1}(y^1) - h_{x_0, x_1}(y^0), \\ -F_L(x_0, y^0), -F_L(x_0, y^1), F_L(x_1, y^1) + \tau_{\max}, \min_{\substack{i=0,1 \\ j=0,1,2}} \{F_R(x_i, y^j) - F_L(x_i, y^j)\}\}). \quad (21)$$

Введем обозначение

$$t_q^2 = F_L(x_0, y^1) - F_L(x_1, y^1) = h_{x_0, x_1}(y^1).$$

Заметим, что $t_q^2 > \varepsilon > 0$ согласно (21).

Зададим параметры объектов и запросов следующим образом:

$$\begin{aligned} o_1 &= (t_1, y_1) = (F_L(x_0, y^1), y^1), & o_2 &= (t_2, y_2) = (F_L(x_0, y^0), y^0), \\ o_3 &= (t_3, y_3) = (F_L(x_1, y^2) + t_q^2, y^2), & o_4 &= (t_4, y_4) = (F_L(x_1, y^1) + t_q^2 - \varepsilon, y^1) \\ & & &= (F_L(x_0, y^1) - \varepsilon, y^1), \\ q_1 &= (t_q^1, x^1) = (0, x_0), & q_2 &= (t_q^2, x^2) = (t_q^2, x_1), \\ q_3 &= (t_q^3, x^3) = (-\varepsilon, x_0), & q_4 &= (t_q^4, x^4) = (t_q^2 - \varepsilon, x_1). \end{aligned}$$

Покажем, что

$$V(t_q^1) = V(t_q^2) = V(t_q^3) = V(t_q^4) = \{o_1, o_2, o_3, o_4\}.$$

По определению, $o = (t, y) \in V(t_q)$, если $t_q \in [t, t + \tau_{\max}]$. Таким образом, необходимо показать, что

$$\begin{aligned} \min_{1 \leq j \leq 4} t_q^j &\geq \max_{1 \leq i \leq 4} t_i, \\ \max_{1 \leq j \leq 4} t_q^j &\leq \min_{1 \leq i \leq 4} t_i + \tau_{\max}. \end{aligned}$$

Разобьем доказательство на две части.

Часть 1. Поскольку

$$\varepsilon \leq \min\{-F_L(x_0, y^0), -F_L(x_0, y^1)\},$$

в силу (21) верно

$$\begin{aligned} \min_{1 \leq j \leq 4} t_q^j &\geq \max_{1 \leq i \leq 4} t_i \iff -\varepsilon \geq \max\{F_L(x_0, y^0), F_L(x_0, y^1), F_L(x_1, y^2) + t_q^2\} \\ &\iff \varepsilon \leq \min\{-F_L(x_0, y^0), -F_L(x_0, y^1), -F_L(x_1, y^2) - h_{x_0, x_1}(y^1)\}, \end{aligned}$$

где последнее неравенство вытекает из соотношений

$$\begin{aligned} \varepsilon &< h_{x_0, x_1}(y^2) - h_{x_0, x_1}(y^1) = F_L(x_0, y^2) - F_L(x_1, y^2) - h_{x_0, x_1}(y^1) \\ &< -F_L(x_1, y^2) - h_{x_0, x_1}(y^1); \end{aligned}$$

последнее верно, поскольку $F_L(x_0, y^2) < 0$.

Часть 2. Верно, что

$$\begin{aligned} \max_j t_q^j &\leq \min_i t_i + \tau_{\max} \iff t_q^2 = F_L(x_0, y^1) - F_L(x_1, y^1) \\ &\leq \min\{t_1, t_2, t_3, t_4\} + \tau_{\max} \\ &= \min\{F_L(x_0, y^0), t_q^2 + F_L(x_1, y^2), F_L(x_0, y^1) - \varepsilon\} + \tau_{\max}. \end{aligned}$$

Проверим каждое из этих неравенств:

$$F_L(x_0, y^1) - F_L(x_1, y^1) \leq F_L(x_0, y^0) + \tau_{\max},$$

так как по условию (19) леммы 4

$$F_L(x_0, y^1) - F_L(x_1, y^1) \leq F_L(1, 0) + \tau_{\max} \leq F_L(x_0, y^0) + \tau_{\max};$$

далее,

$$t_q^2 \leq t_q^2 + F_L(x_1, y^2) + \tau_{\max},$$

так как $-F_L(x_1, y^2) \leq \tau_{\max}$ по свойству 3; наконец,

$$F_L(x_0, y^1) - F_L(x_1, y^1) \leq F_L(x_0, y^1) - \varepsilon + \tau_{\max},$$

так как $\varepsilon < F_L(x_1, y^1) + \tau_{\max}$ согласно (21).

Теперь, используя утверждение леммы 1, покажем, что

$$\begin{aligned} J(\rho, q_1, V) &= \{o_1, o_2\}, & J(\rho, q_2, V) &= \{o_1, o_3\}, \\ J(\rho, q_3, V) &= \{o_1, o_2, o_4\}, & J(\rho, q_4, V) &= \{o_1, o_3, o_4\}, \end{aligned}$$

для чего рассмотрим следующие шаги:

$$\begin{aligned} o_1 \in J(\rho, q_1, V) &\iff t_1 - 0 \in [F_L(x_0, y^1), F_R(x_0, y^1)] \\ &\iff F_L(x_0, y^1) \in [F_L(x_0, y^1), F_R(x_0, y^1)], \end{aligned}$$

что верно;

$$\begin{aligned} o_2 \in J(\rho, q_1, V) &\iff t_2 - 0 \in [F_L(x_0, y^0), F_R(x_0, y^0)] \\ &\iff F_L(x_0, y^0) \in [F_L(x_0, y^0), F_R(x_0, y^0)], \end{aligned}$$

что верно;

$$\begin{aligned} o_3 \notin J(\rho, q_1, V) &\iff t_3 - 0 \notin [F_L(x_0, y^2), F_R(x_0, y^2)] \\ &\iff F_L(x_1, y^2) + F_L(x_0, y^1) - F_L(x_1, y^1) \notin [F_L(x_0, y^2), F_R(x_0, y^2)], \end{aligned}$$

что верно, поскольку по предположению (20) $h_{x_0, x_1}(y^1) < h_{x_0, x_1}(y^2)$, что равносильно

$$F_L(x_1, y^2) + F_L(x_0, y^1) - F_L(x_1, y^1) < F_L(x_0, y^2);$$

далее,

$$\begin{aligned} o_4 \notin J(\rho, q_1, V) &\iff t_4 - 0 \notin [F_L(x_0, y^1), F_R(x_0, y^1)] \\ &\iff F_L(x_0, y^1) - \varepsilon \notin [F_L(x_0, y^1), F_R(x_0, y^1)], \end{aligned}$$

что верно;

$$\begin{aligned} o_1 \in J(\rho, q_2, V) &\iff t_1 - t_q^2 \in [F_L(x_1, y^1), F_R(x_1, y^1)] \\ &\iff F_L(x_1, y^1) \in [F_L(x_1, y^1), F_R(x_1, y^1)], \end{aligned}$$

что верно;

$$\begin{aligned} o_2 \notin J(\rho, q_2, V) &\iff t_2 - t_q^2 \notin [F_L(x_1, y^0), F_R(x_1, y^0)] \\ &\iff F_L(x_0, y^0) - F_L(x_0, y^1) + F_L(x_1, y^1) \notin [F_L(x_1, y^0), F_R(x_1, y^0)], \end{aligned}$$

что верно, так как по предположению (20) $h_{x_0, x_1}(y^0) < h_{x_0, x_1}(y^1)$, что равносильно

$$F_L(x_0, y^0) - F_L(x_0, y^1) + F_L(x_1, y^1) < F_L(x_1, y^0);$$

далее,

$$\begin{aligned} o_3 \in J(\rho, q_2, V) &\iff t_3 - t_q^2 \in [F_L(x_1, y^2), F_R(x_1, y^2)] \\ &\iff F_L(x_1, y^2) \in [F_L(x_1, y^2), F_R(x_1, y^2)], \end{aligned}$$

что верно;

$$\begin{aligned} o_4 \notin J(\rho, q_2, V) &\iff t_4 - t_q^2 \notin [F_L(x_1, y^1), F_R(x_1, y^1)] \\ &\iff F_L(x_0, y^1) - \varepsilon \notin [F_L(x_1, y^1), F_R(x_1, y^1)], \end{aligned}$$

что верно;

$$\begin{aligned} o_1 \in J(\rho, q_3, V) &\iff t_1 + \varepsilon \in [F_L(x_0, y^1), F_R(x_0, y^1)] \\ &\iff F_L(x_0, y^1) + \varepsilon \in [F_L(x_0, y^1), F_R(x_0, y^1)], \end{aligned}$$

что верно, поскольку $\varepsilon < F_R(x_0, y^1) - F_L(x_0, y^1)$ согласно (21);

$$\begin{aligned} o_2 \in J(\rho, q_3, V) &\iff t_2 + \varepsilon \in [F_L(x_0, y^0), F_R(x_0, y^0)] \\ &\iff F_L(x_0, y^0) + \varepsilon \in [F_L(x_0, y^0), F_R(x_0, y^0)], \end{aligned}$$

что верно, поскольку $\varepsilon < F_R(x_0, y^0) - F_L(x_0, y^0)$ согласно (21);

$$\begin{aligned} o_3 \notin J(\rho, q_3, V) &\iff t_3 + \varepsilon \notin [F_L(x_0, y^2), F_R(x_0, y^2)] \\ &\iff F_L(x_1, y^2) + F_L(x_0, y^1) - F_L(x_1, y^1) \\ &\quad + \varepsilon \notin [F_L(x_0, y^2), F_R(x_0, y^2)], \end{aligned}$$

что верно, поскольку $\varepsilon < h_{x_0, x_1}(y^2) - h_{x_0, x_1}(y^1)$, а это неравенство равносильно неравенству

$$F_L(x_1, y^2) + F_L(x_0, y^1) - F_L(x_1, y^1) + \varepsilon < F_L(x_0, y^2);$$

далее,

$$\begin{aligned} o_4 \in J(\rho, q_3, V) &\iff t_4 + \varepsilon \in [F_L(x_0, y^1), F_R(x_0, y^1)] \\ &\iff F_L(x_0, y^1) \in [F_L(x_0, y^1), F_R(x_0, y^1)], \end{aligned}$$

что верно;

$$\begin{aligned} o_1 \in J(\rho, q_4, V) &\iff t_1 - t_q^2 + \varepsilon \in [F_L(x_1, y^1), F_R(x_1, y^1)] \\ &\iff F_L(x_1, y^1) + \varepsilon \in [F_L(x_1, y^1), F_R(x_1, y^1)], \end{aligned}$$

Рис. 6. Расположение моментов появления объектов и запросов для случая $y^0 < y^1 < y^2$

что верно, поскольку $\varepsilon < F_R(x_1, y^1) - F_L(x_1, y^1)$ согласно (21);

$$\begin{aligned} o_2 \notin J(\rho, q_4, V) &\iff t_2 - t_q^2 + \varepsilon \notin [F_L(x_1, y^0), F_R(x_1, y^0)] \\ &\iff F_L(x_0, y^0) - F_L(x_0, y^1) + F_L(x_1, y^1) \\ &\quad + \varepsilon \notin [F_L(x_1, y^0), F_R(x_1, y^0)], \end{aligned}$$

что верно, поскольку согласно (21) $\varepsilon < h_{x_0, x_1}(y^2) - h_{x_0, x_1}(y^1)$, что равносильно тому, что

$$F_L(x_0, y^0) - F_L(x_0, y^1) + F_L(x_1, y^1) + \varepsilon < F_L(x_1, y^0);$$

далее,

$$\begin{aligned} o_3 \in J(\rho, q_4, V) &\iff t_3 - t_q^2 + \varepsilon \in [F_L(x_1, y^2), F_R(x_1, y^2)] \\ &\iff F_L(x_1, y^2) + \varepsilon \in [F_L(x_1, y^2), F_R(x_1, y^2)], \end{aligned}$$

что верно, поскольку $\varepsilon < F_R(x_1, y^2) - F_L(x_1, y^2)$ согласно (21);

$$\begin{aligned} o_4 \in J(\rho, q_4, V) &\iff t_4 - t_q^2 + \varepsilon \in [F_L(x_1, y^1), F_R(x_1, y^1)] \\ &\iff F_L(x_1, y^1) \in [F_L(x_1, y^1), F_R(x_1, y^1)], \end{aligned}$$

что верно.

Отсюда, согласно лемме 2, следует справедливость утверждения леммы 4.

Рассмотрим теперь графическую интерпретацию доказательства леммы 4. Вспомним, что по основной лемме 1 объект $o_i = (t_i, y_i)$ из библиотеки $V = V(t_q)$ принадлежит ответу на запрос $q = (t_q, x)$ (то есть $o_i \in J(\rho, q, V)$) тогда и только тогда, когда $t_i - t_q \in [F_L(x, y_i), F_R(x, y_i)]$. Рассмотрим двумерный график на рис. 6. На оси абсцисс будем откладывать координаты появления объектов, а на оси ординат — моменты появления объектов. Таким образом, каждому объекту $o_i = (t_i, y_i)$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, будет

соответствовать точка с координатой y_i по оси абсцисс и координатой t_i по оси ординат. На рис. 6 изображены данные точки для случая $y_0 < y_1 < y_2$.

Каждому запросу (t_q, x^0) в данных координатах поставим в соответствие две функции

$$t_L(y) = t_q + F_L(x^0, y),$$

$$t_R(y) = t_q + F_R(x^0, y).$$

Таким образом, по основной лемме в ответ на запрос (t_q, x^0) попадут те объекты из библиотеки $V = V(t_q)$, которым соответствуют точки, лежащие между линиями $t_1(y)$ и $t_2(y)$ (либо на самих линиях).

На рис. 6 для удобства изображены только нижние функции, соответствующие запросам q_1, q_2, q_3 и q_4 , в виде прямых. Из рис. 6 видно, что

$$\begin{aligned} J(\rho, q_1, V) &= \{o_1, o_2\}, & J(\rho, q_2, V) &= \{o_1, o_3\}, \\ J(\rho, q_3, V) &= \{o_1, o_2, o_4\}, & J(\rho, q_4, V) &= \{o_1, o_3, o_4\}. \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$\Delta = F_L(1, 0) + \tau_{\max}.$$

Лемма 5. *Существует число $\delta > 0$, такое, что для любых $x, y \in [0, 1]$*

$$F_L(x, y) - F_L(x + \delta, y) < \Delta.$$

Справедливость данной леммы следует из непрерывности $F_L(x, y)$ по x и по y внутри квадрата $[-\rho, 1 + \rho]^2$.

Лемма 6. *Если δ — число, существование которого доказывается леммой 5, то для любой пары $(x, y) \in [0, 1]^2$ такой, что $F_L(x, y) \leq 0$, и для любого $\delta_0 \in (0, \delta)$ справедливо равенство*

$$h_{x, x+\delta_0}(y) = h_{x, x+\delta_0}(0).$$

Доказательство. Сначала докажем, что утверждение верно для пары (x_1, y_1) такой, что $F_L(x_1, y_1) < 0$.

Для $y_1 = 0$ утверждение очевидно. Пусть $y_1 > 0$.

Допустим противное, пусть $h_{x, x+\delta_0}(y_1) \neq h_{x, x+\delta_0}(0)$.

Поскольку $\delta_0 \in (0, \delta)$, с использованием леммы 5 получаем

$$h_{x, x+\delta_0}(y) = F_L(x_1, y) - F_L(x_1 + \delta_0, y) < \Delta$$

и, значит, по лемме 4 $h_{x, x+\delta_0}(y)$ на отрезке $[0, 1]$ может принимать не более двух различных значений. По предположению, одно из этих значений равно $h_{x, x+\delta_0}(y_1)$, а другое равно $h_{x, x+\delta_0}(0)$.

Построим две бесконечные последовательности (y_n^0) и (y_n^1) , такие, что $h_{x, x+\delta_0}(y_n^0) = h_{x, x+\delta_0}(0)$, $h_{x, x+\delta_0}(y_n^1) = h_{x, x+\delta_0}(y_1)$.

На первом шаге отнесем к первой последовательности 0, а ко второй y_1 , то есть $y_1^0 = 0$, $y_1^1 = y_1$.

На втором шаге рассмотрим $y_2 = |y_1^0 - y_1^1|/2$. Если $h_{x, x+\delta_0}(y_2) = h_{x, x+\delta_0}(0)$, то $y_2^0 = y_2$, $y_2^1 = y_1$, а если $h_{x, x+\delta_0}(y_2) = h_{x, x+\delta_0}(y_1)$, то $y_2^0 = y_0$, $y_2^1 = y_2$.

На k -м шаге рассмотрим $y_k = |y_{k-1}^0 - y_{k-1}^1|/2$. Если $h_{x, x+\delta_0}(y_k) = h_{x, x+\delta_0}(0)$, то $y_k^0 = y_k$, $y_k^1 = y_{k-1}^1$, а если $h_{x, x+\delta_0}(y_k) = h_{x, x+\delta_0}(y_1)$, то $y_k^0 = y_{k-1}^0$, $y_k^1 = y_k$.

Таким образом, получаем, что все три последовательности (y_n^0) , (y_n^1) и $(y_n^0) \cup (y_n^1)$ имеют единственную предельную точку, одинаковую для всех трех последовательностей, то есть все три последовательности сходятся к одному пределу. Обозначим этот предел y_* .

Функция $h_{x,x+\delta_0}(y)$ непрерывна и

$$h_{x,x+\delta_0}(y_*) = h_{x,x+\delta_0}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^0\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_{x,x+\delta_0}(y_n^0) = h_{x,x+\delta_0}(0).$$

Аналогично получаем, что

$$h_{x,x+\delta_0}(y_*) = h_{x,x+\delta_0}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^1\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_{x,x+\delta_0}(y_n^1) = h_{x,x+\delta_0}(y_1) \neq h_{x,x+\delta_0}(0).$$

Получаем противоречие.

Покажем теперь, что для пары (x, y) , такой, что $F_L(x, y) = 0$, также верно утверждение леммы. Возьмем произвольную последовательность $(y_n) \rightarrow y$, $y_n < y$ для любого n . Так как $F_L(x, y_n) < 0$, по только что доказанному для любой пары (y_n, x) верно утверждение леммы. Функция $F_L(x, y)$ непрерывна по y , следовательно, утверждение верно и для пары (x, y) .

Лемма 6 доказана.

Лемма 7. Если задача об опасной близости (f, f_q, ρ) сводится к задаче одномерного интервального поиска, то для любой пары (x, y) такой, что $F_L(x, y) \leq 0$ справедливо равенство

$$F_L(x, y) = F_L(1, y) + F_L(x, 0) - F_L(1, 0).$$

Доказательство. Для произвольной пары $(x, y) \in [0, 1]^2$ такой, что $F_L(x, y) \leq 0$ положим

$$k = \left\lceil \frac{1-x}{\delta} \right\rceil, \quad \delta_0 = \frac{1-x}{k} \leq \delta.$$

Здесь δ — число из формулировки леммы 5, $|a|$ — наименьшее целое, не меньшее a .

Выпишем следующую цепочку равенств, верных в силу леммы 6:

$$\begin{aligned} h_{x_0, x_0+\delta_0}(y) &= h_{x_0, x_0+\delta_0}(0), \\ h_{x_0+\delta_0, x_0+2\delta_0}(y) &= h_{x_0+\delta_0, x_0+2\delta_0}(0), \\ &\dots \\ h_{x_0+(k-1)\delta_0, x_0+k\delta_0}(y) &= h_{x_0+(k-1)\delta_0, x_0+k\delta_0}(0). \end{aligned}$$

Данная цепочка равенств равносильна цепочке равенств

$$\begin{aligned} F_L(x, y) - F_L(x, 0) &= F_L(x + \delta_0, y) - F_L(x + \delta_0, 0), \\ F_L(x + \delta_0, y) - F_L(x + \delta_0, 0) &= F_L(x + 2\delta_0, y) - F_L(x + 2\delta_0, 0), \\ &\dots \\ F_L(x + (k-1)\delta_0, y) - F_L(x + (k-1)\delta_0, 0) &= F_L(x + k\delta_0, y) - F_L(x + k\delta_0, 0). \end{aligned}$$

По определению δ_0 ,

$$F_L(x + k\delta_0, y) - F_L(x + k\delta_0, 0) = F_L(1, y) - F_L(1, 0).$$

Таким образом, получаем, что

$$F_L(x, y) - F_L(x, 0) = F_L(1, y) - F_L(1, 0),$$

что и требовалось доказать.

Перейдем к доказательству необходимости. Пусть

$$\psi(y) = F_L(1, y) - F_L(1, 0), \quad \psi_L(x) = F_L(x, 0).$$

Тогда по лемме 7

$$F_L(x, y) = \psi(y) + \psi_L(x).$$

По лемме 3,

$$F_R(x, y) = F_L(x, y) + \psi'_R(x) - \psi'_L(x).$$

Введем обозначение

$$\psi_R(x) = \psi'_R(x) - \psi'_L(x) + \psi_L(x).$$

Тогда

$$F_R(x, y) = \psi(y) + \psi_R(x).$$

Необходимость доказана.

Список литературы

1. Guttman A., *R*-trees: a dynamic index structure for spatial searching. In: *Proc. ACM SIGMOD'84*. ACM Press, New York, pp. 47–57.
2. Korn F., Sidiropoulos N., Faloutsos C., Siegel E., Protopapas Z., Fast nearest neighbor search in medical image databases. In: *Proc. VLDB'96*. Morgan Kaufmann, San Francisco, California, pp. 215–226.
3. Roussopoulos N., Kelley S., Vincent F., Nearest neighbor queries. In: *Proc. ACM SIGMOD'95*. ACM Press, New York, pp. 71–79.
4. Beckmann N., Kriegel H.-P., Schneider R., Seeger B., The *R**-tree: an efficient and robust access method for points and rectangles. In: *Proc. ACM SIGMOD'90*. ACM Press, New York, pp. 322–331.
5. Cheung K. L., Fu A. W., Enhanced nearest neighbour search on the *R*-tree. *ACM SIGMOD Record* (1998) **27**, №3, 16–21.
6. Benetis R., Jensen C. S., Karciauskas G., Saltenis S., Nearest and reverse nearest neighbor queries for moving objects. *The VLDB Journal* (2006) **15**, №2, 229–249.
7. Song Z., Roussopoulos N., *K*-nearest neighbor search for moving query point. In: *Proc. SSTD'01*. Springer, London, pp. 79–96.
8. Seidl N., Kriegel H.-P., Optimal multi-step *k*-nearest neighbor search. *Proc. ACM SIGMOD'98* 154–165.
9. Tao Y., Papadias D., Shen Q., Continuous nearest neighbor search. In: *Proc. VLDB'02*. Morgan Kaufmann, San Francisco, California, pp. 287–298.
10. Gedik B., Liu L., *MobiEyes*: A distributed location monitoring service using moving location queries. *IEEE TMC* (2006) **10**, 1384–1402.
11. Atallah M., Dynamic computational geometry. In: *Proc. FOCS'83*. IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, California, pp. 92–99.
12. Bentley J. L., Multidimensional binary search trees in database applications. *Commun. ACM* (1975) **18**, 509–517.
13. Bentley J. L., Friedman J. H., Data structure for range searching. *ACM Comput. Surv.* (1979) **11**, 397–409.

14. Bolour A., Optimal retrieval algorithms for small regional queries. *SIAM J. Comput.* (1981) **10**, 721–741.
15. Fredman M. L., A lower bound of complexity of orthogonal range queries. *J. ACM* (1981) **28**, 696–705.
16. Leuker G. S., A data structure for orthogonal range queries. In: *Proc. FOCS'78*. IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, California, pp. 28–34.
17. Leuker G. S., Willard D. E., A data structure for dynamic range queries. *Inf. Proc. Lett.* (1982) **15**, 209–213.
18. Saxe J. B., On the number of range queries in k -space. *Discrete Appl. Math.* (1979) **1**, 217–225.
19. Willard D. E., *Predicate-oriented database search algorithms*, PhD Thesis. Harvard Univ., Cambridge, 1978.
20. Гасанов Э. Э., Кудрявцев В. Б., *Теория хранения и поиска информации*. Физматлит, Москва, 2002.
21. Лапшов И. С., Динамические базы данных с оптимальной по порядку временной сложностью. *Дискретная математика* (2008) **20**, №3, 89–100.
22. Скиба Е. А., Логарифмическое решение задачи об опасной близости. *Интеллектуальные системы* (2007) **11**, №1–4, 693–719.
23. Снегова Е. А., Случай задачи об опасной близости, сводящийся к одномерному интервальному поиску. *Интеллектуальные системы* (2009) **13**, №1–4, 97–118.

Статья поступила 15.10.2010.