Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. З. Рахмонов, Исследование особого ряда в проблеме Варинга–Гольдбаха со сдвинутыми простыми числами, *Дискрет. матем.*, 2011, том 23, выпуск 4, 3–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1158>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 17:44:14

Исследование особого ряда в проблеме Варинга–Гольдбаха со сдвинутыми простыми числами

© 2011 г. Ф. З. Рахмонов

Доказано, что для особого ряда $\mathfrak{S}(N)$ в асимптотической формуле для числа представлений достаточно большого натурального числа N , $N \equiv 0 \pmod{4}$, в виде суммы пяти квадратов сдвинутых простых чисел $p_i + 1$ справедливо соотношение

$$\mathfrak{S}(N) = \begin{cases} c(N), & N \equiv 0 \pmod{4}; \\ 0, & N \not\equiv 0 \pmod{4}, \end{cases} \quad c(N) > 2 \prod_{p \geq 7} \left(1 - \frac{10}{\varphi^2(p)}\right),$$

1. Введение

В 1938 году Хуа Ло Ген [1] доказал асимптотическую формулу для числа представлений достаточно большого натурального числа N в виде суммы пяти квадратов простых чисел и показал, что при $N \equiv 5 \pmod{24}$ особый ряд задачи больше абсолютной положительной постоянной, зависящей только от N , и равен нулю, если $N \not\equiv 5 \pmod{24}$. В работе исследуется особый ряд — аналог задачи Хуа Ло Гена, когда простое число p заменяется на его сдвинутое $p + 1$, а именно, найдено арифметическое условие, при выполнении которого особый ряд больше абсолютной положительной постоянной, зависящей только от N . Постановка этой задачи принадлежит В. Н. Чубарикову.

Мы будем использовать следующие обозначения.

Пусть $\text{ord}_p(x)$ — наибольшая степень простого числа p , делящего целое число x , то есть $p^{\text{ord}_p(x)} \parallel x$. Пусть, далее,

$$\delta_p(n) = \left(\frac{n}{p}\right)$$

— символ Лежандра,

$$\varepsilon_p = \delta_p(-1) = \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2};$$

$c_q(n)$ — сумма Рамануджана;

$$T_2(a, q) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n, q)=1}}^q e\left(\frac{a(n+1)^2}{q}\right),$$

$$\Phi(q, N) = \frac{1}{\varphi^5(q)} \sum_{\substack{a=0 \\ (a, q)=1}}^q T_2^5(a, q) e\left(-\frac{aN}{q}\right),$$

$$\mathcal{F}(p, N) = 1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \Phi(p^\alpha, N),$$

$$\mathcal{S}(N) = \sum_{q=1}^{\infty} \Phi(q, N).$$

Здесь и далее $\varphi(p)$ есть функция Эйлера.

Теорема 1. *Справедливо соотношение*

$$\mathcal{S}(N) = \prod_p \mathcal{F}(p, N) = \begin{cases} c(N), & N \equiv 0 \pmod{4}; \\ 0, & N \not\equiv 0 \pmod{4}, \end{cases}$$

где $c(N)$ — абсолютная положительная постоянная, зависящая только от N , и

$$c(N) > 2 \prod_{p \geq 7} \left(1 - \frac{10}{\varphi^2(p)}\right).$$

Основу доказательства теоремы 1 составляют теорема 2 о точном значении ряда $\mathcal{F}(2, N)$, ее следствие 1 об оценке снизу $\mathcal{F}(2, N)$ при $\text{ord}_2(N) \geq 2$ и теорема 3 со своими следствиями 2, 4, 6, в которых, соответственно, получены оценки снизу для $\mathcal{F}(p, N)$ при $p \geq 7$, $\mathcal{F}(3, N)$, $\mathcal{F}(5, N)$. Доказательства теорем 2 и 3, в свою очередь, опираются на точные значения суммы $\Phi(a, p^\alpha)$, которые найдены, соответственно, в леммах 3, 4 при $p = 2$ и в леммах 9, 10, 11 при $p \geq 3$.

Теорема 2. *Пусть $\text{ord}_2(N) = \beta$, $\text{ord}_2(N \cdot 2^{-\beta} - 5) = \eta$, тогда справедлива формула*

$$\mathcal{F}(2, N) = \begin{cases} 0, & \text{если } \beta \leq 1; \\ \frac{26}{7} + \frac{15}{28} 2^{-\frac{3}{2}(\beta-1)+3}, & \text{если } \beta \geq 2 \text{ и } \beta \text{ четно, } \eta \neq 2; \\ \frac{26}{7} - \frac{13}{28} 2^{-\frac{3}{2}(\beta-1)+3}, & \text{если } \beta \geq 2 \text{ и } \beta \text{ нечетно, } \eta = 2; \\ \frac{26}{7} + \frac{15}{28} 2^{-\frac{3}{2}(\beta-1)+3}, & \text{если } \beta \geq 3 \text{ и } \beta \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Следствие 1. *При $\text{ord}_2(N) \geq 2$, справедливо неравенство*

$$\mathcal{F}(2, N) \geq \frac{26}{7} - \frac{13\sqrt{2}}{14} \geq \frac{13}{14}(4 - \sqrt{2}) > \frac{65}{28}.$$

Теорема 3. Пусть p – нечетное простое число, $\text{ord}_p(N) = \beta$, тогда справедлива формула

$$\mathcal{F}(p, N) = 1 + \Phi(p, N) + \mathcal{F}_1(p, N),$$

где

$$\mathcal{F}_1(p, N) = \begin{cases} 0, & \text{если } \beta = 0; \\ -\frac{p}{(p-1)^5} + \frac{p^5 - p}{(p-1)^5(p^3 - 1)} \left(1 - \frac{1}{p^{\frac{3}{2}(\beta-1)}} \right), & \text{если } \beta \geq 1 \text{ нечетно}; \\ \frac{p^4}{(p-1)^4(p^3 - 1)} \left(1 - \frac{(p+1)^2}{p^{\frac{3}{2}(\beta-2)+4}} \right) + \frac{1 + \varepsilon_p \delta_p(N)}{(p-1)^5 p^{\frac{3}{2}(\beta-2)}}, & \text{если } \beta \geq 2 \text{ четно}. \end{cases}$$

Следствие 2. При $p \geq 7$ справедливо неравенство

$$\mathcal{F}(p, N) > 1 - \frac{10}{\varphi^2(p)}.$$

Следствие 3. Пусть $\text{ord}_3(N) = \beta$, тогда справедлива формула

$$\mathcal{F}(3, N) = \begin{cases} 1 - 2^{-4} + \frac{15}{52} \left(1 - \frac{1}{3^{\frac{3}{2}(\beta-1)}} \right), & \text{если } \beta \geq 1 \text{ нечетно}; \\ 1 + \frac{47}{208} - \frac{1}{26 \cdot 3^{\frac{3}{2}(\beta-2)}} + \frac{1 - \delta_3(N)}{2^5 \cdot 3^{\frac{3}{2}(\beta-2)}}, & \text{если } \beta \geq 2 \text{ четно}; \\ 1 + 2^{-4}, & \text{если } N \equiv 1 \pmod{3}; \\ 1 + 2^{-5}, & \text{если } N \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Следствие 4. Справедливо неравенство

$$\mathcal{F}(3, N) \geq 1 - 2^{-4}.$$

Следствие 5. Пусть $\text{ord}_5(N) = \beta$, тогда справедлива формула

$$\mathcal{F}(5, N) = \begin{cases} 1 - \frac{59}{2^{10}} + \frac{5^4}{31 \cdot 2^{10}} \left(1 - \frac{1}{5^{\frac{3}{2}(\beta-1)}} \right), & \text{если } \beta \geq 1 \text{ нечетно}; \\ 1 - \frac{1049}{31 \cdot 2^{10}} - \frac{3^2}{31 \cdot 2^8 \cdot 5^{\frac{3}{2}(\beta-2)}} + \frac{1 + \delta_5(N)}{2^{10} \cdot 5^{\frac{3}{2}(\beta-2)}}, & \text{если } \beta \geq 2 \text{ четно}; \\ 1 + 99 \cdot 2^{-10}, & \text{если } N \equiv 1 \pmod{5}; \\ 1 + 26 \cdot 2^{-10}, & \text{если } N \equiv 2 \pmod{5}; \\ 1 + 76 \cdot 2^{-10}, & \text{если } N \equiv 3 \pmod{5}; \\ 1 + 51 \cdot 2^{-10}, & \text{если } N \equiv 4 \pmod{5}. \end{cases}$$

Следствие 6. *Справедливо неравенство*

$$\mathcal{F}(5, N) \geq 1 - \frac{59}{2^{10}}.$$

2. Вычисление $\mathcal{F}(2, N)$

В этом параграфе мы докажем теорему 2 точном значении ряда $\mathcal{F}(2, N)$ и ее следствие 1 об оценке снизу ряда $\mathcal{F}(2, N)$ при $\beta = \text{ord}_2(N) \geq 2$. Предварительно докажем вспомогательные леммы о точных значениях тригонометрических сумм $S(a, 2^\alpha)$, $T_2(a, 2^\alpha)$, $\Phi(2^\alpha, N)$, которыми будем пользоваться при доказательстве теоремы 2.

Лемма 1. *Пусть $(a, 2) = 1$, α — натуральное число. Тогда справедлива формула*

$$S(a, 2^\alpha) = \sum_{n=1}^{2^\alpha} e\left(\frac{an^2}{2^\alpha}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha = 1, \\ 2^{\alpha/2}(1 + i^a), & \text{если } \alpha - \text{четное}; \\ 2^{\alpha/2}(1 + i)^a, & \text{если } \alpha - \text{нечетное и } \alpha \geq 3; \end{cases}$$

Доказательство. Введем обозначение

$$S(a, q, r) = \sum_{n=1}^q e\left(\frac{an^2}{r}\right).$$

При $r = q$, сумма $S(a, q, r)$ превращается в сумму Гаусса по модулю q , то есть

$$S(a, q, q) = S(a, q).$$

Найдем точное значение $S(a, 2, 4)$ и $S(a, 4, 8)$. Справедливы равенства

$$S(a, 2, 4) = \sum_{n=1}^2 e\left(\frac{an^2}{4}\right) = 1 + e\left(\frac{a}{4}\right) = 1 + e^{\frac{\pi a}{2}i} = 1 + i^a, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} S(a, 4, 8) &= \sum_{n=1}^4 e\left(\frac{an^2}{8}\right) = 2e\left(\frac{a}{8}\right) + e\left(\frac{a}{2}\right) + 1 = 2e\left(\frac{a}{8}\right) \\ &= 2e^{\frac{\pi a}{4}i} = 2(e^{\frac{\pi}{4}i})^a = \sqrt{2}(1 + i)^a. \end{aligned} \quad (2)$$

Преобразуя сумму $S(a, 2^\alpha)$ при $\alpha \geq 2$ подстановкой $n = n_1 2^{\alpha-1} + n_2$, где n_1 и n_2 независимо пробегают значения $n_1 = 0, 1$, $n_2 = 1, 2, \dots, 2^{\alpha-1}$, и имея в виду, что

$$(n_1 2^{\alpha-1} + n_2)^2 = n_1^2 2^{2\alpha-2} + n_1 n_2 2^\alpha + n_2^2 \equiv n_2^2 \pmod{2^\alpha},$$

получим, что

$$\begin{aligned} S(a, 2^\alpha) &= \sum_{n=1}^{2^\alpha} e\left(\frac{an^2}{2^\alpha}\right) = \sum_{n_1=0}^1 \sum_{n_2=1}^{2^{\alpha-1}} e\left(\frac{a(n_1 2^{\alpha-1} + n_2)^2}{2^\alpha}\right) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{2^{\alpha-1}} e\left(\frac{an^2}{2^\alpha}\right) = 2S(a, 2^{\alpha-1}, 2^\alpha). \end{aligned}$$

Пусть теперь $\alpha \geq 4$. Преобразуя сумму $S(a, 2^{\alpha-1}, 2^\alpha)$ подстановкой $n = n_1 2^{\alpha-2} + n_2$, где n_1 и n_2 независимо пробегает значения $n_2 = 1, 2, \dots, 2^{\alpha-2}$, $n_1 = 0, 1$, и имея в виду, что

$$(n_1 2^{\alpha-2} + n_2)^2 = n_1^2 2^{2\alpha-4} + n_1 n_2 2^{\alpha-1} + n_2^2 \equiv n_1 n_2 2^{\alpha-1} + n_2^2 \pmod{2^\alpha},$$

находим, что

$$\begin{aligned} S(a, 2^{\alpha-1}, 2^\alpha) &= \sum_{n=1}^{2^{\alpha-1}} e\left(\frac{an^2}{2^\alpha}\right) = \sum_{n_1=0}^1 \sum_{n_2=1}^{2^{\alpha-2}} e\left(\frac{a(n_1 2^{\alpha-2} + n_2)^2}{2^\alpha}\right) \\ &= \sum_{n_2=1}^{2^{\alpha-2}} e\left(\frac{an_2^2}{2^\alpha}\right) \sum_{n_1=0}^1 e\left(\frac{an_1 n_2}{2}\right) \\ &= 2 \sum_{\substack{n_2=1 \\ n_2 \equiv 0 \pmod{2}}}^{2^{\alpha-2}} e\left(\frac{an_2^2}{2^\alpha}\right) = 2 \sum_{n=1}^{2^{\alpha-3}} e\left(\frac{an^2}{2^{\alpha-2}}\right) = 2S(a, 2^{\alpha-3}, 2^{\alpha-2}). \end{aligned}$$

Следовательно, имеют место рекуррентные формулы

$$S(a, 2^\alpha) = 2S(a, 2^{\alpha-1}, 2^\alpha), \quad \alpha \geq 2, \quad (3)$$

$$S(a, 2^{\alpha-1}, 2^\alpha) = 2S(a, 2^{\alpha-3}, 2^{\alpha-2}), \quad \alpha \geq 4, \quad (4)$$

Пусть α четно и $\alpha \geq 4$. Применим к сумме $S(a, 2^\alpha)$ формулу (3); далее, к полученной сумме $S(a, 2^{\alpha-1}, 2^\alpha)$ последовательно $(\alpha - 2)/2$ раз применим формулу (4) и получим, что

$$\begin{aligned} S(a, 2^\alpha) &= 2S(a, 2^{\alpha-1}, 2^\alpha) = 2 \cdot 2S(a, 2^{\alpha-3}, 2^{\alpha-2}) = 2 \cdot 2^2 S(a, 2^{\alpha-5}, 2^{\alpha-4}) = \dots \\ &= 2 \cdot 2^j S(a, 2^{\alpha-(2j+1)}, 2^{\alpha-2j}) = \dots \\ &= 2 \cdot 2^{\alpha/2-1} S(a, 2^{\alpha-(2 \cdot (\alpha-2)/2+1)}, 2^{\alpha-2 \cdot (\alpha-2)/2}) \\ &= 2 \cdot 2^{\alpha/2-1} S(a, 2, 2^2) = 2^{\alpha/2} S(a, 2, 4). \end{aligned}$$

Подставляя в правую часть этого равенства из (1) точное значение $S(a, 2, 4)$, находим, что

$$S(a, 2^\alpha) = 2^{\alpha/2} (1 + i^a), \quad \alpha \geq 4, \quad \alpha - \text{четное}. \quad (5)$$

Пусть теперь α нечетно и $\alpha \geq 5$. Поступая, как в предыдущем случае, применим к сумме $S(a, 2^\alpha)$ формулу (3), далее к полученной сумме $S(a, 2^{\alpha-1}, 2^\alpha)$ последовательно $(\alpha - 3)/2$ раз применяем формулу (4) и получаем, что

$$\begin{aligned} S(a, 2^\alpha) &= 2S(a, 2^{\alpha-1}, 2^\alpha) = 2 \cdot 2S(a, 2^{\alpha-3}, 2^{\alpha-2}) = 2 \cdot 2^2 S(a, 2^{\alpha-5}, 2^{\alpha-4}) = \dots \\ &= 2 \cdot 2^j S(a, 2^{\alpha-(2j+1)}, 2^{\alpha-2j}) = \dots \\ &= 2 \cdot 2^{(\alpha-3)/2} S(a, 2^{\alpha-(2 \cdot (\alpha-3)/2+1)}, 2^{\alpha-2 \cdot (\alpha-3)/2}) \\ &= 2 \cdot 2^{(\alpha-1)/2-1} S(a, 2^2, 2^3) = 2^{(\alpha-1)/2} S(a, 4, 8). \end{aligned}$$

Подставляя в правую часть этого равенства из (2) точное значение $S(a, 4, 8)$, находим, что

$$S(a, 2^\alpha) = 2^{\alpha/2} (1 + i)^a, \quad \alpha \geq 5, \quad \alpha - \text{нечетное}. \quad (6)$$

При $\alpha = 1, 2, 3$, пользуясь формулами (1) и (2), находим, что

$$\begin{aligned} S(a, 2) &= e\left(\frac{a}{2}\right) + 1 = -1 + 1 = 0, \\ S(a, 2^2) &= 2S(a, 2, 2^2) = 2(1 + i^a), \\ S(a, 2^3) &= 2S(a, 2^2, 2^3) = 2^{3/2}(1 + i^a). \end{aligned}$$

Отсюда и из формул (5) и (6) следует утверждение леммы.

Лемма 2. Пусть $(a, 2) = 1$, α — натуральное число. Тогда справедлива формула

$$T_2(a, 2^\alpha) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,2)=1}}^{2^\alpha} e\left(\frac{a(n+1)^2}{2^\alpha}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha = 1; \\ 2, & \text{если } \alpha = 2; \\ 0, & \text{если } \alpha = 3; \\ 2^{\alpha/2}(1 + i^a), & \text{если } \alpha \geq 4 \text{ чётно}; \\ 2^{\alpha/2}(1 + i)^a, & \text{если } \alpha \geq 5 \text{ нечётно}. \end{cases}$$

Доказательство. В случае $\alpha = 1, 2, 3$ вычислим сумму $T_2(a, 2^\alpha)$. Сумму $T_2(a, 2^\alpha)$ в случае $\alpha \geq 3$ выразим через сумму Гаусса. Для этого в $T_2(a, 2^\alpha)$ в переменной суммирования, которая пробегает все нечетные числа n , $1 \leq n \leq 2^\alpha$, сделаем подстановку $n = 2m - 1$, $1 \leq m \leq 2^{\alpha-1}$. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} T_2(a, 2^\alpha) &= \sum_{\substack{n=1 \\ (n,2)=1}}^{2^\alpha} e\left(\frac{a(n+1)^2}{2^\alpha}\right) = \sum_{m=1}^{2^{\alpha-1}} e\left(\frac{a((2m-1)+1)^2}{2^\alpha}\right) \\ &= \sum_{m=1}^{2^{\alpha-1}} e\left(\frac{am^2}{2^{\alpha-2}}\right) = \sum_{n=1}^{2^{\alpha-2}} e\left(\frac{an^2}{2^{\alpha-2}}\right) + \sum_{n=1}^{2^{\alpha-2}} e\left(\frac{a(2^{\alpha-2}+n)^2}{2^{\alpha-2}}\right) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{2^{\alpha-2}} e\left(\frac{an^2}{2^{\alpha-2}}\right) = 2S(a, 2^{\alpha-2}). \end{aligned}$$

Если $\alpha \geq 4$ и α — четное, то, подставляя в эту формулу из леммы 1 точное значение суммы Гаусса $S(a, 2^\alpha)$ для четных α , находим, что

$$T_2(a, 2^\alpha) = 2S(a, 2^{\alpha-2}) = 2 \cdot 2^{(\alpha-2)/2}(1 + i^a).$$

Если $\alpha \geq 5$ и α — нечетное, то подставляем из этой же леммы 1 точное значение суммы $S(a, 2^\alpha)$ для нечетных α и получаем, что

$$T_2(a, 2^\alpha) = 2S(a, 2^{\alpha-2}) = 2 \cdot 2^{(\alpha-2)/2}(1 + i)^a = 2^{\frac{\alpha}{2}}(1 + i)^a = 2^{\frac{\alpha+1}{2}} e\left(\frac{a}{8}\right).$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $\alpha \geq 4$ — четное число. Тогда справедлива формула

$$\Phi(2^\alpha, N) = \begin{cases} 0, & \text{если либо } \beta \leq 1, \text{ либо } \alpha > \beta + 2, \beta \geq 2; \\ -2^{-\frac{3\alpha}{2}+4}, & \text{если } 4 \leq \alpha \leq \beta; \\ 2^{-\frac{3\beta-5}{2}}, & \text{если } \alpha = \beta + 1 \text{ и } \beta \text{ нечётно}; \\ -(-1)^{\frac{N \cdot 2^{-\beta-5}}{2}} 2^{-\frac{3\beta}{2}+1}, & \text{если } \alpha = \beta + 2 \text{ и } \beta \text{ чётно}; \end{cases}$$

Доказательство. Пользуясь утверждением леммы 2 о точном значении суммы $T_2(a, 2^\alpha)$ для четных $\alpha \geq 4$, находим, что

$$\begin{aligned}
 \Phi(2^\alpha, N) &= \frac{1}{\varphi^5(2^\alpha)} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,2)=1}}^{2^\alpha} T_2^5(a, 2^\alpha) e\left(-\frac{aN}{2^\alpha}\right) = \frac{1}{2^{5(\alpha-1)}} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,2)=1}}^{2^\alpha} 2^{\frac{5\alpha}{2}} (1+i^a)^5 e\left(-\frac{Na}{2^\alpha}\right) \\
 &= 2^{-\frac{5\alpha}{2}+5} \sum_{b=0}^{2^{\alpha-2}-1} \left[(1+i^{4b+1})^5 e\left(-\frac{N(4b+1)}{2^\alpha}\right) + (1+i^{4b+3})^5 e\left(-\frac{N(4b+3)}{2^\alpha}\right) \right] \\
 &= 2^{-\frac{5\alpha}{2}+5} \sum_{b=0}^{2^{\alpha-2}-1} \left[(1+i)^5 e\left(-\frac{N}{2^\alpha}\right) + (1-i)^5 e\left(-\frac{3N}{2^\alpha}\right) \right] e\left(-\frac{Nb}{2^{\alpha-2}}\right) \\
 &= 2^{-\frac{5\alpha}{2}+5} \left[(1+i)^5 e\left(-\frac{N}{2^\alpha}\right) + (1-i)^5 e\left(-\frac{3N}{2^\alpha}\right) \right] \sum_{b=0}^{2^{\alpha-2}-1} e\left(-\frac{Nb}{2^{\alpha-2}}\right).
 \end{aligned}$$

Сумма по b является полной линейной тригонометрической суммой по модулю $2^{\alpha-2}$, поэтому она и, следовательно, $\Phi(2^\alpha, N)$ равны нулю, если $N \not\equiv 0 \pmod{2^{\alpha-2}}$, то есть $\Phi(2^\alpha, N) = 0$, если $\alpha - 2 > \beta$. Таким образом, $\Phi(2^\alpha, N) = 0$ при всех четных $\alpha > \beta + 2$, в том числе, если $\beta \leq 1$, то $\Phi(2^\alpha, N) = 0$ при всех четных $\alpha \geq 4$.

Если $N \equiv 0 \pmod{2^{\alpha-2}}$, $\beta \geq 2$, то есть если $4 \leq \alpha \leq \beta + 2$, то полная линейная тригонометрическая сумма по b равна $2^{\alpha-2}$. Поэтому, имея в виду, что $N \cdot 2^{2-\alpha}$ — целое число, находим, что

$$\begin{aligned}
 \Phi(2^\alpha, N) &= 2^{-\frac{3\alpha}{2}+3} \left[(1+i)^5 e\left(-\frac{N \cdot 2^{2-\alpha}}{2^2}\right) + (1-i)^5 e\left(-\frac{3N \cdot 2^{2-\alpha}}{2^2}\right) \right] \\
 &= 2^{-\frac{3\alpha-11}{2}} \left[e\left(\frac{5}{8}\right) e\left(-\frac{N \cdot 2^{2-\alpha}}{2^2}\right) + e\left(-\frac{5}{8}\right) e\left(\frac{N \cdot 2^{2-\alpha}}{2^2}\right) \right] \\
 &= 2^{-\frac{3\alpha-11}{2}} \left[e\left(\frac{5 - N \cdot 2^{3-\alpha}}{2^3}\right) + e\left(\frac{N \cdot 2^{3-\alpha} - 5}{2^3}\right) \right] \\
 &= 2^{-\frac{3\alpha-9}{2}} \cos\left(\frac{\pi(N \cdot 2^{3-\alpha} - 5)}{4}\right) = 2^{-\frac{3\alpha-9}{2}} \cos\left(\frac{\pi N \cdot 2^{2-\alpha}}{2} - \frac{5\pi}{4}\right) \\
 &= 2^{-\frac{3\alpha-9}{2}} \left(\cos\frac{\pi N \cdot 2^{2-\alpha}}{2} \cos\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{\pi N \cdot 2^{2-\alpha}}{2} \sin\frac{5\pi}{4} \right) \\
 &= -2^{-\frac{3\alpha}{2}+4} \left(\cos\frac{\pi N \cdot 2^{2-\alpha}}{2} + \sin\frac{\pi N \cdot 2^{2-\alpha}}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Теперь, в зависимости от четности β , $\beta \geq 2$, найдем точное значение $\Phi(2^\alpha, N)$ для четных α . Пусть β — четное, тогда для $4 \leq \alpha \leq \beta + 2$

$$\begin{aligned}
 \Phi(2^\alpha, N) &= -2^{-\frac{3\alpha}{2}+4} \cos\frac{\pi N \cdot 2^{2-\alpha}}{2} \\
 &= -2^{-\frac{3\alpha}{2}+4} \cos(\pi N \cdot 2^{-\beta} \cdot 2^{1+(\beta-\alpha)}) \\
 &= -2^{-\frac{3\alpha}{2}+4}, \quad 4 \leq \alpha \leq \beta,
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\Phi(2^{\beta+2}, N) &= -2^{-\frac{3\beta}{2}+1} \sin \frac{\pi N \cdot 2^{-\beta}}{2} \\
&= -2^{-\frac{3\beta}{2}+1} (-1)^{\frac{N \cdot 2^{-\beta}-1}{2}} \\
&= -(-1)^{(N \cdot 2^{-\beta}-5)2^{-1}} 2^{-\frac{3\beta}{2}+1}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Пусть теперь β — нечетное и $\beta \geq 3$, тогда для $4 \leq \alpha \leq \beta + 1$ находим, что

$$\begin{aligned}
\Phi(2^\alpha, N) &= -2^{-\frac{3\alpha}{2}+4} \cos \frac{\pi N \cdot 2^{2-\alpha}}{2} \\
&= -2^{-\frac{3\alpha}{2}+4} \cos(\pi N \cdot 2^{-\beta+1+(\beta-\alpha)}) \\
&= -2^{-\frac{3\alpha}{2}+4}, \quad 4 \leq \alpha \leq \beta - 1,
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
\Phi(2^{\beta+1}, N) &= -2^{-\frac{3}{2}(\beta+1)+4} \cos \frac{\pi N \cdot 2^{2-(\beta+1)}}{2} \\
&= -2^{-\frac{3\beta}{2}+\frac{5}{2}} \cos(\pi N \cdot 2^{-\beta}) \\
&= 2^{-\frac{3\beta-5}{2}}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Лемма 4. Пусть $\alpha \geq 5$ — нечетное число. Тогда справедлива формула

$$\Phi(2^\alpha, N) = 2^{-(3\beta-4)/2} (-1)^{(N \cdot 2^{-\beta}-5)2^{-2}},$$

если $\alpha = \beta + 3$, $\text{ord}_2(N \cdot 2^{-\beta} - 5) \geq 2$ и $\beta \geq 2$ — четное число, и $\Phi(2^\alpha, N) = 0$ в противном случае.

Доказательство. Пользуясь леммой 2 о точном значении суммы $T_2(a, 2^\alpha)$ для нечетных $\alpha \geq 5$, находим, что

$$\begin{aligned}
\Phi(2^\alpha, N) &= \frac{1}{\varphi^5(2^\alpha)} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,2)=1}}^{2^\alpha} T_2^5(a, 2^\alpha) e\left(-\frac{aN}{2^\alpha}\right) \\
&= \frac{1}{2^{5(\alpha-1)}} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,2)=1}}^{2^\alpha} 2^{\frac{5(\alpha+1)}{2}} e\left(\frac{5a}{8}\right) e\left(-\frac{Na}{2^\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Преобразуя последнюю сумму подстановкой $a = a_1 + 2^3 a_2$, где a_1 и a_2 независимо пробегает значения $a_1 = 1, 3, 5, 7$, $a_2 = 1, 2, \dots, 2^{\alpha-3}$, находим, что

$$\begin{aligned}
\Phi(2^\alpha, N) &= 2^{-\frac{5(\alpha-3)}{2}} \sum_{\substack{a_1=1 \\ (a_1,2)=1}}^{2^3} \sum_{a_2=1}^{2^{\alpha-3}} e\left(\frac{5(a_1 + 2^3 a_2)}{2^3}\right) e\left(-\frac{N(a_1 + 2^3 a_2)}{2^\alpha}\right) \\
&= 2^{-\frac{5(\alpha-3)}{2}} \sum_{\substack{a_1=1 \\ (a_1,2)=1}}^{2^3} \sum_{a_2=1}^{2^{\alpha-3}} e\left(\frac{5a_1}{2^3}\right) e\left(-\frac{N(a_1 + 2^3 a_2)}{2^\alpha}\right) \\
&= 2^{-\frac{5(\alpha-3)}{2}} \sum_{b=1}^{2^2} \sum_{a_2=1}^{2^{\alpha-3}} e\left(\frac{5(2b-1)}{2^3}\right) e\left(-\frac{N(2b-1 + 2^3 a_2)}{2^\alpha}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2^{-\frac{5(\alpha-3)}{2}} \sum_{b=1}^{2^2} e\left(\frac{5(2b-1)}{2^3}\right) e\left(\frac{-N(2b-1)}{2^\alpha}\right) \sum_{a_2=1}^{2^{\alpha-3}} e\left(-\frac{Na_2}{2^{\alpha-3}}\right) \\
&= 2^{-\frac{5(\alpha-3)}{2}} \sum_{b=1}^{2^2} e\left(\frac{(5-N \cdot 2^{3-\alpha})(2b-1)}{2^3}\right) \sum_{a_2=1}^{2^{\alpha-3}} e\left(-\frac{Na_2}{2^{\alpha-3}}\right).
\end{aligned}$$

Сумма по a_2 является полной линейной тригонометрической суммой по модулю $2^{\alpha-3}$, поэтому она и, следовательно, $\Phi(2^\alpha, N)$, равны нулю, если $N \not\equiv 0 \pmod{2^{\alpha-3}}$, то есть $\Phi(2^\alpha, N) = 0$, если $\alpha - 3 > \beta$. Таким образом, $\Phi(2^\alpha, N) = 0$ при всех нечетных $\alpha > \beta + 3$, в том числе если $\beta \leq 1$, то $\Phi(2^\alpha, N) = 0$ при всех нечетных $\alpha \geq 5$.

Если $N \equiv 0 \pmod{2^{\alpha-3}}$ и $\beta \geq 2$, то есть если $5 \leq \alpha \leq \beta + 3$, то полная линейная тригонометрическая сумма по a_2 равна $2^{\alpha-3}$. Поэтому, имея в виду, что $N \cdot 2^{3-\alpha}$ — целое число, находим, что

$$\begin{aligned}
\Phi(2^\alpha, N) &= 2^{-\frac{3(\alpha-3)}{2}} \sum_{b=1}^{2^2} e\left(\frac{(5-N \cdot 2^{3-\alpha})(2b-1)}{2^3}\right) \\
&= 2^{-\frac{3(\alpha-3)}{2}} e\left(\frac{N \cdot 2^{3-\alpha} - 5}{2^3}\right) \sum_{b=1}^{2^2} e\left(\frac{(5-N \cdot 2^{3-\alpha})b}{2^2}\right).
\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что $\Phi(2^\alpha, N) = 0$, если $\text{ord}_2(N \cdot 2^{3-\alpha} - 5) < 2$. Если же выполняется соотношение $\text{ord}_2(N \cdot 2^{3-\alpha} - 5) \geq 2$, то, следовательно, $N \cdot 2^{3-\alpha} - 5$ — четное число. Отсюда в свою очередь следует, что $N \cdot 2^{3-\alpha}$ нечетно. Число $N \cdot 2^{3-\alpha}$ с учетом условия $\alpha - 3 \leq \beta$ будет нечетным только в том случае, если $2^{\alpha-3} \parallel N$, то есть если $\alpha - 3 = \beta$. Последнее равенство возможно только при четном β . Следовательно, $\Phi(2^\alpha, N) = 0$ для всех нечетных $5 \leq \alpha \leq \beta + 3$, за исключением случая $\alpha = \beta + 3$ и $\text{ord}_2(N \cdot 2^{3-\alpha} - 5) \geq 2$. В этом случае, имея в виду, что $(N \cdot 2^{-\beta} - 5)2^{-2}$ — целое число, получаем, что

$$\begin{aligned}
\Phi(2^{\beta+3}, N) &= 2^{-\frac{3\beta}{2}+2} e\left(\frac{N \cdot 2^{-\beta} - 5}{2^3}\right) = 2^{-\frac{3\beta}{2}+2} e\left(\frac{(N \cdot 2^{-\beta} - 5)2^{-2}}{2}\right) \\
&= 2^{-\frac{3\beta-4}{2}} (-1)^{(N \cdot 2^{-\beta} - 5)2^{-2}}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Доказательство теоремы 2. Вычислим $\Phi(2^\alpha, N)$ для $\alpha = 1, 2, 3$. Подставляя найденные в лемме 2 значения $T_2(a, 2^\alpha)$ соответственно в выражения для $\Phi(2^\alpha, N)$, находим, что

$$\Phi(2, N) = \frac{1}{\varphi^5(2)} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,2)=1}}^2 T_2^5(a, 2) e\left(-\frac{aN}{2}\right) = e\left(-\frac{N}{2}\right) = e\left(-\frac{2N}{4}\right), \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
\Phi(2^2, N) &= \frac{1}{\varphi^5(4)} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,2)=1}}^4 T_2^5(a, 4) e\left(-\frac{aN}{4}\right) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,2)=1}}^4 e\left(\frac{-Na}{2^2}\right) \\
&= e\left(\frac{-N}{4}\right) + e\left(\frac{-3N}{4}\right),
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\Phi(2^3, N) = 0. \tag{14}$$

Теперь, с помощью этих формул, найденных значений $\Phi(2^\alpha, N)$ для четных $\alpha \geq 4$ в лемме 3 и для нечетных $\alpha \geq 5$ в лемме 4, вычислим значение $\mathcal{F}(2, N)$. Рассмотрим следующие три возможных случая.

(i) $\beta \leq 1$. В этом случае из лемм 3 и 4 следует, что $\Phi(2^\alpha, N) = 0$ при $\alpha \geq 4$, а значение $\Phi(2^\alpha, N)$ для $\alpha = 1, 2, 3$ определяется с помощью формул (12), (13) и (14). Поэтому

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(2, N) &= 1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \Phi(2^\alpha, N) = 1 + \Phi(2, N) + \Phi(2^2, N) \\ &= 1 + e\left(\frac{-N}{4}\right) + e\left(\frac{-2N}{4}\right) + e\left(\frac{-3N}{4}\right) = 0.\end{aligned}$$

(ii) $\beta \geq 2$ чётно. В этом случае из лемм 3 и 4 следует, что $\Phi(2^\alpha, N) = 0$ при $\alpha > \beta + 3$ и при всех нечётных α , $5 \leq \alpha \leq \beta + 1$, а $\Phi(2^\alpha, N)$ определяется при $\alpha = 1, 2, 3$ так же, как и в случае (i) с помощью формул (12), (13) и (14), при чётных α , $4 \leq \alpha \leq \beta + 2$, — леммой 3, при $\alpha = \beta + 3$ — леммой 4. Поэтому, вводя для $\Phi(2^{\beta+3}, N)$ характеристическую функцию

$$\delta(\beta, N) = \begin{cases} 1, & \text{если } \eta \geq 2; \\ 0, & \text{если } \eta = 1, \end{cases}$$

где

$$\eta = \text{ord}_2(N \cdot 2^{-\beta} - 5) \geq 1$$

(разность двух нечётных чисел делится на 2), и пользуясь соотношениями

$$(-1)^{(N \cdot 2^{-\beta} - 5)2^{-1}} = (-1)^{2^{\eta-1}},$$

$$(-1)^{(N \cdot 2^{-\beta} - 5)2^{-2}} = (-1)^{2^{\eta-2}},$$

находим, что

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(2, N) &= 1 + \Phi(2, N) + \Phi(2^2, N) + \sum_{\substack{\alpha=4 \\ \alpha \equiv 0 \pmod{2}}}^{\beta+2} \Phi(2^\alpha, N) + \Phi(2^{\beta+3}, N) \\ &= 1 + e\left(\frac{-N}{4}\right) + e\left(\frac{-2N}{4}\right) + e\left(\frac{-3N}{4}\right) - \sum_{\substack{\alpha=4 \\ \alpha \equiv 0 \pmod{2}}}^{\beta} 2^{-\frac{3\alpha}{2}+4} \\ &\quad - (-1)^{(N \cdot 2^{-\beta} - 5)2^{-1}} 2^{-\frac{3\beta}{2}+1} + \delta(\beta, N)(-1)^{(N \cdot 2^{-\beta} - 5)2^{-2}} 2^{-\frac{3\beta-4}{2}} \\ &= 4 - \sum_{\alpha_1=2}^{\frac{1}{2}\beta} 2^{-3\alpha_1+4} - (-1)^{2^{\eta-1}} 2^{-\frac{3}{2}\beta+1} + \delta(\beta, N)(-1)^{2^{\eta-2}} 2^{-\frac{3}{2}\beta+2} \\ &= 4 - 2^{-2} \sum_{\alpha_1=0}^{\frac{1}{2}\beta-2} 2^{-3\alpha_1} - (-1)^{2^{\eta-1}} 2^{-\frac{3}{2}\beta+1} + \delta(\beta, N)(-1)^{2^{\eta-2}} 2^{-\frac{3}{2}\beta+2} \\ &= 4 - \frac{1 - (2^{-3})^{\frac{1}{2}\beta-1}}{2^2(1 - 2^{-3})} - (-1)^{2^{\eta-1}} 2^{-\frac{1}{2}\beta+1} + \delta(\beta, N)(-1)^{2^{\eta-2}} 2^{-\frac{3}{2}\beta+2} \\ &= 4 - \frac{2}{7} + \frac{2^{-\frac{3}{2}\beta+4}}{7} - (-1)^{2^{\eta-1}} 2^{-\frac{3}{2}\beta+1} + \delta(\beta, N)(-1)^{2^{\eta-2}} 2^{-\frac{3}{2}\beta+2} \\ &= \frac{26}{7} + \left(\frac{2}{7} - \frac{(-1)^{2^{\eta-1}}}{4} + \frac{\delta(\beta, N)(-1)^{2^{\eta-2}}}{2} \right) 2^{-\frac{3}{2}(\beta-1)+3}.\end{aligned}$$

Если $\eta = 1$, то, имея в виду, что $\delta(\beta, N) = 0$, находим, что

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(2, N) &= \frac{26}{7} + \left(\frac{2}{7} + \frac{1}{4}\right) 2^{-\frac{3}{2}(\beta-1)+3} \\ &= \frac{26}{7} + \frac{15}{28} 2^{-\frac{3}{2}(\beta-1)+3}.\end{aligned}$$

Если $\eta = 2$, то

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(2, N) &= \frac{26}{7} + \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) 2^{-\frac{3}{2}(\beta-1)+3} \\ &= \frac{26}{7} - \frac{13}{28} 2^{-\frac{3}{2}(\beta-1)+3}.\end{aligned}$$

Если же $\eta \geq 3$, то

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(2, N) &= \frac{26}{7} + \left(\frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) 2^{-\frac{3}{2}(\beta-1)+3} \\ &= \frac{26}{7} + \frac{15}{28} 2^{-\frac{3}{2}(\beta-1)+3}.\end{aligned}$$

(iii) $\beta \geq 3$ нечетно. В этом случае из лемм 3 и 4 следует, что $\Phi(2^\alpha, N) = 0$ при $\alpha > \beta + 2$ и при всех нечетных α , $5 \leq \alpha \leq \beta + 2$, а $\Phi(2^\alpha, N)$ определяется при $\alpha = 1, 2, 3$ так же, как в предыдущих случаях, с помощью формул (12), (13) и (14) и при четных α , $4 \leq \alpha \leq \beta + 1$ леммой 3. Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(2, N) &= 1 + \Phi(2, N) + \Phi(2^2, N) + \sum_{\substack{\alpha=4 \\ \alpha \equiv 0 \pmod{2}}}^{\beta+1} \Phi(2^\alpha, N) \\ &= 1 + e\left(\frac{-N}{4}\right) + e\left(\frac{-2N}{4}\right) + e\left(\frac{-3N}{4}\right) - \sum_{\substack{\alpha=4 \\ \alpha \equiv 0 \pmod{2}}}^{\beta-1} 2^{-\frac{3\alpha}{2}+4} + 2^{-\frac{3\beta-5}{2}} \\ &= 4 - \sum_{\alpha_1=2}^{\frac{1}{2}(\beta-1)} 2^{-3\alpha_1+4} + 2^{-\frac{3}{2}(\beta-1)+1} = 4 - 2^{-2} \sum_{\alpha_1=0}^{\frac{1}{2}(\beta-1)-2} (2^{-3})^{\alpha_1} + 2^{-\frac{3}{2}(\beta-1)+1} \\ &= 4 - \frac{1 - (2^{-3})^{\frac{1}{2}(\beta-1)-1}}{2^2(1 - 2^{-3})} + 2^{-\frac{3}{2}(\beta-1)+1} = 4 - \frac{2 - 2^{-\frac{3}{2}(\beta-1)+4}}{7} + 2^{-\frac{3}{2}(\beta-1)+1} \\ &= 4 - \frac{2}{7} + \frac{2^{-\frac{3}{2}(\beta-1)+4}}{7} + 2^{-\frac{3}{2}(\beta-1)+1} = \frac{26}{7} + \left(\frac{2}{7} + \frac{1}{4}\right) 2^{-\frac{3}{2}(\beta-1)+3} \\ &= \frac{26}{7} + \frac{15}{28} 2^{-\frac{3}{2}(\beta-1)+3}.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Доказательство следствия 1. Из теоремы 2 при $\text{ord}_2(N) = \beta \geq 2$, четном β и $\eta = 2$, полагая $\beta = 2$, получаем, что

$$\mathcal{F}(2, N) \geq \frac{26}{7} - \frac{13}{28} 2^{-\frac{3}{2}(\beta-1)+3} \geq \frac{26}{7} - \frac{13}{28} 2^{\frac{3}{2}} \geq \frac{26}{7} - \frac{13\sqrt{2}}{14} \geq \frac{13}{14}(4 - \sqrt{2}) > \frac{65}{28}.$$

3. Вычисление $\mathcal{F}(p, N)$, $p > 2$

В этом параграфе для нечетных простых p доказывается теорема 3 о точном значении ряда $\mathcal{F}(p, N)$ и ее следствия 5, 7, 9, в которых, соответственно, получены оценки снизу для $\mathcal{F}(p, N)$ при $p \geq 7$, $\mathcal{F}(3, N)$, $\mathcal{F}(5, N)$. Предварительно мы приведем вспомогательные леммы о точных значениях тригонометрических сумм $V(a, p^\alpha)$, $T_2(a, p^\alpha)$, $\Phi(p^\alpha, N)$.

Лемма 5 ([2]). Пусть p — нечетное простое число, тогда для суммы Гаусса справедлива следующая формула:

$$\begin{aligned} S(a, p^\alpha) &= \sum_{n=1}^{p^\alpha} e\left(\frac{an^2}{p^\alpha}\right) = \delta_p^\alpha(a) i^{\left(\frac{p^\alpha-1}{2}\right)^2} p^{\frac{\alpha}{2}} \\ &= \begin{cases} \delta_p^\alpha(a) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} p^{\frac{\alpha}{2}}, & \text{если } \alpha \text{ нечетно,} \\ p^{\frac{\alpha}{2}}, & \text{если } \alpha \text{ четно.} \end{cases} \end{aligned}$$

Докажем лемму о точном значении суммы Рамануджана

$$\begin{aligned} c_q(n) &= \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q e\left(\frac{na}{q}\right) = \sum_{d \mid (q,n)} \mu\left(\frac{q}{d}\right) d, \\ c_p(n) &= \begin{cases} -1, & \text{если } (n, p) = 1, \\ p-1, & \text{если } (n, p) = p, \end{cases} \end{aligned}$$

когда ее модуль равен степени простого числа.

Лемма 6. Пусть p — нечетное простое число, $\alpha \geq 2$, $p^{\text{ord}_p(N)} \parallel N$, $\text{ord}_p(N) \leq \alpha - 1$. Тогда для суммы Рамануджана $c_{p^\alpha}(N)$ справедлива формула

$$c_{p^\alpha}(N) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{p^\alpha} e\left(\frac{Na}{p^\alpha}\right) = p^{\text{ord}_p(N)} \mu(p^{\alpha-\text{ord}_p(N)}).$$

Доказательство. Преобразуя сумму $c_{p^\alpha}(N)$ подстановкой $a_1 + a_2 p^{\alpha-\text{ord}_p(N)}$, где a_1 и a_2 независимо пробегает значения $a_1 = 1, 2, \dots, p^{\alpha-\text{ord}_p(N)}$, $a_2 = 0, 1, \dots, p^{\text{ord}_p(N)} - 1$ и пользуясь представлением $N_1 = N p^{-\text{ord}_p(N)}$, получим, что

$$\begin{aligned} c_{p^\alpha}(N) &= \sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{p^\alpha} e\left(\frac{Na}{p^{\alpha-\text{ord}_p(N)}}\right) = \sum_{\substack{a_1=1 \\ (a_1,p)=1}}^{p^{\alpha-\text{ord}_p(N)}} \sum_{a_2=0}^{p^{\text{ord}_p(N)}-1} e\left(\frac{N_1(a_1 + a_2 p^{\alpha-\text{ord}_p(N)})}{p^{\alpha-\text{ord}_p(N)}}\right) \\ &= p^{\text{ord}_p(N)} \sum_{\substack{a_1=1 \\ (a_1,p)=1}}^{p^{\alpha-\text{ord}_p(N)}} e\left(\frac{N_1 a_1}{p^{\alpha-\text{ord}_p(N)}}\right) \\ &= p^{\text{ord}_p(N)} \mu(p^{\alpha-\text{ord}_p(N)}). \end{aligned}$$

Лемма 7. Пусть p — нечетное простое число, $\alpha \geq 2$, $p^{\text{ord}_p(N)} \parallel N$. Тогда справедлива формула

$$\begin{aligned} V(p^\alpha, N) &= \sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{p^\alpha} \delta_p(a) e\left(-\frac{aN}{p^\alpha}\right) \\ &= \begin{cases} \delta_p(Np^{-\text{ord}_p(N)}) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} p^{\text{ord}_p(N)+\frac{1}{2}}, & \text{если } \alpha = \text{ord}_p(N) + 1, \\ 0, & \text{если } \alpha \neq \text{ord}_p(N) + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Доказательство. Если $\alpha \leq \text{ord}_p(N)$, то

$$V(p^\alpha, N) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{p^\alpha} \delta_p(a) = p^{\alpha-1} \sum_{a=1}^{p-1} \delta_p(a) = 0.$$

Пусть $\alpha > \text{ord}_p(N) \geq 1$ и $N = p^{\text{ord}_p(N)} N_1$, тогда

$$\begin{aligned} V(p^\alpha, N) &= \sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{p^\alpha} \delta_p(a) e\left(\frac{-aN_1}{p^{\alpha-\text{ord}_p(N)}}\right) \\ &= \sum_{\substack{a_1=1 \\ (a_1,p)=1}}^{p^{\alpha-\text{ord}_p(N)}} \sum_{a_2=0}^{p^{\text{ord}_p(N)}-1} \delta_p(a_1 + a_2 p^{\alpha-\text{ord}_p(N)}) e\left(-\frac{(a_1 + a_2 p^{\alpha-\text{ord}_p(N)}) N_1}{p^{\alpha-\text{ord}_p(N)}}\right) \\ &= \sum_{\substack{a_1=1 \\ (a_1,p)=1}}^{p^{\alpha-\text{ord}_p(N)}} \delta_p(a_1) e\left(-\frac{a_1 N_1}{p^{\alpha-\text{ord}_p(N)}}\right) \sum_{a_2=0}^{p^{\text{ord}_p(N)}-1} 1 \\ &= p^{\text{ord}_p(N)} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{p^{\alpha-\text{ord}_p(N)}} \delta_p(a) e\left(-\frac{aN_1}{p^{\alpha-\text{ord}_p(N)}}\right) \\ &= p^{\text{ord}_p(N)} V(p^{\alpha-\text{ord}_p(N)}, N_1) = p^{\text{ord}_p(N)} V(p^{\alpha-\text{ord}_p(N)}, Np^{-\text{ord}_p(N)}). \end{aligned}$$

Таким образом, при $\alpha > \text{ord}_p(N) \geq 1$ сумма $V(p^\alpha, N)$ рекуррентно выражается через сумму $V(p^\nu, N_1)$, $\nu = \alpha - \text{ord}_p(N)$, $N_1 = Np^{-\text{ord}_p(N)}$, $(N_1, p) = 1$. Сумма $V(p, N_1)$ в точности совпадает с суммой Гаусса $S(N_1, p)$, то есть

$$V(p, N_1) = S(N_1, p) = \delta_p(N_1) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} p^{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому при $\alpha = \text{ord}_p(N) + 1$ получаем равенство

$$\begin{aligned} V(p^\alpha, N) &= V(p^{\text{ord}_p(N)+1}, N) = p^{\text{ord}_p(N)} V(p, N_1) \\ &= \delta_p(Np^{-\text{ord}_p(N)}) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} p^{\text{ord}_p(N)+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

При $\nu \geq 2$, преобразуя сумму $V(p^\nu, N_1)$ подстановкой $a_1 + p^{\nu-1}a_2$, где a_1, a_2 независимо пробегает значения $a_1 = 1, 2, \dots, p^{\nu-1}, a_2 = 0, 1, \dots, p-1$, получаем, что

$$\begin{aligned} V(p^\nu, N_1) &= \sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{p^\nu} \delta_p(a) e\left(-\frac{aN_1}{p^\nu}\right) \\ &= \sum_{\substack{a_1=1 \\ (a_1,p)=1}}^{p^{\nu-1}} \sum_{a_2=1}^p \delta_p(a_1 + p^{\nu-1}a_2) e\left(-\frac{N_1(a_1 + p^{\nu-1}a_2)}{p^\nu}\right) \\ &= \sum_{\substack{a_1=1 \\ (a_1,p)=1}}^{p^{\nu-1}} \delta_p(a_1) e\left(-\frac{Na_1}{p^\nu}\right) \sum_{a_2=1}^p e\left(-\frac{N_1a_2}{p}\right) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, при $\alpha \geq \text{ord}_p(N) + 2$

$$\begin{aligned} V(p^\alpha, N) &= p^{\text{ord}_p(N)} V(p^{\alpha-\text{ord}_p(N)}, N_1) \\ &= p^{\text{ord}_p(N)} V(p^{\alpha-\text{ord}_p(N)}, Np^{-\text{ord}_p(N)}) = 0. \end{aligned}$$

Лемма 8. Пусть p — нечетное простое число, $(a, p) = 1$, тогда справедлива формула

$$T_2(a, p^\alpha) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,p)=1}}^{p^\alpha} e\left(\frac{a(n+1)^2}{p^\alpha}\right) = \begin{cases} S(a, p) - e\left(\frac{a}{p}\right), & \alpha = 1; \\ pS(a, p^{\alpha-2}), & \alpha \geq 2. \end{cases}$$

Доказательство. При $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} T_2(a, p) &= \sum_{\substack{n=1 \\ (n,p)=1}}^p e\left(\frac{a(n+1)^2}{p}\right) = \sum_{n=1}^{p-1} e\left(\frac{a(n+1)^2}{p}\right) \\ &= \sum_{n=1}^p e\left(\frac{a(n+1)^2}{p}\right) - e\left(\frac{a}{p}\right) = \sum_{n=1}^p e\left(\frac{an^2}{p}\right) - e\left(\frac{a}{p}\right) \\ &= S(a, p) - e\left(\frac{a}{p}\right). \end{aligned}$$

Пусть теперь $\alpha \geq 2$, тогда

$$\begin{aligned} T_2(a, p^\alpha) &= \sum_{\substack{n=1 \\ (n,p)=1}}^{p^\alpha} e\left(\frac{a(n+1)^2}{p^\alpha}\right) \sum_{\substack{v=0 \\ v \equiv n \pmod{p}}}^{p-1} 1 \\ &= \sum_{\substack{v=0 \\ (v,p)=1}}^{p-1} \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv v \pmod{p}}}^{p^\alpha} e\left(\frac{a(n+1)^2}{p^\alpha}\right) = \sum_{v=1}^{p-1} T_v, \tag{15} \\ T_v &= \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv v \pmod{p}}}^{p^\alpha} e\left(\frac{a(n+1)^2}{p^\alpha}\right). \end{aligned}$$

Преобразуя сумму T_v подстановкой $y + p^{\alpha-1}z$, где y, z независимо пробегает значения $y = 1, 2, \dots, p^{\alpha-1}, z = 0, 1, \dots, p-1$, получим, что

$$\begin{aligned} T_v &= \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv v \pmod{p}}}^{p^{\alpha-1}} \sum_{z=0}^{p-1} e\left(\frac{a(y+1+p^{\alpha-1}z)^2}{p^\alpha}\right) \\ &= \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv v \pmod{p}}}^{p^{\alpha-1}} e\left(\frac{a(y+1)^2}{p^\alpha}\right) \sum_{z=0}^{p-1} e\left(\frac{a((y+1+p^{\alpha-1}z)^2 - (y+1)^2)}{p^\alpha}\right). \end{aligned}$$

Из соотношения

$$\begin{aligned} (y+1+p^{\alpha-1}z)^2 - (y+1)^2 &= 2(y+1)p^{\alpha-1}z + p^{2\alpha-2}z^2 \\ &\equiv 2(y+1)p^{\alpha-1}z \pmod{p^\alpha} \end{aligned}$$

следует, что

$$T_v = \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv v \pmod{p}}}^{p^{\alpha-1}} e\left(\frac{a(y+1)^2}{p^\alpha}\right) \sum_{z=0}^{p-1} e\left(\frac{2a(y+1)z}{p}\right).$$

Сумма по z является полной линейной тригонометрической суммой по модулю p . Поэтому $T_v = 0$, если $y \not\equiv -1 \pmod{p}$, то есть, если $v \neq p-1$. Следовательно, в сумме (15) остается только одно слагаемое с $v = p-1$:

$$T_2(a, p^\alpha) = T_{p-1} = p \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv p-1 \pmod{p}}}^{p^{\alpha-1}} e\left(\frac{a(y+1)^2}{p^\alpha}\right). \quad (16)$$

Отсюда, в частности, при $\alpha = 2$, получаем, что

$$T_2(a, p^2) = p \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv p-1 \pmod{p}}}^p e\left(\frac{a(y+1)^2}{p^2}\right) = pe\left(\frac{ap^2}{p^2}\right) = p.$$

Преобразуя сумму T_{p-1} в (16) подстановкой $y = p-1 + px$, где x пробегает значения $0, 1, 2, \dots, p^{\alpha-2}-1$, получаем, что

$$\begin{aligned} T_{p-1} &= p \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv p-1 \pmod{p}}}^{p^{\alpha-1}} e\left(\frac{a(y+1)^2}{p^\alpha}\right) = p \sum_{x=0}^{p^{\alpha-2}-1} e\left(\frac{a(p+px)^2}{p^\alpha}\right) \\ &= p \sum_{x=0}^{p^{\alpha-2}-1} e\left(\frac{a(x+1)^2}{p^{\alpha-2}}\right) = p \sum_{x=1}^{p^{\alpha-2}} e\left(\frac{ax^2}{p^{\alpha-2}}\right) = pS(a, p^{\alpha-2}). \end{aligned}$$

Следствие 7. Пусть p – нечетное простое число, $(a, p) = 1$, $\kappa(\alpha) = 1$, если $\alpha = 1$ и $\kappa(\alpha) = 0$, если $\alpha \geq 2$. Тогда

$$T(a, p^\alpha) = \begin{cases} \delta_p(a) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} p^{\frac{\alpha}{2}} - \kappa(\alpha) e\left(\frac{a}{p}\right), & \text{если } \alpha \text{ нечетно,} \\ p^{\frac{\alpha}{2}}, & \text{если } \alpha \text{ четно.} \end{cases}$$

Доказательство. Подставляя в правую часть формулы для $T_2(a, p^\alpha)$ в лемме 8 точное значение суммы Гаусса из леммы 5, получаем, что

$$T(a, p) = S(a, p) - e\left(\frac{a}{p}\right) = \delta_p(a) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} p^{\frac{1}{2}} - e\left(\frac{a}{p}\right);$$

в случае $\alpha \geq 3$ и нечетном α

$$T(a, p^\alpha) = pS(a, p^{\alpha-2}) = p\delta_p(a) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} p^{\frac{\alpha-2}{2}} = \delta_p(a) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} p^{\frac{\alpha}{2}};$$

в случае $\alpha \geq 2$ и четном α

$$T(a, p^\alpha) = pS(a, p^{\alpha-2}) = p \cdot p^{\frac{\alpha-2}{2}} = p^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Лемма 9. Пусть p — нечетное простое число, тогда

$$\begin{aligned} \Phi(p, N) = \frac{1}{\varphi^5(p)} & (-c_p(N-5) - 10\varepsilon_p p c_p(N-3) \\ & - 5p^2 c_p(N-1) + 5p\delta_p(N-4) + 10\varepsilon_p \delta_p(N-2)p^2 + \delta_p(N)p^3). \end{aligned}$$

Доказательство. Согласно лемме 8, имеет место формула

$$T_2(a, p) = S(a, p) - e\left(\frac{a}{p}\right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Phi(p, N) &= \frac{1}{\varphi^5(p)} \sum_{a=1}^{p-1} \left[S(a, p) - e\left(\frac{a}{p}\right) \right]^5 e\left(-\frac{aN}{p}\right) \\ &= -\frac{1}{\varphi^5(p)} \sum_{a=1}^{p-1} \left[1 - S(a, p) e\left(-\frac{a}{p}\right) \right]^5 e\left(\frac{a(5-N)}{p}\right) \\ &= -\frac{1}{\varphi^5(p)} \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{j=0}^5 (-1)^j \binom{5}{j} S^j(a, p) e\left(\frac{(5-j-N)a}{p}\right) \\ &= \frac{1}{\varphi^5(p)} \sum_{j=0}^5 (-1)^{j+1} \binom{5}{j} \sum_{a=1}^{p-1} S^j(a, p) e\left(\frac{(5-j-N)a}{p}\right). \end{aligned}$$

Пользуясь леммой 5 о точном значении суммы Гаусса для нечетных простых чисел и разбивая сумму по j отдельно по четным и отдельно по нечетным числам, находим, что

$$\begin{aligned} \Phi(p, N) &= \frac{1}{\varphi^5(p)} \sum_{j=0}^5 (-1)^{j+1} \binom{5}{j} i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 j} p^{\frac{j}{2}} \sum_{a=1}^{p-1} \delta_p^j(a) e\left(\frac{a(5-j-N)}{p}\right) \\ &= \frac{1}{\varphi^5(p)} \left(-\sum_{l=0}^2 \binom{5}{2l} p^l i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 2l} \sum_{a=1}^{p-1} e\left(\frac{a(5-2l-N)}{p}\right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^3 \binom{5}{2l-1} p^{l-\frac{1}{2}} i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 (2l-1)} \sum_{a=1}^{p-1} \delta_p(a) e\left(\frac{a(6-2l-N)}{p}\right) \right). \end{aligned}$$

В правой части последнего равенства первая сумма по a является суммой Рамануджана $c_p(5 - 2l - N)$. Вторую сумму по a представим через сумму Гаусса $S(1, p)$, а затем подставим ее значение (лемма 5), в результате получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^{p-1} \delta_p(a) e\left(\frac{(6 - 2l - N)a}{p}\right) &= \delta_p(6 - 2l - N) S(1, p) \\ &= \delta_p(6 - 2l - N) p^{1/2} i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Далее, пользуясь тождеством

$$i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 2l} = (-1)^{\frac{p-1}{2}l},$$

находим, что

$$\begin{aligned} \Phi(p, N) &= \frac{1}{\varphi^5(p)} \left(- \sum_{l=0}^2 \binom{5}{2l} p^l (-1)^{\frac{p-1}{2}l} c_p(5 - 2l - N) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^3 \binom{5}{2l-1} p^l (-1)^{\frac{p-1}{2}l} \delta_p(6 - 2l - N) \right) \\ &= \frac{1}{\varphi^5(p)} \left(- \sum_{l=0}^2 \binom{5}{2l} p^l (-1)^{\frac{p-1}{2}l} c_p(N + 2l - 5) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^3 \binom{5}{2l-1} p^l (-1)^{\frac{p-1}{2}(l-1)} \delta_p(N + 2l - 6) \right) \\ &= \frac{1}{\varphi^5(p)} (-c_p(N - 5) - 10\varepsilon_p p c_p(N - 3) - 5p^2 c_p(N - 1) \\ &\quad + 5p \delta_p(N - 4) + 10\varepsilon_p \delta_p(N - 2) p^2 + \delta_p(N) p^3). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пользуясь этой леммой соответственно в следствиях 8 и 9, мы вычисляем значения $\Phi(3, N)$ и $\Phi(5, N)$, а в следствии 10 при $p \geq 7$ находим оценку снизу для $\Phi(p, N)$.

Следствие 8. *Справедлива формула*

$$\Phi(3, N) = \begin{cases} 2^{-5}, & N \equiv 0 \pmod{3}, \\ -2^{-4}, & N \equiv 1 \pmod{3}, \\ 2^{-5}, & N \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Доказательство. В утверждении леммы 9, положив $p = 3$ и имея в виду, что $\varepsilon_3 = -1$, находим, что

$$\begin{aligned} \Phi(3, N) &= 2^{-5} (-c_3(N - 5) + 30c_3(N - 3) - 45c_3(N - 1) + 15\delta_3(N - 4) \\ &\quad - 90\delta_3(N - 2) + 27\delta_3(N)). \end{aligned}$$

Пусть $N \equiv r \pmod{3}$, $r = 0, 1, 2$, тогда, учитывая, что $\Phi(3, N) = \Phi(3, r)$, получаем, что

$$\begin{aligned}\Phi(3, 0) &= 2^{-5}(-c_3(1) + 30c_3(0) - 45c_3(2) + 15\delta_3(2) - 90\delta_3(1) + 27\delta_3(0)) \\ &= 2^{-5}(1 + 60 + 45 - 15 - 90) = 2^{-5}, \\ \Phi(3, 1) &= 2^{-5}(-c_3(2) + 30c_3(1) - 45c_3(0) + 15\delta_3(0) - 90\delta_3(2) + 27\delta_3(1)) \\ &= 2^{-5}(1 - 30 - 90 + 90 + 27) = -2^{-4}, \\ \Phi(3, 2) &= 2^{-5}(-c_3(0) + 30c_3(2) - 45c_3(1) + 15\delta_3(1) - 90\delta_3(0) + 27\delta_3(2)) \\ &= 2^{-5}(-2 - 30 + 45 + 15 - 27) = 2^{-5}.\end{aligned}$$

Следствие 9. *Справедлива формула*

$$\Phi(5, N) = \begin{cases} -54 \cdot 2^{-10}, & N \equiv 0 \pmod{5}, \\ 99 \cdot 2^{-10}, & N \equiv 1 \pmod{5}, \\ 26 \cdot 2^{-10}, & N \equiv 2 \pmod{5}, \\ 76 \cdot 2^{-10}, & N \equiv 3 \pmod{5}, \\ 51 \cdot 2^{-10}, & N \equiv 4 \pmod{5}. \end{cases}$$

Доказательство. Полагая $p = 5$ в утверждении леммы 9 и имея в виду, что $\varepsilon_5 = 1$, находим, что

$$\begin{aligned}\Phi(5, N) &= 2^{-10}(-c_5(N-5) - 50c_5(N-3) - 125c_5(N-1) \\ &\quad + 25\delta_5(N-4) + 250\delta_5(N-2) + 125\delta_5(N)).\end{aligned}$$

Пусть $N \equiv r \pmod{5}$, $r = 0, 1, 2, 3, 4$, тогда, учитывая, что $\Phi(5, N) = \Phi(5, r)$, получаем, что

$$\begin{aligned}\Phi(5, 0) &= 4^{-5}(-c_5(0) - 50c_5(2) - 125c_5(4) + 25\delta_5(1) + 250\delta_5(3) + 125\delta_5(0)) \\ &= 4^{-5}(-4 + 50 + 125 + 25 - 250) = -54 \cdot 2^{-10}, \\ \Phi(5, 1) &= 4^{-5}(-c_5(1) - 50c_5(3) - 125c_5(0) + 25\delta_5(2) + 250\delta_5(4) + 125\delta_5(1)) \\ &= 4^{-5}(1 + 50 - 500 - 25 + 250 + 125) = 99 \cdot 2^{-10}, \\ \Phi(5, 2) &= 4^{-5}(-c_5(2) - 50c_5(4) - 125c_5(1) + 25\delta_5(3) + 250\delta_5(0) + 125\delta_5(2)) \\ &= 4^{-5}(1 + 50 + 125 - 25 - 125) = 26 \cdot 2^{-10}, \\ \Phi(5, 3) &= 4^{-5}(-c_5(3) - 50c_5(0) - 125c_5(2) + 25\delta_5(4) + 250\delta_5(1) + 125\delta_5(3)) \\ &= 4^{-5}(1 - 200 + 125 + 25 + 250 - 125) = 76 \cdot 2^{-10}, \\ \Phi(5, 4) &= 4^{-5}(-c_5(4) - 50c_5(1) - 125c_5(3) + 25\delta_5(0) + 250\delta_5(2) + 125\delta_5(4)) \\ &= 4^{-5}(1 + 50 + 125 - 250 + 125) = 51 \cdot 2^{-10}.\end{aligned}$$

Следствие 10. *При $p \geq 7$ справедливы оценки*

$$\begin{aligned}\Phi(p, N) &> -\frac{10}{\varphi^2(p)}, & (N, p) = 1, \\ \Phi(p, N) &> -\frac{9}{\varphi^3(p)}, & (N, p) = p.\end{aligned}$$

Доказательство. Переходя к оценкам в формуле для $\Phi(p, N)$, полученной в лемме 3.5, пользуясь точным значением суммы Рамануджана

$$c_p(n) = \begin{cases} -1, & (n, p) = 1, \\ p-1, & (n, p) = p, \end{cases}$$

и имея в виду, что $|\varepsilon_p| = 1$, при $(N, p) = 1$ находим, что

$$\begin{aligned} \Phi(p, N) &= \frac{1}{\varphi^5(p)} (-c_p(N-5) - 10\varepsilon_p p c_p(N-3) - 5p^2 c_p(N-1) \\ &\quad + 5p\delta_p(N-4) + 10\varepsilon_p p^2 \delta_p(N-2) + p^3 \delta_p(N)) \\ &\geq \frac{1}{\varphi^5(p)} (1 - p - 10p(p-1) - 5p^2(p-1) - 5p - 10p^2 - p^3) \\ &= \frac{1}{\varphi^5(p)} (1 + 4p - 15p^2 - 6p^3) \\ &= \frac{1}{\varphi^5(p)} (-6p^2(p-1) - 21p(p-1) - 17(p-1) - 16) \\ &= \frac{-6\varphi^3(p) - 21\varphi^2(p) - 17\varphi(p) - 16}{\varphi^5(p)} \\ &= -\frac{6}{\varphi^2(p)} - \frac{21}{\varphi^3(p)} - \frac{17}{\varphi^4(p)} - \frac{16}{\varphi^5(p)} = -\frac{1}{\varphi^2(p)} \left(6 + \frac{21}{\varphi(p)} + \frac{17}{\varphi^2(p)} + \frac{16}{\varphi^3(p)} \right) \\ &\geq -\frac{1}{\varphi^2(p)} \left(6 + \frac{21}{\varphi(7)} + \frac{17}{\varphi^2(7)} + \frac{16}{\varphi^3(7)} \right) = -\frac{1}{\varphi^2(p)} \left(6 + \frac{21}{6} + \frac{17}{6^2} + \frac{16}{6^3} \right) \\ &= -\frac{1}{\varphi^2(p)} \left(\frac{19}{2} + \frac{119+16}{7^2 \cdot 6} \right) = -\frac{1}{\varphi^2(p)} \left(\frac{2170}{6^3} \right) \\ &= -\frac{1}{\varphi^2(p)} \frac{976}{7^2 \cdot 2} = -\frac{1}{\varphi^2(p)} \frac{1085}{113} > -\frac{10}{\varphi^2(p)}, \end{aligned}$$

в то время как для $(N, p) = p$

$$\begin{aligned} \Phi(p, N) &= \frac{1}{\varphi^5(p)} (-c_p(N-5) - 10\varepsilon_p p c_p(N-3) - 5p^2 c_p(N-1) \\ &\quad + 5p\delta_p(N-4) + 10\varepsilon_p p^2 \delta_p(N-2) + p^3 \delta_p(N)) \\ &\geq \frac{1}{\varphi^5(p)} (1 - 10p + 5p^2 - 5p - 10p^2) = \frac{1}{\varphi^5(p)} (1 - 15p - 5p^2) \\ &= \frac{1}{\varphi^5(p)} (-5p(p-1) - 20(p-1) - 21) = \frac{-5\varphi^2(p) - 20\varphi(p) - 21}{\varphi^5(p)} \\ &= -\frac{5}{\varphi^3(p)} - \frac{20}{\varphi^4(p)} - \frac{21}{\varphi^5(p)} = -\frac{1}{\varphi^3(p)} \left(5 + \frac{20}{\varphi(p)} + \frac{21}{\varphi^2(p)} \right) \\ &\geq -\frac{1}{\varphi^3(p)} \left(5 + \frac{20}{\varphi(7)} + \frac{21}{\varphi^2(7)} \right) = -\frac{1}{\varphi^3(p)} \left(5 + \frac{20}{6} + \frac{21}{6^2} \right) \\ &= -\frac{319}{36 \cdot \varphi^3(p)} > -\frac{9}{\varphi^3(p)}. \end{aligned}$$

Следствие доказано.

Лемма 10. Пусть p — нечетное простое число, $p^{\text{ord}_p(N)} \parallel N$, $\alpha \geq 2$ — четное число. Тогда справедлива формула

$$\Phi(p^\alpha, N) = \begin{cases} \frac{p^{\frac{5\alpha}{2}}}{\varphi^4(p^\alpha)}, & \alpha \leq \text{ord}_p(N), \\ -\frac{p^{\frac{7\text{ord}_p(N)+5}{2}}}{\varphi^5(p^{\text{ord}_p(N)+1})}, & \alpha = \text{ord}_p(N) + 1, \\ 0, & \alpha \geq \text{ord}_p(N) + 2. \end{cases}$$

Доказательство. Согласно следствию 7, для четных значений α имеет место формула

$$T_2(a, p^\alpha) = p^{\alpha/2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Phi(p^\alpha, N) &= \frac{1}{\varphi^5(p^\alpha)} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,p)=1}}^{p^\alpha-1} T_2^5(a, p^\alpha) e\left(-\frac{aN}{p^\alpha}\right) \\ &= \frac{p^{\frac{5\alpha}{2}}}{\varphi^5(p^\alpha)} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{p^\alpha} e\left(-\frac{aN}{p^\alpha}\right) = \frac{p^{\frac{5\alpha}{2}}}{\varphi^5(p^\alpha)} c_{p^\alpha}(-N), \end{aligned}$$

где $c_{p^\alpha}(-N)$ — сумма Рамануджана. Если $\alpha \leq \text{ord}_p(N)$, то

$$c_{p^\alpha}(-N) = \varphi(p^\alpha).$$

Поэтому

$$\Phi(p^\alpha, N) = \frac{p^{5\alpha/2}}{\varphi^4(p^\alpha)}.$$

Если $\alpha \geq \text{ord}_p(N) + 1$, то согласно лемме 6

$$c_{p^\alpha}(N) = p^{\text{ord}_p(N)} \mu(p^{\alpha-\text{ord}_p(N)}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi(p^\alpha, N) &= \frac{p^{\frac{5\alpha}{2}}}{\varphi^5(p^\alpha)} c_{p^\alpha}(-N) = \frac{p^{\frac{5\alpha}{2}}}{\varphi^5(p^\alpha)} p^{\text{ord}_p(N)} \mu(p^{\alpha-\text{ord}_p(N)}) \\ &= \frac{p^{\frac{5\alpha}{2} + \text{ord}_p(N)}}{\varphi^5(p^\alpha)} \mu(p^{\alpha-\text{ord}_p(N)}). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 11. Пусть p — нечетное простое число, $p^{\text{ord}_p(N)} \parallel N$, $\alpha \geq 3$ — нечетное число. Тогда справедлива формула

$$\Phi(p^\alpha, N) = \begin{cases} (-1)^{\frac{p-1}{2}} \delta_p(N p^{-\text{ord}_p(N)}) \frac{p^{\frac{7\text{ord}_p(N)+3}{2}}}{\varphi^5(p^{\text{ord}_p(N)+1})}, & \alpha = \text{ord}_p(N) + 1, \\ 0, & \alpha \neq \text{ord}_p(N) + 1, \end{cases}$$

Доказательство. Пользуясь следствием 7 для нечетных $\alpha \geq 3$, находим, что

$$\begin{aligned}\Phi(p^\alpha, N) &= \frac{1}{\varphi^5(p^\alpha)} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,p)=1}}^{p^\alpha-1} T_2^5(a, p^\alpha) e\left(-\frac{aN}{p^\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{\varphi^5(p^\alpha)} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{p^\alpha} [\delta_p(a) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} p^{\frac{\alpha}{2}}]^5 e\left(-\frac{aN}{p^\alpha}\right) \\ &= \frac{i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} p^{\frac{5\alpha}{2}}}{\varphi^5(p^\alpha)} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{p^\alpha} \delta_p(a) e\left(-\frac{aN}{p^\alpha}\right) = \frac{i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} p^{\frac{5\alpha}{2}}}{\varphi^5(p^\alpha)} V(p^\alpha, N).\end{aligned}$$

Подставляя при $\alpha = \text{ord}_p(N) + 1$ в правую часть равенства значение $V(p^{\text{ord}_p(N)+1}, N)$ из леммы 4 и имея в виду, что

$$i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \cdot 2} = (-1)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} = (-1)^{\frac{p-1}{2}},$$

находим, что

$$\begin{aligned}\Phi(p^{\text{ord}_p(N)+1}, N) &= \frac{i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} p^{\frac{5(\text{ord}_p(N)+1)}{2}}}{\varphi^5(p^{\text{ord}_p(N)+1})} \delta_p(N p^{-\text{ord}_p(N)}) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} p^{\text{ord}_p(N)+\frac{1}{2}} \\ &= (-1)^{\frac{p-1}{2}} \delta_p(N p^{-\text{ord}_p(N)}) \frac{p^{\frac{7\text{ord}_p(N)}{2}+3}}{\varphi^5(p^{\text{ord}_p(N)+1})}.\end{aligned}$$

Если $\alpha \neq \text{ord}_p(N) + 1$, то, согласно лемме 4, $V(p^\alpha, N) = 0$, поэтому $\Phi(p^\alpha, N) = 0$.

Следствие 11. Пусть p — нечетное простое число, $(N, p) = 1$, $\alpha \geq 2$, тогда $\Phi(p^\alpha, N) = 0$.

Это утверждение непосредственно следует из лемм 11 и 10 при $\text{ord}_p(N) = 0$.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\text{ord}_p(N) = \beta$. Справедливы равенства

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(p, N) &= 1 + \Phi(p, N) + \mathcal{F}_1(p, N), \\ \mathcal{F}_1(p, N) &= \sum_{\alpha=2}^{\infty} \Phi(p^\alpha, N).\end{aligned}$$

Значение $\Phi(p, N)$ вычислено в лемме 9. Для вычисления $\mathcal{F}_1(p, N)$ рассмотрим три возможных случая.

(i) $\beta = 0$. Согласно следствию 11, для всех $\alpha \geq 2$ верно равенство $\Phi(p^\alpha, N) = 0$, поэтому $\mathcal{F}_1(p, N) = 0$.

(ii) $\beta \geq 1$ — нечетное число. В этом случае для четных $\alpha \geq \beta + 3$ из леммы 10, а для нечетных $\alpha \geq 3$ из леммы 11, соответственно, следует, что $\Phi(p^\alpha, N) = 0$, а значение $\Phi(p^\alpha, N)$ для четных α , $2 \leq \alpha \leq \beta + 1$ определяется леммой 10. Поэтому

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(p, N) &= \sum_{\substack{\alpha=2 \\ \alpha \equiv 0 \pmod{2}}}^{\beta-1} \Phi(p^\alpha, N) + \Phi(p^{\beta+1}, N) = \sum_{\substack{\alpha=2 \\ \alpha \equiv 0 \pmod{2}}}^{\beta-1} \frac{p^{\frac{5\alpha}{2}}}{\varphi^4(p^\alpha)} - \frac{p^{\frac{7\beta+5}{2}}}{\varphi^5(p^{\beta+1})} \\
&= \sum_{\substack{\alpha=2 \\ \alpha \equiv 0 \pmod{2}}}^{\beta-1} \frac{p^{\frac{5\alpha}{2}}}{(p^{\alpha-1}(p-1))^4} - \frac{p^{\frac{7\beta+5}{2}}}{(p^\beta(p-1))^5} \\
&= \frac{p^4}{(p-1)^4} \sum_{\substack{\alpha=2 \\ \alpha \equiv 0 \pmod{2}}}^{\beta-1} p^{-\frac{3}{2}\alpha} - \frac{p^{-\frac{3}{2}\beta+\frac{5}{2}}}{(p-1)^5} \\
&= \frac{p^4}{(p-1)^4} \sum_{\alpha_1=1}^{\frac{1}{2}(\beta-1)} p^{-3\alpha_1} - \frac{p^{-\frac{3}{2}\beta+\frac{5}{2}}}{(p-1)^5} = \frac{p}{(p-1)^4} \sum_{\alpha_1=0}^{\frac{1}{2}(\beta-1)-1} p^{-3\alpha_1} - \frac{p^{-\frac{3}{2}\beta+\frac{5}{2}}}{(p-1)^5} \\
&= \frac{p}{(p-1)^4} \frac{1 - p^{-\frac{3}{2}(\beta-1)}}{1 - p^{-3}} - \frac{p^{-\frac{3}{2}(\beta-1)+1}}{(p-1)^5} \\
&= -\frac{p}{(p-1)^5} + \frac{p}{(p-1)^4} \left(\frac{1 - p^{-\frac{3}{2}(\beta-1)}}{1 - p^{-3}} + \frac{1 - p^{-\frac{3}{2}(\beta-1)}}{p-1} \right) \\
&= -\frac{p}{(p-1)^5} + \frac{p(1 - p^{-\frac{3}{2}(\beta-1)})}{(p-1)^4} \left(\frac{1}{1 - p^{-3}} + \frac{1}{p-1} \right) \\
&= -\frac{p}{(p-1)^5} + \frac{p^5 - p}{(p-1)^5(p^3 - 1)} (1 - p^{-\frac{3}{2}(\beta-1)}) = -\frac{p}{(p-1)^5} + \Delta(p, N), \\
\Delta(p, N) &= \frac{p^5 - p}{(p-1)^5(p^3 - 1)} \left(1 - \frac{1}{p^{\frac{3}{2}(\beta-1)}} \right).
\end{aligned}$$

(iii) $\beta \geq 2$ — четное число. Соответственно, для четных $\alpha \geq \beta + 2$ из леммы 10 и для нечетных $\alpha \neq \beta + 1$, $\alpha \geq 3$, из леммы 11 следует, что $\Phi(p^\alpha, N) = 0$. Определяя $\Phi(p^\alpha, N)$ при четных $2 \leq \alpha \leq \beta$ леммой 10, а $\Phi(p^{\beta+1}, N)$ — леммой 11, находим, что

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(p, N) &= \sum_{\substack{\alpha=2 \\ \alpha \equiv 0 \pmod{2}}}^{\beta} \Phi(p^\alpha, N) + \Phi(p^{\beta+1}, N) \\
&= \sum_{\substack{\alpha=2 \\ \alpha \equiv 0 \pmod{2}}}^{\beta} \frac{p^{\frac{5\alpha}{2}}}{\varphi^4(p^\alpha)} + \varepsilon_p \delta_p(N) \frac{p^{\frac{7\beta}{2}+3}}{\varphi^5(p^{\beta+1})} \\
&= \sum_{\substack{\alpha=2 \\ \alpha \equiv 0 \pmod{2}}}^{\beta} \frac{p^{\frac{5\alpha}{2}}}{(p^{\alpha-1}(p-1))^4} + \varepsilon_p \delta_p(N) \frac{p^{\frac{7\beta}{2}+3}}{(p^\beta(p-1))^5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{p^4}{(p-1)^4} \sum_{\substack{\alpha=2 \\ \alpha \equiv 0 \pmod{2}}}^{\beta} p^{-\frac{3}{2}\alpha} + \varepsilon_p \delta_p(N) \frac{p^{-\frac{3}{2}\beta+3}}{(p-1)^5} \\
&= \frac{p^4}{(p-1)^4} \sum_{\alpha_1=1}^{\frac{1}{2}\beta} p^{-3\alpha_1} + \varepsilon_p \delta_p(N) \frac{p^{-\frac{3}{2}\beta+3}}{(p-1)^5} \\
&= \frac{p}{(p-1)^4} \sum_{\alpha_1=0}^{\frac{1}{2}\beta-1} p^{-3\alpha_1} + \varepsilon_p \delta_p(N) \frac{p^{-\frac{3}{2}\beta+3}}{(p-1)^5} \\
&= \frac{p}{(p-1)^4} \left(\frac{1-p^{-\frac{3}{2}\beta}}{1-p^{-3}} + \varepsilon_p \delta_p(N) \frac{p^{-\frac{3}{2}\beta+2}}{p-1} \right) \\
&= \frac{p}{(p-1)^4} \left(\frac{1-p^{-\frac{3}{2}\beta}}{1-p^{-3}} - \frac{p^{-\frac{3}{2}\beta+2}}{p-1} + (1 + \varepsilon_p \delta_p(N)) \frac{p^{-\frac{3}{2}\beta+2}}{p-1} \right) \\
&= \frac{p}{(p-1)^4} \left(\frac{1-p^{-\frac{3}{2}\beta}}{1-p^{-3}} - \frac{p^{-\frac{3}{2}\beta+2}}{p-1} \right) + \Delta(p, N) \\
&= \frac{p}{(p-1)^4} \left(\frac{1-p^{-\frac{3}{2}\beta}}{1-p^{-3}} - \frac{p^{-\frac{3}{2}\beta+1}(1+p^{-1}+p^{-2})}{1-p^{-3}} \right) + \Delta(p, N) \\
&= \frac{p}{(p-1)^4(1-p^{-3})} \left(1-p^{-\frac{3}{2}(\beta-2)-2}(1+2p^{-1}+p^{-2}) \right) + \Delta(p, N) \\
&= \frac{p^4}{(p-1)^4(p^3-1)} \left(1 - \frac{(p+1)^2}{p^{\frac{3}{2}(\beta-2)+4}} \right) + \Delta(p, N), \\
\Delta(p, N) &= \frac{1 + \varepsilon_p \delta_p(N)}{(p-1)^5 p^{\frac{3}{2}(\beta-2)}}.
\end{aligned}$$

Доказательство следствия 1. Рассмотрим три возможных случая.

(I) $\beta = 0$. Из теоремы 3 и следствия 10, соответственно, следует, что

$$\mathcal{F}(p, N) = 1 + \Phi(p, N), \quad \Phi(p, N) > -\frac{10}{\varphi^2(p)}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{F}(p, N) > 1 - \frac{10}{\varphi^2(p)}.$$

(II) $\beta \geq 1$ нечетно. В этом случае, также пользуясь следствием 10 и теоремой 3, находим, что

$$\begin{aligned}
\Phi(p, N) &> -\frac{9}{\varphi^3(p)}, \\
\mathcal{F}_1(p, N) &= -\frac{p}{(p-1)^5} + \frac{p^5-p}{(p-1)^5(p^3-1)} \left(1 - \frac{1}{p^{\frac{3}{2}(\beta-1)}} \right) \\
&\geq -\frac{p}{(p-1)^5} = -\frac{1}{\varphi^3(p)} \frac{p}{(p-1)^2} \geq -\frac{1}{\varphi^3(p)}.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(p, N) &= 1 + \Phi(p, N) + \mathcal{F}_1(p, N) \\ &> 1 - \frac{10}{\varphi^3(p)} > 1 - \frac{10}{\varphi^2(p)}.\end{aligned}$$

(III) $\beta \geq 2$ четно. Поступая, как в предыдущих случаях, то есть применяя следствие 10 и теорему 3, находим, что

$$\begin{aligned}\Phi(p, N) &> -\frac{9}{\varphi^3(p)}, \\ \mathcal{F}_1(p, N) &= \frac{p^4}{(p-1)^4(p^3-1)} \left(1 - \frac{(p+1)^2}{p^{\frac{3}{2}(\beta-2)+4}} \right) + \frac{1 + \varepsilon_p \delta_p(N)}{(p-1)^5 p^{\frac{3}{2}(\beta-2)}} \\ &\geq \frac{p^4}{(p-1)^4(p^3-1)} \left(1 - \frac{(p+1)^2}{p^{\frac{3}{2}(\beta-2)+4}} \right) \\ &\geq \frac{p^4}{(p-1)^4(p^3-1)} \left(1 - \frac{(p+1)^2}{p^4} \right) \\ &> 0 > -\frac{1}{\varphi^3(p)};\end{aligned}$$

и поэтому

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(p, N) &= 1 + \Phi(p, N) + \mathcal{F}_1(p, N) \\ &> 1 - \frac{10}{\varphi^3(p)} > 1 - \frac{10}{\varphi^2(p)}.\end{aligned}$$

Следствие доказано.

Доказательство следствия 3. Полагая $p = 3$ в утверждении теоремы 3, находим, что

$$\mathcal{F}_1(3, N) = \begin{cases} 0, & \text{если } \beta = 0, \\ -\frac{3}{32} + \frac{15}{52} \left(1 - \frac{1}{3^{\frac{3}{2}(\beta-1)}} \right), & \text{если } \beta \geq 1 \text{ нечетно,} \\ \frac{3^4}{2^4 \cdot 26} \left(1 - \frac{1}{3^{\frac{3}{2}(\beta-2)+4}} \right) + \frac{1 - \delta_3(N)}{2^5 \cdot 3^{\frac{3}{2}(\beta-2)}}, & \text{если } \beta \geq 2 \text{ четно.} \end{cases}$$

Согласно следствию 8,

$$\Phi(3, N) = \begin{cases} 2^{-5}, & \text{если } \beta \geq 1, \\ -2^{-4}, & \text{если } N \equiv 1 \pmod{3}, \\ 2^{-5}, & \text{если } N \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

Подставляя эти значения в формулу

$$\mathcal{F}(3, N) = 1 + \Phi(3, N) + \mathcal{F}_1(3, N),$$

получим утверждение следствия.

Следствие 4 непосредственно вытекает из следствия 3.

Доказательство следствия 5. Полагая $p = 5$ в утверждении теоремы 3, находим, что

$$\mathcal{F}_1(5, N) = \begin{cases} 0, & \text{если } \beta = 0, \\ -\frac{5}{2^{10}} + \frac{5^4}{31 \cdot 2^{10}} \left(1 - \frac{1}{5^{\frac{3}{2}(\beta-1)}}\right), & \text{если } \beta \geq 1 \text{ нечетно,} \\ \frac{5^4}{31 \cdot 2^{10}} - \frac{3^2}{31 \cdot 2^8 \cdot 5^{\frac{3}{2}(\beta-2)}} + \frac{1 + \delta_5(N)}{2^{10} \cdot 5^{\frac{3}{2}(\beta-2)}}, & \text{если } \beta \geq 2 \text{ четно.} \end{cases}$$

Согласно следствию 9

$$\Phi(5, N) = \begin{cases} -54 \cdot 2^{-10}, & \text{если } N \equiv 0 \pmod{5}, \\ 99 \cdot 2^{-10}, & \text{если } N \equiv 1 \pmod{5}, \\ 26 \cdot 2^{-10}, & \text{если } N \equiv 2 \pmod{5}, \\ 76 \cdot 2^{-10}, & \text{если } N \equiv 3 \pmod{5}, \\ 51 \cdot 2^{-10}, & \text{если } N \equiv 4 \pmod{5}. \end{cases}$$

Подставляя эти значения в формулу

$$\mathcal{F}(5, N) = 1 + \Phi(5, N) + \mathcal{F}_1(5, N),$$

получаем утверждение следствия.

Доказательство следствия 6. Утверждение непосредственно вытекает из следствия 5 с учетом неравенства

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(5, N) &\geq 1 - \frac{1049}{31 \cdot 2^{10}} - \frac{3^2}{31 \cdot 2^8 \cdot 5^{\frac{3}{2}(\beta-2)}} + \frac{1 + \delta_5(N)}{2^{10} \cdot 5^{\frac{3}{2}(\beta-2)}} \\ &\geq 1 - \frac{1049}{31 \cdot 2^{10}} - \frac{3^2}{31 \cdot 2^8 \cdot 5^{\frac{3}{2}(\beta-2)}} \\ &\geq 1 - \frac{1049}{31 \cdot 2^{10}} - \frac{3^2}{31 \cdot 2^8} = 1 - \frac{1049 + 36}{31 \cdot 2^{10}} \\ &= 1 - \frac{35}{2^{10}} \geq 1 - \frac{59}{2^{10}}. \end{aligned}$$

4. Вычисление $\mathcal{G}(N)$ и ее оценка снизу

В этом параграфе докажем основную теорему 1.

Лемма 12. Сумма $T_2(a, q)$, $(a, q) = 1$ — мультипликативная функция, то есть если $q = q_1 q_2$ и $(q_1, q_2) = 1$, то

$$T_2(a, q) = T_2(a_1, q_1) T_2(a_2, q_2),$$

где a_1, a_2 однозначно определяются из сравнения

$$a \equiv a_1 q_2 + a_2 q_1 \pmod{q_1 q_2}$$

и условий $1 \leq a_1 \leq q_1, 1 \leq a_2 \leq q_2$.

Доказательство. Любой вычет n по модулю q_1q_2 можно представить единственным способом в виде

$$n \equiv n_1q_2 + n_2q_1 \pmod{q_1q_2}, \quad 1 \leq n_1 \leq q_1, \quad 1 \leq n_2 \leq q_2.$$

Пользуясь этим представлением, получаем, что

$$\begin{aligned} (n, q) &= (n_1q_2 + n_2q_1, q_1q_2) = (n_1q_2, q_1)(n_2q_1, q_2) \\ &= (n_1q_2, q_1)(n_2q_1, q_2) = (n_1, q_1)(n_2, q_2). \end{aligned}$$

Точно так же любой вычет a по модулю q_1q_2 можно представить единственным способом в виде

$$a \equiv a_1q_2 + a_2q_1 \pmod{q_1q_2}, \quad 1 \leq a_1 \leq q_1, \quad 1 \leq a_2 \leq q_2,$$

и

$$(n, q) = (n_1, q_1)(n_2, q_2).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} T_2(a, q) &= T_2(a_1q_2 + a_2q_1, q_1q_2) \\ &= \sum_{\substack{n_1=1 \\ (n_1, q_1)=1}}^{q_1} \sum_{\substack{n_2=1 \\ (n_2, q_2)=1}}^{q_2} e\left(\frac{(a_1q_2 + a_2q_1)(n_1q_2 + n_2q_1 + 1)^2}{q_1q_2}\right) \\ &= \sum_{\substack{n_1=1 \\ (n_1, q_1)=1}}^{q_1} e\left(\frac{a_1(n_1q_2 + 1)^2}{q_1}\right) \sum_{\substack{n_2=1 \\ (n_2, q_2)=1}}^{q_2} e\left(\frac{a_2(n_2q_1 + 1)^2}{q_2}\right) \\ &= T_2(a_1, q_1)T_2(a_2, q_2). \end{aligned}$$

Лемма 13. Для суммы $T_2(a, q)$, $(a, q) = 1$, справедлива оценка

$$T_2(a, q) < \sqrt{2}e^{2\sqrt{2\ln q}}\sqrt{q}.$$

Доказательство. Пусть

$$q = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

— каноническое разложение числа q на простые сомножители, тогда в силу мультипликативности $T_2(a, q)$ и однозначности разложения натуральных чисел на простые сомножители

$$T_2(a, q) = T_2(a_0, 2^{\alpha_0})T_2(a_1, p_1^{\alpha_1}) \cdots T_2(a_k, p_k^{\alpha_k}).$$

Пользуясь леммой 2 и следствием 7, для $T_2(a_0, 2^{\alpha_0})$ и $T_2(a_1, p_1^{\alpha_1})$, соответственно, находим оценки

$$\begin{aligned} |T_2(a_0, 2^{\alpha_0})| &\leq 2^{\frac{\alpha_0+1}{2}}, \\ |T_2(a_i, p_i^{\alpha_i})| &\leq p_i^{\frac{\alpha_i}{2}} + \chi(\alpha_i), \quad 1 \leq i \leq k, \end{aligned}$$

где $\kappa(\alpha) = 1$, если $\alpha = 1$ и $\kappa(\alpha) = 0$, если $\alpha \geq 2$. Поэтому

$$\begin{aligned} |T_2(a, q)| &= |T_2(a_0, 2_0^\alpha)| |T_2(a_1, p^{\alpha_1})| \cdots |T_2(a_k, p^{\alpha_k})| \\ &\leq 2^{\frac{\alpha+1}{2}} (p_1^{\frac{\alpha_1}{2}} + \kappa(\alpha_1)) \cdots (p_k^{\frac{\alpha_k}{2}} + \kappa(\alpha_k)) \leq m(q) \sqrt{2q}, \\ m(q) &= \left(1 + \frac{\kappa(\alpha_1)}{p_1^{\frac{\alpha_1}{2}}}\right) \left(1 + \frac{\kappa(\alpha_2)}{p_2^{\frac{\alpha_2}{2}}}\right) \cdots \left(1 + \frac{\kappa(\alpha_k)}{p_k^{\frac{\alpha_k}{2}}}\right). \end{aligned}$$

Пусть q_i — i -е простое число; очевидно, существует k такое, что

$$q' = q_1 q_2 \cdots q_k \leq q < q_1 q_2 \cdots q_k q_{k+1}, \quad k \geq 1.$$

Согласно закону распределения простых чисел,

$$\ln q' = \sum_{i \leq k} \ln q_i = \sum_{p \leq q_k} \ln p \geq \frac{q_k}{2},$$

так что

$$q_k \leq 2 \ln q' \leq 2 \ln q.$$

Из определения числа q_k , очевидно, следует, что

$$\begin{aligned} m(q) &\leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{q_1}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{q_2}}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{\sqrt{q_k}}\right) \\ &\leq \prod_{p \leq 2 \ln q} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{p}}\right). \end{aligned}$$

Логарифмируя последнее неравенство и пользуясь разложением функции $\ln(1+x)$, находим, что

$$\begin{aligned} \ln m(q) &\leq \sum_{p \leq 2 \ln q} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{p}}\right) \leq \sum_{p \leq 2 \ln q} \frac{1}{\sqrt{p}} \leq \sum_{n \leq 2 \ln q} \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\leq 1 + \int_1^{2 \ln q} \frac{du}{\sqrt{u}} = 1 + 2\sqrt{2 \ln q} - 2 < 2\sqrt{2 \ln q}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 1. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= \mathfrak{S}(N) = \sum_{q=1}^{\infty} \Phi(q, N), \\ \Phi(q, N) &= \frac{1}{\varphi^5(q)} \sum_{\substack{a=0 \\ (a,q)=1}}^{q-1} T_2^5(a, q) e\left(-\frac{aN}{q}\right). \end{aligned}$$

Покажем, что сумма $\Phi(q, N)$ является мультипликативной функцией. Пусть $q = q_1 q_2$, $(q_1, q_2) = 1$. Любой вычет n по модулю $q_1 q_2$ можно представить единственным способом в виде

$$n \equiv n_1 q_2 + n_2 q_1 \pmod{q_1 q_2}, \quad 1 \leq n_1 \leq q_1, \quad 1 \leq n_2 \leq q_2.$$

Пользуясь этим представлением, получаем, что

$$(n, q) = (n_1, q_1)(n_2, q_2).$$

Точно так же любой вычет a по модулю $q_1 q_2$ можно представить единственным способом в виде

$$a \equiv a_1 q_2 + a_2 q_1 \pmod{q_1 q_2}, \quad 1 \leq a_1 \leq q_1, \quad 1 \leq a_2 \leq q_2,$$

и

$$(a, q) = (a_1, q_1)(a_2, q_2).$$

Поэтому, согласно лемме 12,

$$T_2(a, q) = T_2(a_1, q_1)T_2(a_2, q_2).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi(q, N) &= \Phi(q_1 q_2, N) \\ &= \frac{1}{\varphi^5(q_1 q_2)} \sum_{\substack{a_1=1 \\ (a_1, q_1)=1}}^{q_1} \sum_{\substack{a_2=1 \\ (a_2, q_2)=1}}^{q_2} T_2^5(a_1, q_1) T_2^5(a_2, q_2) e\left(-\frac{(a_1 q_2 + a_2 q_1)N}{q_1 q_2}\right) \\ &= \frac{1}{\varphi^5(q_1)} \sum_{\substack{a_1=1 \\ (a_1, q_1)=1}}^{q_1} T_2^5(a_1, q_1) e\left(-\frac{a_1 N}{q_1}\right) \frac{1}{\varphi^5(q_2)} \sum_{\substack{a_2=1 \\ (a_2, q_2)=1}}^{q_2} T_2^5(a_2, q_2) e\left(-\frac{a_2 N}{q_2}\right) \\ &= \Phi(q_1, N) \Phi(q_2, N). \end{aligned}$$

При целом $X \geq 2$, в силу мультипликативности $\Phi(q, N)$ и однозначности разложения натуральных чисел на простые сомножители,

$$\begin{aligned} \prod_{p \leq X} (1 + \Phi(p, N) + \Phi(p^2, N) + \dots) &= \sum_{q \leq X} \Phi(q, N) + R(X), \\ R(X) &= \sum_{q > X}^* \Phi(q, N), \end{aligned} \tag{17}$$

где звездочка означает, что суммирование ведется по всем натуральным числам q , имеющим только простые делители p , $p \leq X$. Применяя лемму 13, находим, что

$$\begin{aligned} |\Phi(q, N)| &= \left| \frac{1}{\varphi^5(q)} \sum_{\substack{a=0 \\ (a, q)=1}}^{q-1} T_2^5(a, q) e\left(-\frac{aN}{q}\right) \right| \\ &< \frac{(\sqrt{2}e^{2\sqrt{2\ln q}}\sqrt{q})^5}{\varphi^4(q)} = \frac{2^{\frac{5}{2}}e^{10\sqrt{2\ln q}}}{q^{3/2}} \left(\frac{q}{\varphi(q)}\right)^4 \ll q^{-\frac{3}{2}+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Далее, переходя в $R(X)$ к оценкам, и затем подставляя полученную оценку для $\Phi(q, N)$, находим, что

$$|R(X)| \ll \sum_{q > X} q^{-\frac{3}{2}+\varepsilon} \leq \int_X^\infty u^{-\frac{3}{2}+\varepsilon} du \ll X^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

Следовательно, соотношение (17) принимает вид

$$\prod_{p \leq X} (1 + \Phi(p, N) + \Phi(p^2, N) + \dots) = \sum_{q \leq X} \Phi(q, N) + O\left(X^{-\frac{1}{2} + \varepsilon}\right).$$

Переходя к пределу при $X \rightarrow \infty$ в последнем равенстве, получаем, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= \mathfrak{S}(N) = \prod_p \mathcal{F}(p, N), \\ \mathcal{F}(p, N) &= 1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \Phi(p^\alpha, N), \end{aligned} \quad (18)$$

Заметим, что $\mathcal{F}(p, N)$ — вещественное число. Действительно,

$$\begin{aligned} \overline{\Phi(p^\alpha, N)} &= \frac{1}{\varphi^5(p^\alpha)} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{p^\alpha} \overline{T_2^5(a, p^\alpha)} e\left(\frac{aN}{p^\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{\varphi^5(p^\alpha)} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{p^\alpha} \left(\sum_{\substack{n=1 \\ (n,q)=1}}^{p^\alpha} e\left(-\frac{a(n+1)^2}{p^\alpha}\right) \right)^5 e\left(\frac{aN}{p^\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{\varphi^5(p^\alpha)} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,p)=1}}^{p^\alpha} \left(\sum_{\substack{n=1 \\ (n,q)=1}}^{p^\alpha} e\left(\frac{(-a)(n+1)^2}{p^\alpha}\right) \right)^5 e\left(\frac{(-a)N}{p^\alpha}\right) = \Phi(p^\alpha, N). \end{aligned}$$

Таким образом, особый ряд $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(N)$, который является бесконечным произведением по простым числам p функций $\mathcal{F}(p, N)$, абсолютно сходится и является вещественным числом. В теоремах 2 и 3, соответственно, найдены точные значения $\mathcal{F}(2, N)$ и $\mathcal{F}(p, N)$, которые определяются формулами

$$\mathcal{F}(2, N) = \begin{cases} 0, & \text{if } \text{ord}_2(N) \leq 1, \\ \frac{26}{7} + \frac{15}{28} 2^{-\frac{3}{2}(\text{ord}_2(N)-1)+3}, & \text{если } \text{ord}_2(N) \geq 2 \text{ четно,} \\ & \text{ord}_2(N \cdot 2^{-\beta} - 5) \neq 2, \\ \frac{26}{7} - \frac{13}{28} 2^{-\frac{3}{2}(\text{ord}_2(N)-1)+3}, & \text{если } \text{ord}_2(N) \geq 2 \text{ четно,} \\ & \text{ord}_2(N \cdot 2^{-\beta} - 5) = 2, \\ \frac{26}{7} + \frac{15}{28} 2^{-\frac{3}{2}(\text{ord}_2(N)-1)+3}, & \text{если } \text{ord}_2(N) \geq 3 \text{ нечетно,} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}(p, N) = 1 + \Phi(p, N) + \mathcal{F}_1(p, N),$$

$$\begin{aligned} \Phi(p, N) &= \frac{1}{\varphi^5(p)} (-c_p(N-5) - 10\varepsilon_p p c_p(N-3) - 5p^2 c_p(N-1) \\ &\quad + 5p\delta_p(N-4) + 10\varepsilon_p \delta_p(N-2)p^2 + \delta_p(N)p^3), \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}_1(p, N) = \begin{cases} 0, & \text{if } \beta = 0, \\ z - \frac{p}{(p-1)^5} + \frac{p^5 - p}{(p-1)^5(p^3 - 1)} \left(1 - \frac{1}{p^{\frac{3}{2}(\beta-1)}} \right), & \text{если } \beta \geq 1 \text{ нечетно,} \\ \frac{p^4}{(p-1)^4(p^3 - 1)} \left(1 - \frac{(p+1)^2}{p^{\frac{3}{2}(\beta-2)+4}} \right) + \frac{1 + \varepsilon_p \delta_p(N)}{(p-1)^5 p^{\frac{3}{2}(\beta-2)}}, & \text{если } \beta \geq 2 \text{ четно,} \end{cases}$$

где

$$\beta = \text{ord}_p(N).$$

Подставляя правые части этих формул в произведение (18), можно получить точную формулу для $\mathcal{S}(N)$ в виде произведения по простым числам, из которого следует, что $\mathcal{S}(N) = 0$, при $\text{ord}_2(N) \leq 1$, то есть если $N \not\equiv 0 \pmod{4}$.

В следствии 1 при $\text{ord}_2(N) \geq 2$ доказано неравенство

$$\mathcal{F}(2, N) \geq \frac{26}{7} - \frac{13\sqrt{2}}{14} \geq \frac{13}{14}(4 - \sqrt{2}) > \frac{65}{28}.$$

Соответственно, в следствиях 2, 4 и 6 найдены следующие оценки снизу:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(p, N) &> 1 - \frac{10}{\varphi^2(p)}, \quad p \geq 7; \\ \mathcal{F}(3, N) &\geq 1 - 2^{-4}; \\ \mathcal{F}(5, N) &\geq 1 - \frac{59}{2^{10}}. \end{aligned}$$

Поэтому при $\text{ord}_2(N) \geq 2$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(N) &= \prod_p \mathcal{F}(p, N) \geq \frac{65}{28}(1 - 2^{-4}) \left(1 - \frac{59}{2^{10}} \right) \prod_{p \geq 7} \left(1 - \frac{10}{\varphi^2(p)} \right) \\ &= \frac{65 \cdot 15 \cdot 965}{28 \cdot 16 \cdot 1024} \prod_{p \geq 7} \left(1 - \frac{10}{\varphi^2(p)} \right) \\ &= \frac{940875}{458752} \prod_{p \geq 7} \left(1 - \frac{10}{\varphi^2(p)} \right) > \frac{917504}{458752} \prod_{p \geq 7} \left(1 - \frac{10}{\varphi^2(p)} \right) \\ &= 2 \prod_{p \geq 7} \left(1 - \frac{10}{\varphi^2(p)} \right). \end{aligned}$$

Список литературы

1. Hua L. K., Some results in the additive prime number theory. *Quarterly J. Math.* (1938) **9**, 68–80.
2. Коробов Н. М., *Тригонометрические суммы и их приложения*. Наука, Москва, 1989.

Статья поступила 11.11.2010.