Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Емеличев, В. В. Коротков, О радиусе устойчивости эффективного решения многокритериальной задачи портфельной оптимизации с критериями Сэвиджа, *Дискрет. матем.*, 2011, том 23, выпуск 4, 33–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1159>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 11:50:26

О радиусе устойчивости эффективного решения многокритериальной задачи портфельной оптимизации с критериями Сэвиджа

© 2011 г. В. А. Емеличев, В. В. Коротков

На основе портфельной теории Марковица строится векторная инвестиционная булева модель с минимаксным критерием риска Сэвиджа. Получены нижняя и верхняя оценки радиуса устойчивости оптимального по Парето портфеля сформулированной модели, которые в частном случае превращаются в формулу радиуса устойчивости эффективного решения векторной линейной булевой задачи при соответствующем сочетании метрик в пространствах решений и критериев.

1. Введение

Вопросы устойчивости скалярных и векторных задач дискретной оптимизации в последние годы привлекают внимание многих специалистов (см., например, монографии [1–3] и обзоры [4–6], а также библиографии [7, 8]). Это в значительной степени связано с необходимостью учета неточности и некорректности исходной информации, которые свойственны реальным ситуациям решения задач. Основной вопрос, который при этом возникает, в каких пределах можно варьировать (возмущать) исходные данные задачи, чтобы найденное решение было устойчиво, то есть оставалось оптимальным (в векторном случае, например, оптимальным по Парето). Такая постановка вопроса приводит к понятию радиуса устойчивости решения как предельного уровня таких возмущений. Конкретное содержание этого понятия зависит от выбора множества параметров задачи, подверженных возмущениям, и от структуры, определяющей отношения близости на множестве исходных данных, то есть, от метрик, заданных в пространствах параметров. Большинство результатов в этом направлении связано с получением формул или оценок радиуса устойчивости эффективных (оптимальных по Парето) решений векторных задач дискретной оптимизации с линейными критериями [9–13]. В настоящей статье получены нижняя и верхняя оценки такого радиуса для многокритериальной булевой задачи с нелинейными критериями, а именно, для задачи портфельной оптимизации с минимаксными критериями риска Сэвиджа [14]. При этом в частном случае, когда критерии Сэвиджа становятся линейными, обе оценки превращаются в ранее известную формулу (см. [11]) радиуса устойчивости эффективного решения векторной линейной булевой задачи. Этого удалось добиться благодаря удачно подобранной комбинации октаэдральной l_1 и чебышевской l_∞ метрик в трех пространствах параметров рассматриваемой инвестиционной задачи.

Для того, чтобы сформулировать задачу управления финансовыми инвестициями, основанную на известной портфельной теории Марковица [17], введем следующие обозначения:

$N_n = \{1, 2, \dots, n\}$ — активы (акции, облигации предприятий, недвижимость и т. п.);

N_m — экономические стратегии инвестора;

R — трехиндексная матрица рисков (упущенных возможностей) размера $m \times n \times s$ с элементами r_{ijk} из $\mathbf{R}$;

r_{ijk} — риск, которому подвергается инвестор, выбирая стратегию $i \in N_m$ и актив $j \in N_n$ по критерию $k \in N_s$;

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in X \subset \{0, 1\}^n$ — портфель активов инвестора, где

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{если инвестор выбирает актив } j, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Наряду с трехиндексной матрицей $R = [r_{ijk}] \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}$, будем использовать двумерные сечения $\mathbf{R}_k \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $k \in N_s$, этой матрицы.

Пусть на множестве векторов (решений) X , $|X| \geq 2$, задана вектор-функция

$$f(x, R) = (f_1(x, R_1), f_2(x, R_2), \dots, f_s(x, R_s))$$

с критериями минимального риска (крайнего пессимизма) Сэвиджа

$$f_k(x, R_k) = \max_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} r_{ijk} x_j \xrightarrow{x \in X} \min, \quad k \in N_s.$$

Под векторной (s -критериальной) задачей портфельной оптимизации $Z^s(R)$, $s \geq 1$, будем понимать задачу поиска множества Парето $P^s(R)$, состоящего из эффективных портфелей

$$P^s(R) = \{x \in X: P^s(x, R) = 0\},$$

где

$$P^s(x, R) = \{x' \in X: x \succ_R x'\},$$

а символ $\succ_R$ означает отношение, задаваемое на множестве X формулой

$$x \succ_R x' \iff g(x, x', R) \geq 0 \text{ \& } g(x, x', r) \neq 0,$$

где

$$\begin{aligned} 0 &= (0, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^s, \\ g(x, x', R_k) &= (g_1(x, x', r_1), g_2(x, x', r_2), \dots, g_s(x, x', r_s)), \\ g_k(x, x', R_k) &= f_k(x, R_k) - f_k(x', R_k) \\ &= \max_{i \in N_m} R_{ik}x - \max_{i \in N_m} R_{ik}x' \\ &= \min_{i' \in N_m} \max_{i \in N_m} (R_{ik}x - R_{i'k}x'), \quad k \in N_s, \end{aligned}$$

а $R_{ik} = (r_{i1k}, r_{i2k}, \dots, r_{ink})$ — i -я строка сечения $R_r \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $i \in N_m$.

В пространствах решений $\mathbf{R}^n$ и стратегий $\mathbf{R}^m$ зададим метрику l_1 , а в критериальном пространстве $\mathbf{R}^s$ — метрику l_∞ , то есть полагаем

$$\begin{aligned} \|R_{ik}\|_1 &= \sum_{j \in N_n} \|r_{ijk}\|, & i \in N_m, \quad k \in N_s, \\ \|R_k\|_1 &= \sum_{i \in N_m} \|R_{ik}\|_1 = \sum_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} |r_{ijk}|, & k \in N_s, \\ \|R\|_\infty &= \max_{k \in N_s} \|R_k\|_1 = \max_{k \in N_s} \sum_{i \in N_m} \|R_{ik}\|_1 \\ &= \max_{k \in N_s} \sum_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} |r_{ijk}|. \end{aligned}$$

В принятых обозначениях очевидны неравенства

$$\|R_{ik}\|_1 \leq \|R_k\|_1 \leq \|R\|_\infty, \quad i \in N_m, \quad k \in N_s,$$

и

$$\begin{aligned} R_{ik}x - R_{i^0k}x^0 - R_{i^0k}x^0 &\geq -\|R_{ik}\|_1 - \|R_{i^0k}\|_1 \\ &\geq -\|R_k\|_1, \quad i, i^0 \in N - m, \quad k \in N_s, \end{aligned} \quad (1)$$

для любой матрицы $R_r \in \mathbf{R}^{m \times n}$ и любых векторов $x^0, x \in X$.

Как обычно [9–12], радиусом устойчивости портфеля $x^0 \in P^s(R)$ назовем число

$$\rho^s(x^0, R) = \begin{cases} \sup \Xi, & \text{если } \Xi \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \Xi = \emptyset, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \Xi &= \{\varepsilon > 0: \forall R' \in \Omega(\varepsilon), x^0 \in P^s(R + R')\}, \\ \Omega &= \{R' \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}: \|R'\|_\infty < \varepsilon\} \end{aligned}$$

— множество возмущающих матриц, $P^s(R + R')$ — множество Парето возмущенной задачи $Z^s(R + R')$.

Тем самым, радиус устойчивости задает предельный уровень возмущений исходных данных задачи (элементов матрицы R), которые сохраняют эффективность портфеля.

Очевидно следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть $X^0 \in P^s(R)$, $\gamma > 0$. Если для каждой возмущающей матрицы $R' \in \Omega(\gamma)$ и любого вектора $x \in X \setminus \{x_0\}$ найдется такой индекс $q \in N_s$, что справедливо неравенство $g_q(x, x^0, R_q + R'_q) > 0$, то портфель x^0 является эффективным решением возмущенной задачи $Z^s(R + R')$, то есть $x^0 \in P^s(R + R')$ при $R' \in \Omega(\gamma)$.

Теорема 1. Пусть в пространствах решений $\mathbf{R}^n$ и стратегий $\mathbf{R}^m$ задана метрика l_1 , а в критериальном пространстве $\mathbf{R}^s$ метрика l_∞ . Тогда при

$$\varphi = \min_{x \in X \setminus \{x^0\}} \max_{k \in N_s} \min_{i^0 \in N_m} \max_{i \in N_m} (R_{ik}x - R_{i^0k}x^0)'$$

справедливы следующие оценки для радиуса устойчивости $\rho^s(x^0, R)$ эффективного портфеля $x^0 \in P^s(R)$:

$$\varphi \leq \rho^s(x^0, R) \leq m\varphi.$$

Доказательство. Пусть $x^0 \in P^s(R)$. Очевидно, что $x \notin R(x^0, R)$, если $x \in X \setminus \{x^0\}$. Поэтому $\varphi \geq 0$.

Сначала докажем, что справедливо неравенство $\rho^s(x^0, R) \geq \varphi$, которое очевидно при $\varphi = 0$. Согласно определению числа φ , для любого вектора $x \in X \setminus \{x^0\}$ существует такой индекс $q = q(x) \in N_s$, что

$$\min_{i^0 \in N_m} \max_{i \in N-m} (R_{iq}x - R_{i^0q}x^0) \geq \varphi. \quad (2)$$

Далее, учитывая (1), получаем, что для любой матрицы $R' \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}$ и всякого индекса $k \in N_s$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} g_k(x, x^0, R_k + R'_k) &= \max_{i \in N_m} (R_{ik} + R'_{ik})x - \max_{i \in N_m} (R_{ik} + R'_{ik})x^0 \\ &= \min_{i^0 \in N_m} \max_{i \in N_m} (R_{ik}x - R_{i^0k}x + R'_{i^0k}x - R'_{i^0k}x^0) \\ &\geq \min_{i^0 \in N_m} \max_{i \in N_m} (R_{ik} - R_{i^0k}x^0) = \|R'_k\|_1. \end{aligned}$$

Отсюда, полагая $R' \in \Omega(\varphi)$, ввиду (2), получаем, что

$$g_q(x, x^0, R_q + R'_q) \geq \varphi - \|R'_q\|_1 \geq \varphi - \|r'_q\|_\infty > 0.$$

Поэтому, в силу леммы 1, $x^0 \in P^s(R + R')$ при любой возмущающей матрице $R' \in \Omega(\varphi)$.

Наконец, докажем неравенство $\rho^s(x^0, R) \leq m\varphi$. Согласно определению числа φ , существует такой вектор $\hat{x} \in X \setminus \{x^0\}$, что справедливы неравенства

$$g_k(\hat{x}, x^0, R)k \leq \varphi, \quad f \in N_s. \quad (3)$$

Так как $\hat{x} \neq x^0$, найдется такой индекс $l \in N_n$, что $\hat{x} \neq x_l^0$. Полагая $\varepsilon > m\varphi$, рассмотрим возмущающую матрицу ${}^0 = [r_{ijk}^0] \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}$, элементы которой определим следующим образом:

$$r_{ijk}^0 = \begin{cases} -\delta \operatorname{sign}(\hat{x}_j - x_j^0), & \text{если } i \in N_m, j = l, k = N_s \\ 0, & \text{если } i \in N_m, j \in N_n \setminus \{l\}, k \in N_s, \end{cases}$$

где $\varphi < \delta < \varepsilon/m$. Тогда

$$\|R^0\|_\infty = \|R_k^0\|_1 = m\|R_{ik}^0\|_1 = m\delta$$

при $i \in N_m, k \in N_s$, то есть $R^0 \in \Omega(\varepsilon)$. Кроме того, все строки $R_{ik}^0, i \in N_m$, сечения R_k^0 одинаковы при любом индексе $k \in N_s$. Поэтому, обозначив такую строку через B (зависит лишь от $\hat{x}$ и x^0), получаем, что

$$B(\hat{x} - x^0) = -\delta, \quad \|B\|_1 = \delta.$$

Отсюда для любого индекса $k \in N_s$ в силу (3) следует, что

$$\begin{aligned} g_k(\hat{x}, x^0, R_k + R_k^0) &= \max_{i \in N_m} (R_{ik} + B)\hat{x} - \max_{i \in N_m} (R_{ik} + B)x^0 \\ &= g_k(\hat{x}, x^0, R_k) + B(\hat{x} - x^0) \leq \varphi - \delta < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, верно бинарное отношение $x^0 \underset{R+R^0}{>} \hat{x}$. Следовательно, для любого числа $\varepsilon > t\varphi$ существует такая возмущенная матрица $R^0 \in \Omega(\varepsilon)$, что эффективный портфель x^0 задачи $Z^s(R)$ перестает быть эффективным в возмущенной задаче $z^s(R + R^0)$, то есть $x^0 \notin P^s(R + R^0)$. Поэтому $\rho^s(x^0, R) \leq t\varphi$.

Теорема доказана.

Отметим, что в [16] анонсированы аналогичные оценки (снизу и сверху) радиуса квазиустойчивости задачи $Z^s(R)$ в случае, когда во всех пространствах $\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^s$ задана одна и та же чебышевская метрика l_∞ .

Обе оценки радиуса устойчивости $\rho^s(x^0, R)$, указанные в теореме, являются достижимыми при $m = 1$. Действительно, пусть $m = 1$. Тогда наша задача $Z^s(R)$ превращается в векторную (s -критериальную) задачу булева программирования с линейными критериями

$$R_k x \longrightarrow \min, \quad k \in N_s, \quad (4)$$

$$x \in X$$

где R_k — k -я строка матрицы $R \in \mathbf{R}^{s \times n}$. Поэтому из теоремы вытекает следующий известный результат.

Следствие 1 ([11]). *Если в пространстве решений задана метрика l_1 , а в критериальном пространстве метрика l_∞ , то для радиуса устойчивости эффективного решения x^0 векторной линейной булевой задачи (4) справедлива формула*

$$\rho^s(x^0, R) = \min_{x \in X \setminus \{x_0\}} \|(R(x - x^0))^+\|_\infty.$$

Здесь (a^+) — положительная срезка вектора $a = (a_1, a_2, \dots, a_s)^T$, то есть

$$(a)^+ = (a_1^+, a_2^+, \dots, a_s^+), \quad a_i^+ = \max\{0, a_i\}, \quad i = 1, \dots, s.$$

Эффективный портфель $x^0 \in P^s(R)$ задачи $Z^s(R)$ назовем устойчивым, если $\rho^s(x^0, R) > 0$. Кроме того, портфель $x^0 \in X$ назовем строго эффективным (оптимальным по Смейлу [17]), если среди элементов множества $X \setminus \{x^0\}$ не существует такого решения x , что $f(x, R) \leq f(x^0, R)$.

Следующий критерий с очевидностью вытекает из теоремы 1.

Следствие 2. *Эффективный портфель $x^0 \in P^s(R)$ задачи $Z^s(R)$ устойчив в том и только в том случае, когда он строго эффективен.*

Список литературы

1. Сергиенко И. В., Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т., *Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач*. Наукова думка, Киев, 1995.
2. Сергиенко Т. И., Шило В. П., *Задачи дискретной оптимизации*. Наукова думка, Киев, 2003.
3. Сотсков Ю. Н., Сотскова Н. Ю., *Теория расписаний. Системы с неопределенными числовыми параметрами*. ОИПИ НАН Беларуси, Минск, 2004.
4. Sotskov Yu. N., Leontev V. K., Gordeev E. N., Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization. *Discrete Appl. Math.* (1995) **58**, 169–190.
5. Sotskov Yu. N., Tanaev V. S., Werner F., Stability radius of an optimal schedule: A survey and recent developments. *Appl. Optim.* (1998) **16**, 72–108.

6. Emelichev V. A., Girlich E., Nikulin Yu. V., Podkopaev D. P., Stability and regularization of vector problems of integer linear programming. *Optimization* (2002) **51**, 645–676.
7. Greenberg H. J., A bibliography for the development of an intelligent mathematical programming system. *Ann. Oper. Res.* (1996) **65**, 55–90.
8. Greenberg H. J., An annotated bibliography for post-solution analysis in mixed integer programming and combinatorial optimization. In: *Advances in Computational and Stochastic Optimization, Logic Programming, and Heuristic Search. Interfaces in Computer Science and Operations Research* (Woodruff D. L., ed.). Kluwer, Boston, 1998, pp. 97–147.
9. Емеличев В. А., Похилько В. Г., Анализ чувствительности эффективных решений векторной задачи минимизации линейных форм на множестве подстановок. *Дискретная математика* (2000) **12**, №3, 37–48.
10. Емеличев В. А. Степанишина Ю. В., Многокритериальные комбинаторные линейные задачи: параметризация принципа оптимальности и устойчивость эффективных решений. *Дискретная математика* (2001) **13**, №4, 43–51.
11. Емеличев В. А., Кузьмин К. Г., Общий подход к исследованию устойчивости парето-оптимального решения векторной задачи целочисленного линейного программирования. *Дискретная математика* (2007) **19**, №3, 79–83.
12. Емеличев В. А., Карелкина О. В., Конечные коалиционные игры: параметризация концепции равновесия (от Парето до Нэша) и устойчивость эффективной ситуации в метрике Гельдера. *Дискретная математика* (2009) **21**, №2, 43–59.
13. Emelichev V., Podkopaev D., Quantitative stability analysis for vector problems of 0–1 programming. *Discrete Optim.* (2010) **7**, 48–63.
14. Savage L. J., *The foundations of statistics*. Dover, New York, 1972.
15. Markowitz H. M., *Portfolio selection: efficient diversification of investments*. Wiley, New York, 1959.
16. Емеличев В. А., Коротков В. В., О радиусе квазиустойчивости векторной булевой задачи с критерием Сэвиджа. В сб.: *Материалы конф. «Дискретная оптимизация и исследование операций»*. Ин-т матем., Новосибирск, 2010, с. 113.
17. Smale S., Global analysis and economics: Pareto theory with constraints. *J. Math. Econ.* (1974) **1**, 213–221.

Статья поступила 15.09.2010.