Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Мاستихина, Критерий частичного предвосхищения
общерегулярных сверхсобытий, *Дискрет. матем.*, 2011,
том 23, выпуск 4, 103–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1164>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 17:34:46

Критерий частичного предвосхищения общерегулярных сверхсобытий

© 2011 г. А. А. Мاستихина

Автомат угадывает следующий символ входной последовательности, если он выдает этот символ на выходе в предыдущий момент времени. В работе рассмотрен вопрос, можно ли с помощью конечного автомата частично предвосхитить общерегулярное сверхсобытие, то есть угадать некоторую ненулевую долю символов каждого сверхслова из этого сверхсобытия.

Получены критерий и алгоритм, позволяющие это установить.

1. Введение

В статье рассматривается предвосхищение сверхсобытий над алфавитом $\{0, 1\}$ определенного вида с помощью конечных автоматов. Понятие автомата с предвосхищением возникло еще в начале развития теории автоматов [1].

Это означало, что автомат использует не только данные, уже поступившие на вход, но и некоторые значения, которые должны поступить в будущем. На практике в качестве еще не поступивших данных часто используется наиболее вероятное значение.

В данной работе рассматриваются автоматы, не использующие заведомо известную информацию, которая должна поступить на вход, а как раз пытающиеся эти данные предсказать на выходном канале.

В [2] рассматривались автоматы, детерминирующие сверхслово или множество сверхслов. Это значило, что через некоторое конечное время автомат начинает угадывать каждый следующий символ, то есть на выходе в момент времени t выдавать элемент входной последовательности с номером $t + 1$.

Было показано, что детерминируемо только множество периодических сверхслов с фиксированным периодом.

Поэтому было введено понятие частичного предвосхищения, в [3] называемое частичным угадыванием. Автомат верно предсказывает некоторую долю входных символов, которая называется степенью предвосхищения и определяется как нижний предел отношения числа угаданных символов за время t к t при t , устремленном к бесконечности. Там же было показано, что можно построить такое сверхслово, что для каждого автомата степень предвосхищения нулевая.

Здесь автомату подаются на вход сверхслова из некоторого фиксированного множества, и его цель — предсказать каждое сверхслово из этого множества хотя бы с ненулевой степенью.

Рассматриваются общерегулярные сверхсобытия, то есть множества сверхслов, представимые в конечных автоматах. Получен критерий, позволяющий для любого общерегулярного сверхсобытия определить, существует ли для него автомат с частичным предвосхищением. Эта задача алгоритмически разрешима за линейное время от числа состояний минимального автомата, представляющего сверхсобытие. При положительном ответе соответствующий автомат строится.

Сверхсобытие может быть задано автоматом или общерегулярным выражением. В критерии используется структура автомата.

Сначала критерий получен для сверхитерации регулярного события, потом этот результат обобщен для произвольных общерегулярных сверхсобытий.

Автор выражает благодарность профессору Э. Э. Гасанову за постановку задачи и помощь в работе.

2. Основные понятия и формулировка результатов

Будем использовать следующие обозначения:

A^* — множество всех слов в алфавите A , по определению будем считать, что пустое слово Λ принадлежит A^* ,

A^∞ — множество всех сверхслов в алфавите A ,

$|a|$ — длина слова $a \in A^*$, по определению $|\Lambda| = 0$,

$a(n)$ — n -ый элемент слова или сверхслова a ,

$\text{pref}(a, n)$ — префикс слова или сверхслова a длины n , то есть $\text{pref}(a, n) = a(1) \dots a(n)$,

$\text{post}(\alpha, n) = \alpha(n+1)\alpha(n+2) \dots$ — сверхслово или слово длины, не меньшей n , без первых n символов,

событие — подмножество $A^*/\{\Lambda\}$,

сверхсобытие — подмножество A^∞ ,

ab — конкатенация слов a и b ,

$R_1 R_2$ — произведение события R_1 и события или сверхсобытия R_2 , то есть все слова (сверхслова) вида ab , где $a \in R_1, b \in R_2$,

R^* — итерация события R , то есть множество $R^* = \{a_1 a_2 a_3 \dots a_k \mid a_i \in R, k \geq 1\}$,

R^∞ — сверхитерация события R , то есть

$$R^\infty = \{a_1 a_2 a_3 \dots \mid a_i \in R, i = 1, 2, 3, \dots\},$$

$O(a)$ — множество букв, встречающихся в слове или сверхслове a ,

$\lim(\alpha)$ — множество букв, встречающихся в сверхслове α бесконечное число раз.

В статье рассматриваются конечные инициальные автоматы, то есть

$$\mathfrak{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0),$$

где A — входной алфавит, Q — множество состояний, которое является конечным подмножеством некоторого фиксированного счетного множества, B — выходной алфавит, $\varphi: A \times Q \rightarrow Q$ — функция переходов, $\psi: A \times Q \rightarrow B$ — функция выходов, q_0 — начальное состояние.

Если на вход автомату $\mathfrak{A}$ подается сверхслово α , на выходе получается сверхслово y , и q_t означает состояние автомата в момент времени t , то функционирование автомата задается системой

$$\begin{aligned} y(t) &= \psi(\alpha(t), q_{t-1}), \\ q_t &= \varphi(\alpha(t), q_{t-1}). \end{aligned}$$

Выходное сверхслово автомата $\mathfrak{A}$ при подаче на его вход сверхслова α будем обозначать $y_\alpha^\mathfrak{A}$.

Далее в качестве входного алфавита A будет рассматриваться множество $\{0, 1\}$. Автомат $\mathfrak{A}$ угадывает сверхслово $\alpha \in \{0, 1\}^\infty$, если

$$\sum_{i=1}^{\infty} |y_\alpha^\mathfrak{A}(i) - \alpha(i+1)| < \infty.$$

Если $\alpha \in \{0, 1\}^\infty$, то введем обозначение

$$c^\mathfrak{A}(\alpha) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t (1 - |y_\alpha^\mathfrak{A}(i) - \alpha(i+1)|).$$

Будем говорить, что автомат $\mathfrak{A}$ угадывает (предвосхищает) сверхслово α со степенью $\sigma \in [0, 1]$, если $c^\mathfrak{A}(\alpha) = \sigma$, $c^\mathfrak{A}(\alpha)$ называется степенью предвосхищения. Автомат $\mathfrak{A}$ угадывает (предвосхищает) некоторое множество сверхслов $S \subset \{0, 1\}^\infty$ со степенью σ , если $c^\mathfrak{A}(\alpha) \geq \sigma$ для всех $\alpha \in S$.

Считаем, что множество сверхслов частично угадываемо, если существует автомат, такой, что степень предвосхищения для каждого сверхслова множества строго больше нуля.

Определим регулярное событие над алфавитом A .

- (1) $\{\emptyset\}, \{a\}, a \in A$, — регулярные события.
- (2) Пусть R_1, R_2 — регулярные события. Тогда события $R_1 R_2$, $R_1 \cup R_2$ и R_1^* также регулярны.

Определим общерегулярное событие над алфавитом A .

- (1) Если R — регулярное событие над алфавитом A , то R^* — общерегулярное сверхсобытие над алфавитом A .
- (2) Если R_1 — регулярное событие над алфавитом A , R_2 — общерегулярное сверхсобытие над алфавитом A , то $R_1 R_2$ — общерегулярное сверхсобытие над алфавитом A .
- (3) Если R_1, R_2 — общерегулярные сверхсобытия над алфавитом A , то $R_1 \cup R_2$ — общерегулярное сверхсобытие над алфавитом A .

Сверхсобытие R называется представимым в автомате $\mathfrak{A} = (A, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$ с помощью семейства подмножеств выходного алфавита $B' \subseteq 2^B$, если

$$R = \{\alpha \mid \alpha \in A^\infty, \lim(\psi(q_0, \alpha)) \in B'\}.$$

Будем обозначать $O(Q')$ множество выходных символов подмножества состояний $Q' \subseteq Q$ некоторого конечного автомата (A, Q, B, φ, ψ) , а именно,

$$O(Q) = \{\psi(q, a) \mid q \in Q', a \in A\}.$$

В любом автомате можно выделить сильно связанные компоненты $Q_1, \dots, Q_k$, то есть совокупности состояний, достижимых друг из друга: для всех $q', q'' \in Q_i, i = 1, \dots, k$, найдется $\alpha \in \{0, 1\}^*$ такое, что $\varphi(q', \alpha) = q''$.

Назовем сильно связную компоненту замкнутой, если из нее не достижима никакая другая сильно связанная компонента. Очевидно, что хотя бы одна замкнутая сильно связанная компонента существует.

Теорема 1. Пусть общерегулярное сверхсобытие R^∞ представимо в конечном инициальном автомате $\mathfrak{A} = (\{0, 1\}, Q, B, \varphi, \psi, q_0)$, $|Q| = n$, с помощью некоторого $B' \subset 2^B$, тогда следующие утверждения эквивалентны.

- (1) Сверхсобытие R^∞ , $R \subseteq \{0, 1\}^*$, не является частично угадываемым;
- (2) Для всех $\alpha \in \{0, 1\}^*$ найдутся $\beta \in \{0, 1\}^*$, $\gamma \in \{0, 1\}^\infty$ такие, что $\beta\alpha\gamma \in R^\infty$;
- (3) Хотя бы для одной замкнутой сильно связанной компоненты $\tilde{Q}$ автомата $\mathfrak{A}$ справедливо включение $O(\tilde{Q}) \in B'$.

Теорема 2. Существует алгоритм, определяющий, является ли сверхсобытие R^∞ , представимое в приведенном автомате с n состояниями, частично угадываемым, и если ответ положителен, строящий автомат с частичным предвосхищением, причем сложность алгоритма линейно зависит от n .

Теорема 3. Общерегулярное сверхсобытие $R_1^\infty R_1' \cup R_2^\infty R_2' \cup \dots \cup R_k^\infty R_k'$, где $R_1, \dots, R_k, R_1', \dots, R_k'$ — некоторые регулярные события, частично угадываемо тогда и только тогда, когда частично угадываемо каждое из сверхсобытий $R_1^\infty, \dots, R_k^\infty$.

Теорема 4. Существует алгоритм, определяющий, является ли сверхсобытие, представимое в приведенном автомате с n состояниями, частично угадываемым, и его сложность линейно зависит от n . Так же существует алгоритм построения автомата с частичным предвосхищением в случае, если сверхсобытие частично угадываемо.

3. Критерий частичного предвосхищения сверхитерации события

Пусть множество замкнутых сильно связанных компонент автомата $\mathfrak{A}$ есть $\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_w$, $w \geq 1$. Рассмотрим два случая.

I. В автомате найдется замкнутая сильно связная компонента $\tilde{Q}'$, такая, что множество букв, выдаваемое этими состояниями, есть элемент B' , то есть существуют $i \in \{1, \dots, w\}$, $\tilde{b} \in B'$ такие, что

$$\{\psi(q, a) \mid a \in A, q \in \tilde{Q}_i\} = \tilde{b}.$$

Докажем, что в этом случае

- (а) R^∞ не является частично угадываемым;
- (б) для всех $\alpha \in \{0, 1\}^*$ найдутся $\beta \in \{0, 1\}^*$, $\gamma \in \{0, 1\}^\infty$ такие, что $\beta\alpha\gamma \in R^\infty$;

II. Такой замкнутой сильно связной компоненты не найдется. Докажем, что в этом случае

- (в) множество является частично угадываемым;
- (г) найдется слово $\alpha \in \{0, 1\}^*$, которое не является подсловом никакого сверхслова из R^∞ .

Из утверждений (а)–(г), очевидно, следует утверждение теоремы 1.

Докажем утверждение (а). Для произвольного автомата

$$\mathfrak{B} = (\{0, 1\}, S, \{0, 1\}, \varphi', \psi', q_0)$$

построим сверхслово $\alpha \in R^\infty$, для которого $c^{\mathfrak{B}}(\alpha) = 0$.

Замкнутая сильно связная компонента $\tilde{Q}'$, множество выходных букв состояний которой есть $\tilde{b} \in B'$, достижима из начального состояния автомата $\mathfrak{A}$ по некоторому слову $\beta \in \{0, 1\}^*$: $\varphi(q_0, \beta) = q' \in \tilde{Q}'$, где β — префикс $\alpha \in \{0, 1\}^\infty$, подается на вход автомата $\mathfrak{B}$. Далее сверхслово строится так:

$$\alpha(t+1) = \overline{\psi'(q_0, \alpha|_t)}.$$

Это сверхслово не будет угадано автоматом $\mathfrak{B}$ ни с какой ненулевой степенью.

Возможны два случая.

1. Построенное таким образом $\alpha \in R^\infty$, то есть $\lim(\psi(\alpha)) \in B'$.

2. $\alpha \notin R^\infty$. Из предположения I следует, что существуют состояния $q'_1, q'_2, \dots, q'_m$ и набор букв $a_1, a_2, \dots, a_m, a_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, m$, что $\psi(q'_i, a_i) = b_i, i = 1, \dots, m$, где $\{b_1, \dots, b_m\} = \tilde{b} \in B'$. Для любого состояния $q_j \in \tilde{Q}'$ найдется такое слово γ_j длины, меньшей $nm < n^2$, что множество букв слова $\tilde{\psi}(q_j, \gamma_j)$ есть $\tilde{b}$.

Построим нужное сверхслово следующим образом:

$$\tilde{\alpha} = \beta\alpha_1\gamma_{j_1}\alpha_2\gamma_{j_2}\dots\alpha_i\gamma_{j_i}\dots,$$

где α_i — полностью неугадываемое слово для состояния $\varphi(q_0, \beta\alpha_1\gamma_{j_1}\dots\alpha_{i-1}\gamma_{j_{i-1}})$ автомата $\mathfrak{B}$ длины in^2 , а слово γ_{j_i} соответствует состоянию $q_{j_i} = \varphi(q_0, \beta\alpha_1\gamma_{j_1}\dots\alpha_i)$.

Подсчитаем степень предвосхищения:

$$\begin{aligned} c^{\mathfrak{B}}(\tilde{\alpha}) &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^t |\gamma_{j_i}|}{\sum_{i=1}^t |\gamma_{j_i}| + \sum_{i=1}^t |\alpha_i| + |\beta|} \\ &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{tn^2}{n^2(1 + 2 + \dots + t) + tn^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{t(t+1)/2 + t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{t+3} = 0. \end{aligned}$$

Докажем утверждение (б). Для произвольного α найдем такие $\beta \in \{0, 1\}^*$, $\gamma \in \{0, 1\}^\infty$, что $\beta\alpha\gamma \in R^\infty$. Рассмотрим замкнутую сильно связную компоненту $\tilde{Q}'$. Она достижима из начального состояния по некоторому слову $\beta \in \{0, 1\}^*$: $\varphi(q_0, \beta) = q' \in \tilde{Q}'$. Для q' , как и для любого состояния этой компоненты, справедливо равенство $\varphi(q', \alpha) = q'' \in \tilde{Q}'$. Построим γ как последовательность γ_{i_t} из п. (а), где $\gamma_{i_{t+1}}$ соответствует $q_{i_{t+1}} = \varphi(\beta\alpha\gamma_{i_1} \dots \gamma_{i_t})$, $t = 0, 1, 2, \dots$, а γ_{i_1} строится для $q_{i_1} = \varphi(q_0, \beta\alpha)$. По построению, $\lim(\psi(\beta\alpha\gamma)) \in B'$ и, следовательно, $\beta\alpha\gamma \in R^\infty$.

Докажем утверждение (в). Построим автомат $\mathfrak{B}$ с частичным предвосхищением данного множества. Для этого оставим структуру автомата $\mathfrak{A}$, в котором представимо R^∞ , и зададим выходные функции. Согласно условию II, для любой замкнутой сильно связной компоненты $\tilde{Q}_i$ выполнено соотношение $O(\tilde{Q}_i) \notin B'$. Покажем, что тогда любое сверхслово, приводящее автомат из начального состояния в эту компоненту, не будет принадлежать R^∞ .

Предположим, что найдется сверхслово $\lambda \in R^\infty$, переводящее автомат в некоторую замкнутую сильно связную компоненту $\tilde{Q}$, то есть в компоненте $\tilde{Q}$ найдутся состояния $q_1, \dots, q_m$ и буквы $a_1, \dots, a_m$, такие, что $\psi(q_i, a_i) = b_i$, $i = 1, \dots, m$, где $\{b_1, \dots, b_m\} = b \in B' \subset 2^B$. Также состояния данной компоненты могут выводить некоторые буквы $c_1, \dots, c_k$, такие, что $\{b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_k\} \notin B'$. Для каждого c_i , $i = 1, \dots, k$, найдутся (необязательно единственные) $q'_i \in \tilde{Q}$ и буква a'_i такие, что $\psi(q'_i, a'_i) = c_i$.

Найдется такое натуральное число t^* , что $\varphi(q_0, \text{pref}(\lambda, t^*)) = q_1$.

Каждое состояние в этой компоненте достижимо из каждого. Поэтому можно построить такое слово θ^1 длины, не большей n^2 , что

$$O(\psi(q_1, \theta^1)) = \{b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_k\}.$$

Например, найдутся $t_1 \in \{0 < t_2 < \dots < t_m < t'_1 < t'_2 < \dots < t'_k\}$ такие, что

$$\begin{aligned} \varphi(q_1, \text{pref}(\theta^1, t_i)) &= q_i, & i &= 1, \dots, m, \\ \varphi(q_1, \text{pref}(\theta^1, t'_i)) &= q'_i, & i &= 1, \dots, k, \\ \theta^1(t_i + 1) &= a_i, \\ \theta^1(t'_i + 1) &= a'_i, \end{aligned}$$

и $\varphi(q_1, \theta^1) = q_1$.

Ясно, что сверхслово $\text{pref}(\lambda, t^*)\theta^1 \text{post}(\lambda, t^*) \in R^\infty$, так как

$$\lim(\bar{\psi}(q_0, \text{pref}(\lambda, t^*)\theta^1 \text{post}(\lambda, t^*))) = \lim(\bar{\psi}(q_0, \lambda)) \in B'.$$

Тогда его можно представить как $r_1 r_2 \dots r_i \dots$, где $r_i \in R$, $i = 1, 2, \dots$. Возьмем наименьшее p^1 такое, что $|r_1 \dots r_{p^1}| \geq t^* + |\theta^1|$. Введем обозначение $q^1 = \varphi(q_0, r_1 \dots r_{p^1})$. Далее, подадим слово $\text{pref}(\lambda, t^*)$ на состояние q^1 и построим слово θ^2 такое, что

$$O(\bar{\psi}(q^1, \text{pref}(\lambda, t^*)\theta^2)) = \{b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_k\},$$

и при этом

$$\varphi(q_0, \text{pref}(\lambda, t^*)\theta^2) = q_1.$$

Так же, как и длина θ^1 , длина θ^2 не превосходит n^2 .

Далее, верхслово $\text{pref}(\lambda, t^*)\theta^2 \text{post}(\lambda, t^*) \in R^\infty$. Следовательно, также в R^∞ попадает сверхслово $r_1 \dots r_{p^1} \text{pref}(\lambda, t^*)\theta^2 \text{post}(\lambda, t^*)$, то есть

$$r_1 \dots r_{p^1} \text{pref}(\lambda, t^*)\theta^2 \text{post}(\lambda, t^*) = r_1 \dots r_{p^1} r_{p^1+1} \dots \in R^\infty, \quad r_i \in R.$$

Тогда выберем наименьшее число p^2 , такое что $p^2 \geq t^* + |\theta^2|$, и введем обозначение

$$q^2 = \varphi(q^1, r_{p^1+1} \dots r_{p^2}).$$

Таким образом, можно построить сверхслово

$$\begin{aligned} & \text{pref}(\lambda, t^*)\theta^1 \text{pref}(\lambda, t^*)\theta^2 \dots \text{pref}(\lambda, t^*)\theta^{n+1} \text{post}(\lambda, t^*) \\ &= r_1 \dots r_{p^{n+1}} \text{post}(\lambda, t^*) \in R^\infty, \quad r_i \in R, \quad i = 1, \dots, p^{n+1}, \end{aligned}$$

такое, что

$$O(\bar{\psi}(q_i, \text{pref}(\lambda, t^*)\theta^{i+1})) = \{b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_k\}, \quad i = 1, \dots, n+1,$$

но

$$\lim(\bar{\psi}(r_1 \dots r_{p^{n+1}} \text{post}(\lambda, t^*))) = \{b_1, \dots, b_m\}.$$

При этом

$$q^i = \varphi(q_0, r_1 \dots r_{p^i}), \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Очевидно, найдутся такие номера i и j , $i < j \leq n+1$, что q_i и q_j обозначают одно и то же состояние. Тогда сверхслово

$$\rho = \text{pref}(\lambda, t^*)r_1 \dots r_{p^i}(r_{p^i+1} \dots r_{p^j})^\infty \in R^\infty$$

по построению. Следовательно, оно должно приниматься автоматом $\mathfrak{A}$. Но

$$\lim(\bar{\psi}(q_0, \rho)) = \{b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_k\} \notin B'.$$

Получено противоречие с предположением, что существует замкнутая сильно связная компонента $\tilde{Q}$ такая, что $O(\tilde{Q}) \supset \tilde{b} \in B'$. Тем самым, $O(\tilde{Q}') \not\supset \tilde{b}$ для всех $\tilde{b} \in B'$ и для любой замкнутой сильно связной компоненты $\tilde{Q}'$. Таким образом, в случае II все замкнутые сильно связные компоненты тупиковые, то есть сверхслово из R^∞ из начального состояния в них не попадает.

Разобьем множество состояний автомата на тупиковые и нетупиковые:

$$\begin{aligned} Q &= T \cup N, \\ T &= \{q \mid q \in \tilde{Q}_i, i = 1, \dots, w\}. \end{aligned}$$

Выходные функции определим как функции от состояний, в которые приходит автомат, то есть

$$\psi'(q(t), x(t)) = f(q(t+1)) = f(\varphi(q(t), x(t))).$$

Пусть

$$\mathfrak{B} = (\{0, 1\}, Q, \{0, 1\}, \varphi, \psi')$$

есть искомый автомат. Функцию выхода в тупиковых состояниях определим произвольным образом, а выходные функции остальных состояний устроены так, чтобы по выбранной букве автомат попадал в состояние, наиболее далекое от тупикового.

Рис. 1. Автомат, в котором сверхсобытие $(01 \cup 00)^\infty$ представимо с помощью $\{\{0, 1\}, \{1\}\}$, и автомат, частично угадывающий это сверхсобытие

1-й шаг. Выделим состояния, из которых тупиковое состояние достижимо по одному ребру. Тогда если $\varphi(q, x) \in T$, то $f(q) = \bar{x}$. Класс выделенных состояний обозначим

$$Q(1) = \{q \notin T \mid \exists x: \varphi(q, x) \in T\}.$$

i -й шаг. Пусть выделены классы $Q(1), \dots, Q(i-1)$, и для этих состояний выходные функции определены. Рассмотрим множество

$$Q(i) = \{q \in N / \{Q(1) \cup \dots \cup Q(i-1)\} \mid \exists x \in \{0, 1\}: \varphi(q, x) \in Q(i-1)\}.$$

Зададим выходные функции следующим образом: если для $q \in Q(i)$, $x \in \{0, 1\}$ справедливо включение $\varphi(q, x) \in Q(i-1)$, то

$$f(q) = \bar{x}.$$

Очевидно, что не позднее, чем через $n-1$ шаг функция выхода будет определена.

Покажем, что в любом сверхслове исходного множества данный автомат не может не угадывать $n-1$ символ подряд. Действительно,

$$N = \bigcup_{i=1}^{n'} Q(i), \quad n' < n.$$

В состояниях $Q(1)$ на сверхсловах из R^∞ автомат всегда угадывает. В остальных нетупиковых состояниях по построению автомат $\mathfrak{B}$ либо угадывает символ $\bar{x}$, либо переходит из $Q(i)$ в $Q(i-1)$. Таким образом, автомат угадывает множество со степенью, не меньшей, чем $1/(n-1)$. Заметим, что в случае $n=1$ частичного угадывания не может быть.

Наконец, докажем утверждение (г). Построим слово α , по которому из любого состояния $\mathfrak{A}$ достижимы состояния T , что будет означать, что это слово не является подсловом никакого сверхслова из R^∞ .

Пусть

$$N = \{q_1, \dots, q_{|N|}\}.$$

Известно, что для всех $q_i, i = 1, \dots, |N|$ существует α_i такое, что $\varphi(q_i, \alpha_i) \in T$, так как все замкнутые сильно связанные компоненты являются тупиковыми. Можно также заметить, что суммарная длина α_i не превосходит $(|N|(|N| - 1))/2$.

Будем строить слово индуктивно.

Шаг 0: $i_1 = 1$. Пусть $\alpha^1 = \alpha_{i_1}$. Если α^1 не является подсловом никакого сверхслова из R^∞ , то слово $\alpha = \alpha^1$ построено, в противном случае переходим к следующему шагу.

Шаг 1. Из предположения предыдущего пункта следует, что найдутся $\beta_1 \in \{0, 1\}^*$, $\gamma_1 \in \{0, 1\}^\infty$ такие, что $\beta_1 \alpha^1 \gamma_1 \in R^\infty$.

Пусть $\varphi(q_0, \beta_1) = q_{i'}$, причем $q_{i'} \neq i_1$, поскольку $\varphi(q_{i_1}, \alpha^1) \in T$.

Пусть теперь $i_2 = i'$, а $\alpha^2 = \alpha^1 \alpha_{i_2}$. Если α^2 не является подсловом никакого сверхслова из R^∞ , то построение закончено, в противном случае переходим к следующему шагу.

Шаг j . Пусть уже построено слово $\alpha^j = \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_j}$, являющееся подсловом некоторого сверхслова из R^∞ , и $i_k \neq i_l$ при $k \neq l, k, l = 1, \dots, j$. Существуют такие $\beta_j \in \{0, 1\}^*$, $\gamma_j \in \{0, 1\}^\infty$, что $\beta_j \alpha^j \gamma_j \in R^\infty$.

Рассмотрим $q_{i'} = \varphi(q_0, \gamma_j)$. Известно, что $i' \notin \{i_1, \dots, i_j\}$, так как $\varphi(q_{i_k}, \alpha^k) \in T$, $k = 1, \dots, j$.

Назначим $i_{j+1} = i'$, а $\alpha^{j+1} = \alpha^j \alpha_{i_{j+1}}$. Переход к следующему шагу осуществляется в случае, если α^{j+1} является подсловом некоторого сверхслова из R^∞ .

Если слова $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-2}$ были подсловами сверхслов данного множества, то слово α^{n-1} уже таковым не будет, потому что, поданное на любое состояние из N автомата $\mathfrak{A}$, оно переводит его в некоторое состояние из T .

Теорема 1 доказана.

В доказательстве теоремы 1 содержится идея, как по автомату $\mathfrak{A}$, в котором представима свехитерация регулярного события, определить, возможно ли частичное предвосхищение.

Определение частичной угадываемости состоит в выделении сильно связанных компонент автомата, для чего существуют алгоритмы, работающие линейное время (например, алгоритм на с. 214 в [4]), и в сравнении выходов замкнутых сильно связанных компонент $O(\tilde{Q})$ с элементами множества B' , что тоже занимает линейное время (меньшее, чем $n|B'|^2$).

В случае, если множество является частично угадываемым, можно также построить угадывающий его автомат. Если автомат $\mathfrak{A}$ задан диаграммой Мура, то построение новых выходных функций (пункт с) доказательства) занимает время n , а переход от другого способа задания автомата к диаграмме Мура осуществляется за линейное время. Таким образом, доказана и теорема 2.

4. Критерий предвосхищения общерегулярных сверхсобытий

Из утверждения теоремы 1 также вытекает другой способ частичного угадывания. Пусть известно, что R^∞ не содержит некоторого подслова $a_1 \dots a_l$ (длины $l \leq n(n-1)/2$). Тогда можно построить автомат со структурой задержки на $l-1$ такт, но с тем отличием, что при поступлении на вход $a_1, a_2, \dots, a_{l-1}$ автомат по букве a_l переходит в тупиковое состояние, а не в $a_2 \dots a_l$, а выходные функции устроены так же, как в доказательстве теоремы (п. (в)).

Рассмотрим автомат

$$\mathcal{G}(a_1 \dots a_l) = (\{0, 1\}, Q, \{0, 1\}, \varphi, g, q_0),$$

где

$$Q = \{q_T\} \cup \{a(1) \dots a(l-1) \mid a(i) \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, l-1\};$$

and

$$\begin{aligned} \varphi(a(1) \dots a(l-1), x) &= a(2) \dots a(l-1)x \quad \text{если } a(1) \dots a(l-1) \neq a_1 \dots a_{l-1}, \\ \varphi(a_1 \dots a_{l-1}, \bar{a}_l) &= a_2 \dots \bar{a}_l, \quad \varphi(a_1 \dots a_{l-1}, a_l) = q_T, \quad \varphi(q_T, x) = q_T, \\ g(q_T) &= 0, \quad g(a_1 \dots a_{l-1}) = \bar{a}_l. \end{aligned}$$

Для каждого $a(1) \dots a(l-1)$ найдем наибольшее k такое, что

$$a(1) \dots a(l-1) = a(1) \dots a(l-k-1)a_1 \dots a_k.$$

Тогда

$$g(a(1) \dots a_k) = \bar{a}_{k+1}.$$

В случае, если наибольшее $k = 0$, $g(a(1) \dots a(l-1)) = \bar{a}_1$. Это состояние объявляется начальным q_0 .

В автомате такого вида состояние $a_1 \dots a_{l-1}$ достижимо из любого другого, кроме тупикового, по пути длины, не большей $l-1$. Поэтому не может быть более l неугаданных символов подряд, следовательно, степень угадывания не меньше $1/(l-1)$.

В случае $l > n$ такой алгоритм невыгоден, но он удобен для случая произвольных общерегулярных множеств.

Перейдем к доказательству теоремы 3.

Если хотя бы одно R_i^∞ не является частично угадываемым, то уже есть подмножество данного множества сверхслов $R'_i R_i^\infty$, которое ни один автомат не сможет частично угадать.

Пусть теперь все R_i^∞ частично угадываемы, и следовательно, каждое из них содержит все подслова. Построим автомат, частично угадывающий это множество.

Для каждого R_i^∞ возьмем подслово a^i наименьшей длины l_i , не встречающееся в соответствующих сверхсловах. Может быть два и более таких слов одинаковой длины, но произвольным образом выбирается одно. Упорядочим их произвольным образом и получим $a^1, \dots, a^k$.

Для каждого a^i длины l_i строится инициальный автомат

$$\mathcal{G}(a^i) = (\{0, 1\}, Q^i, \{0, 1\}, \varphi^i, g^i, q_0^i),$$

Рис. 2. Автомат $\mathcal{G}(011)$ Рис. 3. Автомат $\mathfrak{B}$

построение которого описано выше. Далее автоматы соединяются в один

$$\mathfrak{B} = (\{0, 1\}, \mathcal{Q}^1 \cup \dots \cup \mathcal{Q}^k / \{q_T^1 \cup \dots \cup q_T^k\}, \{0, 1\}, \varphi, g, q_0^1)$$

следующим образом: на состояниях $\mathcal{Q}^i / \{q_T^i, a^i\}$ выполняются соотношения $\varphi \equiv \varphi^i$ и $\varphi(a_i]_{l_i-1}, a_i(l_i)) = q_0^{i+1}$, то есть если встречается комбинация букв, которая не должна встречаться на предполагаемом множестве, осуществляется переход к автомату для другого множества, в его начальное состояние. В состояниях последнего автомата $\mathcal{G}(a^k)$ переход снова к первому $\mathcal{G}(a^1)$.

Рассмотрим работу такого автомата на сверхслове $\alpha \in R'_j R_j^\infty \subset R'_1 R_1^\infty \cup \dots \cup R'_n R_n^\infty$. Каждое такое α можно представить в виде $\beta\gamma$, $\beta \in R'_j, \gamma \in R_j^\infty$. При подаче слова β возможны встречи как подслова a^j , так и других. Через конечное время $|\beta|$ сверхслово точно не будет содержать в себе комбинацию букв a^j . Если автомат находится в состоя-

ниях $\mathcal{G}(a^j)$, то, во-первых, он из них не выйдет по этому сверхслову γ , а во-вторых, он будет предсказывать его со степенью, не меньшей $1/(l_j - 1)$.

Если же автомат находится в состояниях Q^t , то до тех пор, пока в сверхслове γ не встретится комбинация букв a^t (а она может и не встретиться, и тогда степень угадывания будет не меньше $1/(l_t - 1)$), автомат будет находиться там. Если поступит a^t , то автомат перейдет в состояния Q^{t+1} и так далее. В итоге автомат окажется в Q^j , либо в состояниях $Q^{t'}$, если подслово $a^{t'}$ в α также не встречается.

Таким образом, любое сверхслово α из данного множества будет угадано со степенью

$$c^{\mathfrak{B}}(\alpha) \geq \frac{1}{\max_i (l_i) - 1}.$$

Теорема 3 доказана.

Утверждение теоремы 4 о существовании алгоритма, устанавливающего возможность частичного предвосхищения и работающего линейное время, есть следствие теорем 2 и 3. Построение соответствующего автомата описано в доказательстве теоремы 3.

Список литературы

1. Трахтенброт Б. А., Бардзинь Я. М., *Конечные автоматы (поведение и синтез)*. Наука, Москва, 1970.
2. Вереникин А. Г., Гасанов Э. Э., Об автоматной детерминизации множеств сверхслов. *Дискретная математика* (2006) **18**, №2, 84–97.
3. Мастихина А. А., О частичном угадывании сверхслов. *Интеллектуальные системы* (2007) **11**, 609–619.
4. Sedgewick R., *Algorithms in C++. Part 5: Graph algorithms*. Addison–Wesley, Reading, Mass., 2001.
5. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С., *Введение в теорию автоматов*. Наука, Москва, 1985.

Статья поступила 1.09. 2010.