Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Башов, Минимизация двусторонней тени в единичном кубе, *Дискрет. матем.*, 2011, том 23, выпуск 4, 115–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1165>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 17:41:25

Минимизация двусторонней тени в единичном кубе

© 2011 г. М. А. Башов

Рассматривается задача минимизации двусторонней тени подмножества слоя единичного куба. Показано, что пересечение шара Хэмминга радиуса 2 со слоем куба имеет минимальную двустороннюю тень, и описаны минимальные по двусторонней тени множества меньшей мощности.

1. Введение

Известная изопериметрическая задача на плоскости заключается в нахождении простой замкнутой кривой фиксированной длины, ограничивающей наибольшую площадь. Одним из аналогов этой задачи в дискретных пространствах, таких, как единичный куб, является задача о поиске подмножества слоя фиксированной мощности с минимальной тенью. Задача с односторонней тенью возникает, например, при установлении асимптотики числа монотонных булевых функций [1].

Пусть $\mathcal{A}$ — подмножество слоя B_k^n единичного куба B^n . Тенью вниз $\Delta\mathcal{A}$ называется множество таких наборов $\tilde{\alpha}$ из слоя B_{k-1}^n , что существует набор $\tilde{\beta} \in \mathcal{A}$, $\tilde{\beta} > \tilde{\alpha}$. Аналогично, тенью вверх $\nabla\mathcal{A}$ называется множество таких наборов $\tilde{\alpha}$ из слоя B_{k+1}^n , что существует набор $\tilde{\beta} \in \mathcal{A}$, $\tilde{\beta} < \tilde{\alpha}$. Двусторонней тенью $\mathbb{X}\mathcal{A}$ называется объединение множеств $\Delta\mathcal{A}$ и $\nabla\mathcal{A}$.

Множество $\mathcal{A} \subseteq B_k^n$ называется минимальным по тени вниз (тени вверх, двусторонней тени), если $|\Delta\mathcal{A}| \leq |\Delta\mathcal{B}|$ (соответственно, $|\nabla\mathcal{A}| \leq |\nabla\mathcal{B}|$, $|\mathbb{X}\mathcal{A}| \leq |\mathbb{X}\mathcal{B}|$) для любого $\mathcal{B} \subseteq B_k^n$, такого, что $|\mathcal{B}| = |\mathcal{A}|$.

Краскал [2] и Катона [3] установили, что начальный лексикографический отрезок слоя единичного куба минимален по тени вниз. Мерс [4] и Фюреди и Григгс [5] доказали, что лексикографический отрезок является единственным с точностью до изоморфизма минимальным множеством тогда и только тогда, когда он является замкнутым множеством, то есть не существует такой точки вне отрезка, что ее тень вниз целиком лежала бы в тени вниз отрезка.

Клементс и Линдстрем [6] обобщили результат Краскала и Катона на произвольное декартово произведение цепей. Аналоги теоремы Краскала–Катона доказаны также для декартова произведения звезд [7] и двойственного частично упорядоченного множества [8].

В данной работе рассмотрена задача минимизации двусторонней тени подмножеств слоя B_k^n , и описаны минимальные множества мощности, не превосходящей $1 + k(n - k)$.

2. Основные понятия

Пусть $\tilde{\alpha} \in B_k^n$. Кругом $\mathcal{C}_r(\tilde{\alpha})$ назовем множество $\{\tilde{\beta} \in B_k^n \mid \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \leq 2r\}$, то есть пересечение шара Хэмминга радиуса $2r$ и слоя B_k^n . Заметим, что

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}_r(\tilde{\alpha})| &= \sum_{i=0}^r \binom{k}{i} \binom{n-k}{i}, \\ |\Delta \mathcal{C}_r(\tilde{\alpha})| &= \sum_{i=0}^r \binom{k}{i+1} \binom{n-k}{i}, \\ |\nabla \mathcal{C}_r(\tilde{\alpha})| &= \sum_{i=0}^r \binom{k}{i} \binom{n-k}{i+1}. \end{aligned}$$

В частности, если $n = 2N$, $k = N$, то

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}_r(\tilde{\alpha})| &= \sum_{i=0}^r \binom{N}{i}^2, \\ |\mathbb{X} \mathcal{C}_r(\tilde{\alpha})| &= 2 \sum_{i=0}^r \binom{N}{i+1} \binom{N}{i}, \end{aligned}$$

и

$$\frac{|\Delta \mathcal{C}_{N/2}(\tilde{\alpha})|}{|\mathcal{C}_{N/2}(\tilde{\alpha})|} \sim \frac{|\nabla \mathcal{C}_{N/2}(\tilde{\alpha})|}{|\mathcal{C}_{N/2}(\tilde{\alpha})|} \sim 1.$$

Таким образом, множества $\mathcal{C}_{N/2}(\tilde{\alpha})$ асимптотически минимальны по тени вниз и по тени вверх, а значит, и по двусторонней тени. Естественно предположить, что круги $\mathcal{C}_r(\tilde{\alpha})$ являются минимальными по двусторонней тени множествами. В этой работе данная гипотеза доказывается для $r = 1$.

При поиске минимальных по двусторонней тени множеств удобнее перейти от слоя булева куба B_k^n к семейству $\binom{[n]}{k}$ k -элементных подмножеств $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Для этого набору $\tilde{\alpha} \in B_k^n$ сопоставим множество A чисел i таких, что $\alpha_{n-i+1} = 1$. Подмножествам B_k^n соответствуют семейства множеств из $\binom{[n]}{k}$, и определения теней, минимальных множеств и лексикографического порядка переносятся на семейства.

Будем обозначать символами A, B, C, D элементы $\binom{[n]}{k}$, под a_i будем понимать элемент A , причем будем считать, что a_i упорядочены по возрастанию, то есть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ и $a_1 < a_2 < \dots < a_k$.

Введем на $\binom{[n]}{k}$ отношение частичного порядка. Пусть A и B — элементы $\binom{[n]}{k}$. Положим $A \sqsubseteq B$, если $a_i \leq b_i$ для $i = 1, \dots, k$. На рис. 1 изображены диаграммы Хассе для частично упорядоченных множеств $\left(\binom{[4]}{2}, \sqsubseteq\right)$, $\left(\binom{[6]}{3}, \sqsubseteq\right)$ и $\left(\binom{[7]}{3}, \sqsubseteq\right)$.

Семейство $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ называется идеалом $\mathcal{M}(n, k) = \left(\binom{[n]}{k}, \sqsubseteq\right)$, если из того, что $A \in \mathcal{F}$ следует, что любое множество B такое, что $B \sqsubseteq A$, входит в $\mathcal{F}$.

Обозначим через $\mathcal{C}_1(n, k)$ семейство, соответствующее кругу $\mathcal{C}_1(\underbrace{00 \dots 0}_{n-k} \underbrace{11 \dots 1}_k)$. За-

метим, что $\mathcal{C}_1(n, k)$ является идеалом $\mathcal{M}(n, k)$. На изображенных на рис. 2 диаграммах Хассе $\binom{[5]}{2}$ и $\binom{[6]}{3}$ выделены точки, принадлежащие соответственно $\mathcal{C}_1(5, 2)$ и $\mathcal{C}_1(6, 3)$.

Рис. 1.

Пусть $A \in \binom{[n]}{k}$, $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$. Рассмотрим следующий оператор сдвига:

$$S_{ij}(\mathcal{F}, A) = \begin{cases} A, & \text{если либо } j \notin A, \text{ либо } i \in A, \\ A, & \text{если } A \cup \{i\} \setminus \{j\} \in \mathcal{F}, \\ A \cup \{i\} \setminus \{j\} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Обозначим

$$S_{ij}(\mathcal{F}) = \{S_{ij}(\mathcal{F}, A) \mid A \in \mathcal{F}\}.$$

Семейство $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ называется несдвигаемым, если $S_{ij}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ для любых i и j таких, что $1 \leq i < j \leq n$.

Рис. 2.

3. Свойства оператора сдвига

Предложение 1 ([9, 10]). Пусть $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$. Тогда верны следующие утверждения:

- (1) $|S_{ij}(\mathcal{F})| = |\mathcal{F}|$,
- (2) $|\Delta S_{ij}(\mathcal{F})| \leq |\Delta \mathcal{F}|$,
- (3) $|\nabla S_{ij}(\mathcal{F})| \leq |\nabla \mathcal{F}|$,
- (4) существует последовательность операторов сдвига $S_{i_1 j_1}, S_{i_2 j_2}, \dots, S_{i_l j_l}$ такая, что $S_{i_l j_l}(S_{i_{l-1} j_{l-1}}(\dots S_{i_1 j_1}(\mathcal{F}) \dots))$ является несдвигаемым семейством.

Итак, оператор сдвига не меняет мощность семейства, не увеличивает мощность тени, и любое семейство можно привести к несдвигаемому. Значит, для решения задачи минимизации достаточно рассматривать лишь несдвигаемые семейства.

Следующее утверждение дает критерий того, что оператор S_{ij} строго уменьшает мощность тени $\mathcal{F}$.

Предложение 2. Неравенство $|\boxtimes S_{ij}(\mathcal{F})| < |\boxtimes \mathcal{F}|$ имеет место тогда и только тогда, когда для некоторого $A \in \binom{[n] \setminus \{i, j\}}{k-2}$ семейство $\mathcal{F}$ содержит элементы $\{i, t_1\} \cup A$ и $\{j, t_2\} \cup A$, причем либо $\{j\} \cup A \notin \Delta S_{ij}(\mathcal{F})$, либо $\{j, t_1, t_2\} \cup A \notin \nabla S_{ij}(\mathcal{F})$.

Доказательство. Разобьем семейство $\mathcal{F}$ на пять частей:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F} &= \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3 \cup \mathcal{F}_4 \cup \mathcal{F}_5, \\
 \mathcal{F}_1 &= \{A \in \mathcal{F} \mid i \in A, j \in A\}, \\
 \mathcal{F}_2 &= \{A \in \mathcal{F} \mid i \notin A, j \notin A\}, \\
 \mathcal{F}_3 &= \{A \in \mathcal{F} \mid i \in A, A \cup \{j\} \setminus \{i\} \in \mathcal{F}\} \cup \{A \in \mathcal{F} \mid j \in A, A \cup \{i\} \setminus \{j\} \in \mathcal{F}\}, \\
 \mathcal{F}_4 &= \{A \in \mathcal{F} \mid i \in A, j \notin A\} \setminus \mathcal{F}_3, \\
 \mathcal{F}_5 &= \{A \in \mathcal{F} \mid i \notin A, j \in A\} \setminus \mathcal{F}_3.
 \end{aligned}$$

Положим

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_5.$$

Из определения оператора S_{ij} следует, что

$$S_{ij}(\mathcal{F}_r) = \mathcal{F}_r, \quad r \leq 4,$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \Sigma S_{ij}(\mathcal{F}_r) &= \Sigma \mathcal{F}_r, \\ S_{ij}(\mathcal{F}_5) &= \{A \cup \{i\} \setminus \{j\} \mid A \in \mathcal{F}_5\}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} |S_{ij}(\mathcal{F}_5)| &= |\mathcal{F}_5|, \\ |\Sigma S_{ij}(\mathcal{F}_5)| &= |\Sigma \mathcal{F}_5|. \end{aligned}$$

Поэтому $|\Sigma S_{ij}(\mathcal{F})| < |\Sigma \mathcal{F}|$ тогда и только тогда, когда

$$|\Sigma S_{ij}(\mathcal{F}_5) \cap \Sigma \mathcal{F}_0| > |\Sigma \mathcal{F}_5 \cap \Sigma \mathcal{F}_0|,$$

то есть существует такой $A \in \mathcal{F}_5$, что

$$\begin{aligned} \Sigma A \cap \Sigma \mathcal{F}_0 &= \emptyset, \\ \Sigma S_{ij}(\mathcal{F}, A) \cap \Sigma \mathcal{F}_0 &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Эти условия на A эквивалентны тому, что существует такое $B \in \mathcal{F}_0$, что $i \in B$, $j \notin B$, $|A \cap B| = k - 2$ и $\{\{j\} \cup (A \cap B), \{j\} \cup A \cup B\} \not\subseteq \Sigma S_{ij}(\mathcal{F})$.

4. Свойства частичного порядка $\sqsubseteq$

Предложение 3. Семейство $\mathcal{F}$ несдвигаемо тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ является идеалом $\mathcal{M}(n, k)$.

Доказательство. Поскольку при $i < j$ для произвольного семейства $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ и произвольного множества $A \in \binom{[n]}{k}$ выполнено $S_{ij}(\mathcal{F}, A) \subseteq A$, любой идеал $\mathcal{M}(n, k)$ является несдвигаемым семейством.

Пусть $\mathcal{F}$ — несдвигаемое семейство. Предположим, что $\mathcal{F}$ — не идеал, то есть существуют такие A и B , что $A \in \mathcal{F}$, $B \notin \mathcal{F}$ и $B \subseteq A$. Не ограничивая общности, можно считать, что B непосредственно предшествует A , то есть не существует такого C , отличного от A и B , что $B \subseteq C \subseteq A$. Тогда из определения отношения $\sqsubseteq$ получаем, что $B = A \cup \{i\} \setminus \{i + 1\}$ для некоторого i , и $S_{ij}(\mathcal{F}, A) = B$ при $j = i + 1$, противоречие с несдвигаемостью $\mathcal{F}$.

Предложение 4. Пусть $A, B \in \binom{[n]}{k}$, и двусторонние тени A и B имеют непустое пересечение. Тогда либо $A \sqsubseteq B$, либо $B \sqsubseteq A$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\Delta A \cap \Delta B \neq \emptyset$. Пусть $C \in \Delta A \cap \Delta B$. Тогда, по определению тени вниз,

$$A = C \cup \{x\}, \quad B = C \cup \{y\}.$$

Пусть $x \leq y$. Тогда по определению $A \sqsubseteq B$.

Таким образом, если двусторонние тени двух множеств пересекаются, то эти множества сравнимы. Это позволяет установить формулу для вычисления мощности двусторонней тени идеала $\mathcal{M}(n, k)$. Положим

$$\begin{aligned} s_l(A) &= \min\{i \in [n] \mid i \notin A\} - 1, \\ s_u(A) &= n - a_k, \\ s(A) &= s_l(A) + s_u(A). \end{aligned}$$

Предложение 5. Пусть $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ — идеал $\mathcal{M}(n, k)$. Тогда

$$|\boxtimes \mathcal{F}| = \sum_{A \in \mathcal{F}} s(A).$$

Доказательство. Пусть A — максимальная точка идеала $\mathcal{F}$, то есть не существует такого $B \in \mathcal{F}$, что $B \supsetneq A$. Обозначим $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \setminus \{A\}$. Докажем, что

$$|\boxtimes \mathcal{F}'| + s(A) = |\boxtimes \mathcal{F}|.$$

1. Покажем, что

$$|\Delta \mathcal{F}'| + s_l(A) = |\Delta \mathcal{F}|.$$

Пусть $s_l(A) = m$, то есть $\{1, 2, \dots, m\} \subseteq A$, $m+1 \notin A$. Докажем, что

$$\Delta A \cap \Delta \mathcal{F}' = \{A \setminus \{a_i\} \mid i > m\}.$$

По определению,

$$\Delta A = \{A \setminus \{a_i\} \mid 1 \leq i \leq k\}.$$

Если $i > m$, то

$$B = A \setminus \{a_i\} \cup \{m+1\} \subseteq A,$$

и $B \neq A$, поэтому $B \in \mathcal{F}'$, и $A \setminus \{a_i\} = B \setminus \{m+1\} \in \Delta \mathcal{F}'$.

Если $1 \leq i \leq m$, то

$$A \setminus \{a_i\} = A \setminus \{i\}.$$

Предположим, что $A \setminus \{i\} \in \Delta \mathcal{F}'$. Тогда $A \setminus \{i\} \cup \{j\} \in \mathcal{F}'$. Ясно, что $j \neq i$, так как $A \notin \mathcal{F}'$, и $j \geq i$, так как $\{1, 2, \dots, i-1\} \subseteq A$. Но в таком случае $A \subseteq A \setminus \{i\} \cup \{j\} \in \mathcal{F}$, и A не является максимальной точкой идеала $\mathcal{F}$, противоречие с выбором A . Таким образом,

$$|\Delta A \setminus \Delta \mathcal{F}'| = m.$$

2. Покажем, что

$$|\nabla \mathcal{F}'| + s_u(A) = |\nabla \mathcal{F}|.$$

Пусть $s_u(A) = m$, то есть $a_k = n - m$. Докажем, что

$$\nabla A \cap \nabla \mathcal{F}' = \{A \cup \{i\} \mid i \notin A, i < a_k\}.$$

По определению,

$$\nabla A = \{A \cup \{i\} \mid i \notin A\}.$$

Если $i < a_k$, то

$$B = A \cup \{i\} \setminus \{a_k\} \subseteq A,$$

поэтому $B \in \mathcal{F}'$, и

$$A \cup \{i\} = B \cup \{a_k\} \in \nabla \mathcal{F}'.$$

Предположим, что $i > a_k$, и $A \cup \{i\} \in \nabla \mathcal{F}'$. Тогда существует $B = A \cup \{i\} \setminus \{j\} \in \mathcal{F}'$. Но $j \neq i$, так как $A \notin \mathcal{F}'$. Итак, $j \in A$ и $i > a_k$, следовательно, $B \supseteq A$, что противоречит выбору A . Таким образом, $A \cup \{i\} \notin \nabla \mathcal{F}'$ тогда и только тогда, когда $i > a_k$, и

$$|\nabla A \setminus \nabla \mathcal{F}'| = m.$$

Итак, на $\binom{[n]}{k}$ введена такая весовая функция, что мощность двусторонней тени идеала $\mathcal{M}(n, k)$ равна его весу, то есть сумме весов его точек. Таким образом, задача о поиске минимальных по двусторонней тени идеалов эквивалентна задаче о нахождении идеалов минимального веса в $\mathcal{M}(n, k)$.

Следующее утверждение показывает, что весовые функции s , s_u , s_l монотонны относительно частичного порядка $\subseteq$.

Предложение 6. Если $A \subseteq B$, то

$$s(A) \geq s(B), \quad s_l(A) \geq s_l(B), \quad s_u(A) \geq s_u(B).$$

Доказательство. Так как $b_k \geq a_k$, то

$$s_u(B) = n - b_k \leq n - a_k = s_u(A).$$

Пусть $s_l(B) = m$, то есть $b_1 = 1, b_2 = 2, \dots, b_m = m, b_{m+1} > m + 1$. Тогда, по определению отношения $\subseteq$, $a_1 = 1, a_2 = 2, \dots, a_m = m$, и $s_l(A) \geq m$. Таким образом,

$$s(A) = s_l(A) + s_u(A) \geq s_l(B) + s_u(B) = s(B).$$

5. Оптимальность $\mathcal{C}_1(n, k)$

Заметим, что семейство $\mathcal{C}_1(n, k) \setminus \{\{1, 2, \dots, k\}\}$, как частично упорядоченное множество, изоморфно декартову произведению двух цепей длины k и $n - k$, причем функция s принимает одинаковое значение во всех точках слоя этого ЧУМ.

Пусть $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$. Обозначим через $\mathcal{F}|_m$ совокупность элементов $\mathcal{F}$, в которых функция s принимает значение m . Нетрудно видеть, что

$$|\mathcal{C}_1(n, k)|_m = \begin{cases} m + 1, & 0 \leq m \leq \min\{k - 1, n - k - 1\}, \\ \min\{k, n - k\}, & \min\{k - 1, n - k - 1\} \leq m \leq \max\{k - 1, n - k - 1\}, \\ n - 1 - m, & \max\{k - 1, n - k - 1\} \leq m \leq n - 1, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

На рис. 3 точки $\binom{[5]}{2}$ и $\binom{[6]}{3}$ помечены значениями функции s .

Рис. 3.

Предложение 7. Пусть $A \in \binom{[n]}{k}$ и $s(A) = m$. Тогда существует единственная точка $B \in \mathcal{C}_1(n, k)$ такая, что $s(B) = m$ и $B \subseteq A$.

Доказательство. Пусть $s_l(A) = m_1$ и $s_u(A) = m_2$, то есть $a_{m_1} = m_1$, $a_{m_1+1} > m_1 + 1$ и $a_k = n - m_2$. Рассмотрим точку

$$B = \{1, 2, \dots, m_1, m_1 + 2, m_1 + 3, \dots, k, n - m_2\}.$$

Ясно, что $B \in \mathcal{C}_1(n, k)$, $B \subseteq A$ и $s(B) = m$. Докажем, что нет других точек, обладающих этими свойствами. Пусть $C \in \mathcal{C}_1(n, k)$, $C \subseteq A$ и $s(C) = m$. Тогда из предложения 6 следует, что $s_l(C) = m_1$, $s_u(C) = m_2$, то есть $\{1, 2, \dots, m_1\} \subseteq C$, $m_1 + 1 \notin C$ и $n - m_2 \in C$. Из того, что $C \in \mathcal{C}_1(n, k)$ следует, что $C \cap \{1, 2, \dots, k\} \geq k - 1$, значит, $\{m_1 + 2, m_1 + 3, \dots, k\} \subseteq C$, то есть $B = C$.

Из предыдущего предложения следует, что семейство точек $\binom{[n]}{k} \Big|_m$ разбивается на непересекающиеся классы точек, лежащие над точками из $\mathcal{C}_1(n, k) \Big|_m$.

Будем говорить, что $A \in \binom{[n]}{k} \Big|_m$ порождает $B \in \binom{[n]}{k} \Big|_{m+1}$, если $B \subseteq A$ и не существует такой точки C , отличной от A и B , что $B \subseteq C \subseteq A$.

Точка A порождает не более двух точек:

- (1) если $a_{k-1} \neq a_k - 1$, то A порождает

$$B = A \cup \{a_k - 1\} \setminus \{a_k\}$$

(порождение по старшей координате);

- (2) если $a_l = l$, $a_{l+1} = l + 2$, то A порождает

$$B = A \cup \{l + 1\} \setminus \{l + 2\}$$

(порождение по младшей координате).

Заметим также, что точка $B \in \binom{[n]}{k} \Big|_{m+1}$ может порождаться одной из двух точек:

(1) если $b_k \neq n$, то

$$A = B \cup \{b_k + 1\} \setminus \{b_k\}$$

порождает B по старшей координате;

(2) если $b_1 = 1, b_2 = 2, \dots, b_l = l, b_{l+1} > l + 1$, то

$$A = B \cup \{l + 1\} \setminus \{l\}$$

порождает B по младшей координате.

Наконец, заметим, что точки из $\mathcal{C}_1(n, k)$ порождают только точки из $\mathcal{C}_1(n, k)$ и порождаются только точками из $\mathcal{C}_1(n, k)$.

Покажем, что мощность $\mathcal{F}|_{m+1}$ не может быть существенно меньше мощности $\mathcal{F}|_m$. Сначала докажем вспомогательное утверждение.

Предложение 8. Пусть $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ — идеал $\mathcal{M}(n, k)$,

$$|\mathcal{F}|_m \leq |\mathcal{C}_1(n, k)|_m, \quad \mathcal{F}' = \mathcal{F} \setminus \mathcal{C}_1(n, k).$$

Тогда выполнено хотя бы одно из условий:

- (1) $|\mathcal{F}'|_{m+1} \geq |\mathcal{F}'|_m$;
- (2) $|\mathcal{F}|_m \geq |\mathcal{C}_1(n, k)|_m - 1$ и $|\mathcal{F}|_{m+1} \geq |\mathcal{C}_1(n, k)|_{m+1}$.

Доказательство. Построим инъективное отображение из $\mathcal{F}'|_m$ в $\mathcal{F}'|_{m+1}$. Будем рассматривать точки $\mathcal{F}'|_m$ по классам: сначала рассмотрим точки $\mathcal{F}'|_m$, лежащие над лексикографически наибольшей точкой $\mathcal{C}_1(n, k)|_m$, затем — над второй по порядку точкой, и так далее. Рассматриваемой точке будем ставить в соответствие порождаемую ей точку, причем если текущая точка порождает две еще не задействованные на предыдущих шагах точки, то поставим ей в соответствие точку, порожденную по младшей координате. Рассмотрим случаи, в которых не удастся построить такое отображение, то есть на одном из шагов рассматриваемая точка не порождает точек, которые не выбраны на предыдущих шагах.

Заметим, что если $A \in \mathcal{F}|_m$ порождает точку $B \in \mathcal{F}|_{m+1}$ по старшей координате, то к моменту рассмотрения точки A точка B выбрана не будет, так как если B порождается по младшей координате точкой C , то эта точка C лежит в следующем классе $\binom{[n]}{k}|_m$ по отношению к классу точки A . Таким образом, шаг процедуры построения инъективного отображения может оказаться неудачным в двух случаях: текущая точка не порождает ни одной точки, или текущая точка порождает одну точку по младшей координате, и эта порожденная точка уже выбрана на одном из предыдущих шагов.

1. Пусть $\mathcal{F}'|_m$ содержит точку A , у которой вообще нет порожденных точек в $\mathcal{F}'|_{m+1}$, и пусть $s_l(A) = p$, $s_u(A) = m - p$. Тогда

$$B = \{1, 2, \dots, p, p + 3, p + 4, \dots, k, n - m + p - 1, n - m + p\} \subseteq A,$$

поэтому $B \in \mathcal{F}$. Точки A и B лежат над точкой

$$C = \{1, 2, \dots, p, p + 2, p + 3, \dots, k, n - m + p\} \in \mathcal{C}_1(n, k)|_m,$$

и семейство $\mathcal{F}|_m$ содержит сегмент $[C, B]$. При $p < k - 2$ и $n - m + p > k + 2$ выполнено $m < n - 5$, и число точек в сегменте равно

$$(n - m + p - 1 - k)(k - p - 1) \geq 2(n - m - 3) > |\mathcal{C}_1(n, k)|_m,$$

что противоречит условию утверждения. Если $p = k - 2$, то длина цепи $[C, B]$ равна $n - m + k - 3 - (k - 1) = n - m - 2$. Следовательно,

$$|\mathcal{F}|_m| \geq n - m - 2.$$

Если $m < \max\{k - 2, n - k - 2\}$, то

$$|\mathcal{F}|_m| \geq n - m - 1 > |\mathcal{C}_1(n, k)|_m|,$$

что противоречит условию.

Если $m \geq \max\{k - 2, n - k - 2\}$, то

$$|\mathcal{F}|_m| \geq n - m - 2 \geq |\mathcal{C}_1(n, k)|_m| - 1.$$

Так как точка C порождает две точки в $\mathcal{C}_1(n, k)|_{m+1}$ и каждая точка $[C, B]$, кроме B , порождает точку вне $\mathcal{C}_1(n, k)|_{m+1}$, верно, что

$$|\mathcal{F}|_{m+1}| \geq n - m - 2 \geq |\mathcal{C}_1(n, k)|_{m+1}|.$$

2. Пусть $\mathcal{F}'|_m$ содержит точку A , которая порождает одну точку $B \in \mathcal{F}'|_{m+1}$ по младшей координате, и точка B уже выбрана при рассмотрении предыдущего класса.

Пусть

$$s_l(A) = p, \quad s_u(A) = m - p.$$

Поскольку A порождает точку по младшей координате, верно, что $\{1, 2, \dots, p, p + 2\} \subseteq A$. Так как A не порождает точку по старшей координате, $\{n - m + p - 1, n - m + p\} \subseteq A$. Поскольку $A \notin \mathcal{C}_1(n, k)$, верно, что $n - m + p \geq k + 2$ и $p \leq k - 3$, поэтому

$$m \leq n - 5.$$

Пусть $\{p + 2, p + 3, \dots, p + q\} \subseteq A$, $p + q + 1 \notin A$. Заметим, что $q \geq 2$. Таким образом,

$$A = \{1, 2, \dots, p, p + 2, p + 3, \dots, p + q, \\ a_{p+q}, a_{p+q+1}, \dots, a_{k-2}, n - m + p - 1, n - m + p\}.$$

Порожденная A точка имеет вид

$$\hat{A} = \{1, 2, \dots, p + 1, p + 3, p + 4, \dots, p + q, \\ a_{p+q}, a_{p+q+1}, \dots, a_{k-2}, n - m + p - 1, n - m + p\}.$$

Эта точка уже выбрана, значит,

$$B = \{1, 2, \dots, p + 1, p + 3, p + 4, \dots, p + q, \\ a_{p+q}, a_{p+q+1}, \dots, a_{k-2}, n - m + p - 1, n - m + p + 1\} \in \mathcal{F}.$$

Если $q > 2$, то B порождает по младшей координате точку $\hat{B}$, и, так как точке B была поставлена в соответствие точка $\hat{A}$, то

$$\hat{B} = \{1, 2, \dots, p+2, p+4, p+5, \dots, p+q, \\ a_{p+q}, a_{p+q+1}, \dots, a_{k-2}, n-m+p-1, n-m+p+1\}$$

уже была выбрана, то есть

$$C = \{1, 2, \dots, p+2, p+4, p+5, \dots, p+q, \\ a_{p+q}, a_{p+q+1}, \dots, a_{k-2}, n-m+p-1, n-m+p+2\} \in \mathcal{F}.$$

Продолжая, получим, что

$$\begin{aligned} &\{1, 2, \dots, p, p+2, p+3, \dots, p+q, a_{p+q}, a_{p+q+1}, \dots, a_{k-2}, \\ &\quad n-m+p-1, n-m+p\} \in \mathcal{F}, \\ &\{1, 2, \dots, p+1, p+3, p+4, \dots, p+q, a_{p+q}, a_{p+q+1}, \dots, a_{k-2}, \\ &\quad n-m+p-1, n-m+p+1\} \in \mathcal{F}, \\ &\quad \dots \\ &\{1, 2, \dots, p+q-1, a_{p+q}, a_{p+q+1}, \dots, a_{k-2}, \\ &\quad n-m+p-1, n-m+p+q-1\} \in \mathcal{F}, \end{aligned}$$

и в случае $m < n-5$

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}|_m &\geq q(n+m+p-1-p-q) = q(n-m-q-1) \\ &\geq 2(n-m-3) > |\mathcal{C}_1(n, k)|_m. \end{aligned}$$

В случае $m = n-5$ получаем

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}|_m &\geq 4 = |\mathcal{C}_1(n, k)|_m, \\ |\mathcal{F}|_{m+1} &\geq 3 = |\mathcal{C}_1(n, k)|_{m+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, если условия утверждения выполнены, то либо можно построить инъективное отображение из $\mathcal{F}'|_m$ в $\mathcal{F}'|_{m+1}$, то есть

$$|\mathcal{F}'|_{m+1}| \geq |\mathcal{F}'|_m|,$$

либо

$$|\mathcal{F}|_m| \geq |\mathcal{C}_1(n, k)|_m| - 1$$

и

$$|\mathcal{F}|_{m+1}| \geq |\mathcal{C}_1(n, k)|_{m+1}|.$$

Теперь получим из доказанного утверждения два следствия о зависимости мощности $\mathcal{F}|_{m+1}$ от мощности $\mathcal{F}|_m$.

Предложение 9. Пусть $\mathcal{F}$ — идеал $\mathcal{M}(n, k)$. Тогда если

$$|\mathcal{F}|_m \geq |\mathcal{C}_1(n, k)|_m,$$

то

$$|\mathcal{F}|_{m+1} \geq |\mathcal{C}_1(n, k)|_{m+1}.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ — идеал, и

$$|\mathcal{F}'|_m = |\mathcal{C}_1(n, k)|_m.$$

Тогда по предложению 8 либо

$$|\mathcal{F}'|_{m+1} \geq |\mathcal{C}_1(n, k)|_{m+1},$$

то есть выполнено утверждение, либо

$$|(\mathcal{F}' \setminus \mathcal{C}_1(n, k))|_{m+1} \geq |(\mathcal{F}' \setminus \mathcal{C}_1(n, k))|_m.$$

Остается показать, что во втором случае выполнено также

$$|(\mathcal{F}' \cap \mathcal{C}_1(n, k))|_{m+1} \geq |(\mathcal{F}' \cap \mathcal{C}_1(n, k))|_m + |\mathcal{C}_1(n, k)|_{m+1} - |\mathcal{C}_1(n, k)|_m,$$

но это следует из того, что $\mathcal{C}_1(n, k) \setminus \{\{1, 2, \dots, k\}\}$ изоморфно, как ЧУМ, декартову произведению цепей, причем $\mathcal{C}_1(n, k)|_m$ соответствует при изоморфизме слою этого произведения, и из теоремы Клементса–Линдстрема.

Предложение 10. Пусть $\mathcal{F}$ — идеал $\mathcal{M}(n, k)$. Тогда, если $|\mathcal{F}|_m < |\mathcal{C}_1(n, k)|_m$, то выполнено хотя бы одно из условий:

$$(1) \quad |\mathcal{F}|_{m+1} \geq |\mathcal{F}|_m + \max\{|\mathcal{C}_1(n, k)|_{m+1} - |\mathcal{C}_1(n, k)|_m, 0\},$$

$$(2) \quad |\mathcal{F}|_{m+1} \geq |\mathcal{C}_1(n, k)|_{m+1}.$$

Доказательство. Если выполнено второе условие предложения 8, то выполнено второе условие данного предложения.

Если выполнено первое условие предложения 8, то доказываемое предложение вытекает из того, что

$$|(\mathcal{F} \setminus \mathcal{C}_1(n, k))|_{m+1} \geq |(\mathcal{F} \setminus \mathcal{C}_1(n, k))|_m$$

по предложению 8, а

$$|(\mathcal{F} \cap \mathcal{C}_1(n, k))|_{m+1} \geq |(\mathcal{F} \cap \mathcal{C}_1(n, k))|_m + \max\{|\mathcal{C}_1(n, k)|_{m+1} - |\mathcal{C}_1(n, k)|_m, 0\}$$

по теореме Клементса–Линдстрема.

Теорема 1. Верно, что $\mathcal{C}_1(n, k)$ — минимальное по двусторонней тени семейство, то есть если $\mathcal{F} \subseteq \binom{[n]}{k}$ и $|\mathcal{F}| = |\mathcal{C}_1(n, k)|$, то $|\mathbb{X}\mathcal{F}| \geq |\mathbb{X}\mathcal{C}_1(n, k)|$. Более того, если $\mathcal{F}$ — идеал и $|\mathbb{X}\mathcal{F}| = |\mathbb{X}\mathcal{C}_1(n, k)|$, то $\mathcal{F} = \mathcal{C}_1(n, k)$.

Доказательство. Предположим противное, пусть $|\mathcal{F}| = |\mathcal{C}_1(n, k)|$ и $|\mathbb{X} \mathcal{F}| < |\mathbb{X} \mathcal{C}_1(n, k)|$. Так как сдвиг не увеличивает двустороннюю тень, можно предположить, не ограничивая общности, что $\mathcal{F}$ — идеал $\mathcal{M}(n, k)$. Тогда

$$|\mathbb{X} \mathcal{F}| = \sum_{A \in \mathcal{F}} s(A) = \sum_{m=0}^n m |\mathcal{F}|_m < \sum_{m=0}^n m |\mathcal{C}_1(n, k)|_m = |\mathbb{X} \mathcal{C}_1(n, k)|.$$

Из этого неравенства следует, что найдется такое m_1 , что

$$|\mathcal{F}|_{m_1} < |\mathcal{C}_1(n, k)|_{m_1}.$$

Выберем в качестве m_1 наибольшее из таких чисел. Так как $|\mathcal{F}| = |\mathcal{C}_1(n, k)|$, найдется такое m_2 , что

$$|\mathcal{F}|_{m_2} > |\mathcal{C}_1(n, k)|_{m_2},$$

причем можно выбрать m_2 так, что $m_2 < m_1$, потому что в противном случае

$$\sum_{m=0}^n m |\mathcal{F}|_m > \sum_{m=0}^n m |\mathcal{C}_1(n, k)|_m.$$

Но из предложения 9 следует, что если $|\mathcal{F}|_{m_2} > |\mathcal{C}_1(n, k)|_{m_2}$, то $|\mathcal{F}|_{m_1} \geq |\mathcal{C}_1(n, k)|_{m_1}$. Получаем противоречие с выбором m_1 . Таким образом, для любого идеала $\mathcal{F}$, мощность которого равна $|\mathcal{C}_1(n, k)|$, верно, что

$$|\mathbb{X} \mathcal{F}| \geq |\mathbb{X} \mathcal{C}_1(n, k)|.$$

Докажем единственность минимального идеала. Пусть $\mathcal{F}$ — идеал, $|\mathcal{F}| = |\mathcal{C}_1(n, k)|$, и $|\mathbb{X} \mathcal{F}| = |\mathbb{X} \mathcal{C}_1(n, k)|$. Тогда

$$\sum_{m=0}^n m |\mathcal{F}|_m = \sum_{m=0}^n m |\mathcal{C}_1(n, k)|_m.$$

Поскольку предположение о том, что найдется m_1 такое, что $|\mathcal{F}|_{m_1} < |\mathcal{C}_1(n, k)|_{m_1}$, приводит к противоречию, верно, что

$$|\mathcal{F}|_m = |\mathcal{C}_1(n, k)|_m$$

при всех m . Итак,

$$|\mathcal{F}|_0 = |\mathcal{C}_1(n, k)|_0 = 1,$$

поэтому наименьшая точка $\{2, 3, \dots, k, n\}$ семейства $\left(\binom{[n]}{k}\right)_0$ принадлежит $\mathcal{F}$. Поскольку $\{2, 3, \dots, k, n\}$ — наибольшая точка идеала $\mathcal{C}_1(n, k)$, верно, что $\mathcal{C}_1(n, k) \subseteq \mathcal{F}$, и следовательно, $\mathcal{C}_1(n, k) = \mathcal{F}$.

Теперь, используя свойства оператора сдвига, докажем, что все минимальные семейства мощности $|\mathcal{C}_1(n, k)|$, не являющиеся идеалами $\mathcal{M}(n, k)$, изоморфны $\mathcal{C}_1(n, k)$.

Теорема 2. Верно, что $\mathcal{C}_1(n, k)$ — единственное с точностью до изоморфизма (перестановки координат) минимальное по двусторонней тени семейство мощности $1 + k(n - k)$.

Доказательство. Сначала докажем, что $S_{ij}(\mathcal{C}_1(n, k))$ совпадает с семейством, соответствующим кругу $\mathcal{C}_1(\tilde{\alpha})$ для некоторого $\tilde{\alpha} \in B_k^n$.

Если $i \leq k$, $j \leq k$ или $i > k$, $j > k$, то, поскольку $\{i\} \cup B \in \mathcal{C}_1(n, k)$ тогда и только тогда, когда $\{j\} \cup B \in \mathcal{C}_1(n, k)$, верно, что

$$S_{ij}(\mathcal{C}_1(n, k), A) = A$$

для любого $A \in \mathcal{C}_1(n, k)$, и поэтому

$$S_{ij}(\mathcal{C}_1(n, k)) = \mathcal{C}_1(n, k).$$

Если $i \leq k$, $j > k$, то, поскольку из того, что $\{j\} \cup B \in \mathcal{C}_1(n, k)$, следует, что $\{i\} \cup B \in \mathcal{C}_1(n, k)$, также выполнено

$$S_{ij}(\mathcal{C}_1(n, k), A) = A$$

для любого $A \in \mathcal{C}_1(n, k)$, и

$$S_{ij}(\mathcal{C}_1(n, k)) = \mathcal{C}_1(n, k).$$

Пусть $i > k$, $j \leq k$. Покажем, что $S_{ij}(\mathcal{C}_1(n, k))$ совпадает с семейством $\mathcal{F}$, соответствующим кругу $\mathcal{C}_1(0 \dots 0 1^i 0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_k 0 1 \dots 1)$. Пусть $A \in \mathcal{F}$, докажем, что $A \in S_{ij}(\mathcal{C}_1(n, k))$. Если $|A \cap \{1, 2, \dots, k\}| \geq k - 1$, то $A \in \mathcal{C}_1(n, k)$, и $S_{ij}(\mathcal{C}_1(n, k), A) = A$, так как либо $j \notin A$, либо $A = \{1, 2, \dots, k\}$. В противном случае

$$A = \{1, 2, \dots, j - 1, j + 1, j + 2, \dots, k, i, s\} \setminus \{t\},$$

где $s > k$, $t \leq k$, и

$$A = S_{ij}(\mathcal{C}_1(n, k), A \cup \{j\} \setminus \{i\}).$$

Поскольку

$$|S_{ij}(\mathcal{C}_1(n, k))| = |\mathcal{C}_1(n, k)|,$$

верно, что

$$S_{ij}(\mathcal{C}_1(n, k)) = \mathcal{F}.$$

Теперь предположим, что существует минимальное по двусторонней тени семейство $\mathcal{F}$, $|\mathcal{F}| = 1 + k(n - k)$, и $\mathcal{F}$ не изоморфно $\mathcal{C}_1(n, k)$. Так как $\mathcal{C}_1(n, k)$ — единственный минимальный по двусторонней тени идеал $\mathcal{M}(n, k)$ мощности $|\mathcal{F}|$, существует последовательность операторов сдвига, переводящая $\mathcal{F}$ в $\mathcal{C}_1(n, k)$. На одном из шагов оператор сдвига переводит семейство, не изоморфное $\mathcal{C}_1(n, k)$, в семейство, изоморфное $\mathcal{C}_1(n, k)$, поэтому существует такое минимальное по двусторонней тени семейство $\mathcal{F}'$, не изоморфное $\mathcal{C}_1(n, k)$, что $S_{ij}(\mathcal{F}')$ изоморфно $\mathcal{C}_1(n, k)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $S_{ij}(\mathcal{F}') = \mathcal{C}_1(n, k)$. Так как $\mathcal{F}' \neq \mathcal{C}_1(n, k)$, существует A такое, что $\{i\} \cup A \in \mathcal{C}_1(n, k)$, а $\{j\} \cup A \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{C}_1(n, k)$. Из этого следует, что $i \leq k$, $j > k$. Таким образом, $\mathcal{F}' \setminus \mathcal{C}_1(n, k)$ состоит из элементов вида $\{j\} \cup A$, где A таково, что $\{i\} \cup A \in \mathcal{C}_1(n, k)$, то есть

$$|A \cap \{1, 2, \dots, k\}| = k - 2.$$

Если $\{j\} \cup A \in \mathcal{F}'$ для всех таких A , то $\mathcal{F}' = S_{ji}(\mathcal{C}_1(n, k))$ и изоморфно $\mathcal{C}_1(n, k)$, что противоречит выбору $\mathcal{F}'$. Поэтому существуют A_1, A_2 такие, что $\{i\} \cup A_1 \in \mathcal{F}'$, $\{j\} \cup A_2 \in \mathcal{F}'$,

$$\begin{aligned} |A_1 \cap (\{1, 2, \dots, k\} \setminus \{i, j\})| &= k - 2, \\ |A_2 \cap (\{1, 2, \dots, k\} \setminus \{i, j\})| &= k - 2. \end{aligned}$$

Но поскольку для любого такого A , что $|A \cap (\{1, 2, \dots, k\} \setminus \{i, j\})| = k - 2$ ровно один из элементов $\{i\} \cup A$, $\{j\} \cup A$ входит в $\mathcal{F}'$, то можно выбрать A_1 и A_2 так, что

$$|A_1 \cap A_2| = k - 2.$$

Заметим, что $A_1 \setminus A_2 = \{m\}$, и в случае $m \in \{1, 2, \dots, k\}$ выполнено

$$\Delta(\{j\} \cup A_2) \not\subseteq \Delta S_{ij}(\mathcal{F}') = \Delta \mathcal{C}_1(n, k),$$

а в случае $m \in \{k + 1, k + 2, \dots, n\}$ выполнено

$$\nabla(\{j\} \cup A_2) \not\subseteq \nabla \mathcal{C}_1(n, k),$$

и по предложению 2

$$|\mathbb{X} \mathcal{C}_1(n, k)| = |\mathbb{X} S_{ij}(\mathcal{F}')| < |\mathbb{X} \mathcal{F}'|,$$

что противоречит минимальности $\mathcal{F}'$. Таким образом, предположение о существовании минимального по двусторонней тени $\mathcal{F}$, не изоморфного $\mathcal{C}_1(n, k)$, приводит к противоречию.

Следующее утверждение показывает, что для задачи с двусторонней тенью нельзя доказать аналог теоремы Краскала — Катоны, то есть задача минимизации двусторонней тени существенно отличается от задачи минимизации тени вниз.

Предложение 11. Если $n \geq 8$, то на $\binom{[n]}{3}$ нельзя ввести линейный порядок так, чтобы все его начальные отрезки являлись минимальными по двусторонней тени семействами.

Доказательство. Предположим, на $\binom{[n]}{3}$ существует линейный порядок с требуемым свойством. Тогда, поскольку $\mathcal{C}_1(n, 3)$ — единственное с точностью до изоморфизма минимальное семейство мощности $3n - 8$, начальный отрезок этой длины должен совпадать с $\mathcal{C}_1(n, 3)$.

Рассмотрим начальный отрезок длины $4n - 14$, обозначим его через $\mathcal{L}$. Пусть $S(\mathcal{L})$ — идеал $\mathcal{C}(n, 3)$, полученный из $\mathcal{L}$ применением оператора сдвига, тогда по свойству линейного порядка и оператора сдвига $S(\mathcal{L})$ — минимальное по двусторонней тени семейство. Заметим, что $\mathcal{C}_1(n, 3) \subseteq S(\mathcal{L})$. Оценим снизу мощность $\mathbb{X} S(\mathcal{L})$. Из того, что

$$|S(\mathcal{L}) \setminus \mathcal{C}_1(n, 3)| = n - 6,$$

и из предложения 9 следует, что

$$\sum_{A \in S(\mathcal{L}) \setminus \mathcal{C}_1(n, 3)} s(A) \geq n - 4 + n - 5 + \dots + 3 = \frac{(n - 1)(n - 6)}{2}.$$

Таким образом,

$$|\mathbb{X} S(\mathcal{L})| \geq |\mathbb{X} \mathcal{C}_1(n, 3)| + \frac{(n - 1)(n - 6)}{2}.$$

Теперь рассмотрим семейство

$$\mathcal{F} = \{A \mid 1 \in A, A \cap \{2, 3, 4, 5\} \neq \emptyset\}.$$

Очевидно, что

$$|\mathcal{F}| = n - 2 + n - 3 + n - 4 + n - 5 = 4n - 14$$

и

$$|\mathbb{X} \mathcal{F}| = |\mathbb{X} \mathcal{C}_1(n, 3)| + \frac{(n-4)(n-5)}{2} < |\mathbb{X} S(\mathcal{L})|,$$

что противоречит минимальности $S(\mathcal{L})$.

6. Оптимальные семейства малой мощности

Пусть

$$0 \leq r \leq |\mathcal{C}_1(n, k)| = 1 + k(n - k).$$

Обозначим через $\mathcal{L}_r$ начальный лексикографический отрезок $\mathcal{C}_1(n, k)$ мощности r . Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \emptyset, \\ \mathcal{L}_{r+1} &= \mathcal{L}_r \cup \{\min_{\text{lex}}\{A \in \mathcal{C}_1(n, k) \setminus \mathcal{L}_r\}\}. \end{aligned}$$

Семейства $\mathcal{L}_r$ несдвигаемы, так как $A \sqsubseteq B$ влечет $A \leq_{\text{lex}} B$. Также ясно, что семейства $\mathcal{L}_r|_m$ являются начальными лексикографическими отрезками семейства $\mathcal{C}_1(n, k)|_m$. Если $r = 1 + kp + q$, $0 \leq q < k$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r &= \{\{1, 2, \dots, k\}\} \\ &\cup \{\{1, 2, \dots, k\} \setminus \{m\} \cup \{k + i\} \mid m = 1, 2, \dots, k; i = 1, 2, \dots, p\} \\ &\cup \{\{1, 2, \dots, k\} \setminus \{m\} \cup \{k + p + 1\} \mid m = k - q + 1, k - q + 2, \dots, k\}. \end{aligned}$$

На рис. 4 изображено семейство $\mathcal{C}_1(8, 4)$ и выделены точки семейства $\mathcal{L}_{11}$.

Обозначим через $\mathcal{R}_r$, $0 \leq r \leq 1 + k(n - k)$ семейства следующего вида:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_0 &= \emptyset, \\ \mathcal{R}_{r+1} &= \mathcal{R}_r \cup \{\max_{\text{lex}}\{A \in \mathcal{C}_1(n, k) \setminus \mathcal{R}_r \mid \mathcal{R}_r \cup \{A\} \text{ — идеал}\}\}. \end{aligned}$$

Очевидно, $\mathcal{R}_r$ являются несдвигаемыми, и семейства $\mathcal{R}_r|_m$ являются конечными лексикографическими отрезками $\mathcal{C}_1(n, k)|_m$. Если $r = 1 + (n - k)p + q$, $0 \leq q < n - k$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_r &= \{\{1, 2, \dots, k\}\} \\ &\cup \{\{1, 2, \dots, k\} \setminus \{m\} \cup \{i\} \mid m = k - p + 1, k - p + 2, \dots, k; \\ &\quad i = k + 1, k + 2, \dots, n\} \\ &\cup \{\{1, 2, \dots, k\} \setminus \{k - p\} \cup \{i\} \mid i = k + 1, k + 2, \dots, k + q\}. \end{aligned}$$

На рис. 5 изображено семейство $\mathcal{C}_1(8, 4)$ и выделены точки семейства $\mathcal{R}_{11}$.

Рис. 4.

Рис. 5.

Теорема 3. Если $k \leq n/2$, то семейства $\mathcal{R}_r$ являются минимальными по двусторонней тени. Если $k \geq n/2$, то семейства $\mathcal{L}_r$ являются минимальными по двусторонней тени.

Доказательство. Доказательства для случаев $k \leq n/2$ и $k \geq n/2$ аналогичны; докажем теорему для $k \geq n/2$.

Пусть $\mathcal{F}$ — идеал $\mathcal{M}(n, k)$, и $|\mathcal{F}| = r$, $0 < r < |\mathcal{C}_1(n, k)|$.

Докажем утверждение от противного: предположим, что $|\mathbb{X} \mathcal{F}| < |\mathbb{X} \mathcal{L}_r|$. По предложению 5,

$$|\mathbb{X} \mathcal{F}| = \sum_{A \in \mathcal{F}} s(A) = \sum_{m=0}^n m |\mathcal{F}|_m < \sum_{m=0}^n m |\mathcal{L}_r|_m = |\mathbb{X} \mathcal{L}_r|,$$

поэтому существуют m_1 и m_2 такие, что $m_1 > m_2$, $|\mathcal{F}|_{m_1} < |\mathcal{L}_r|_{m_1}$ и $|\mathcal{F}|_{m_2} > |\mathcal{L}_r|_{m_2}$. Заметим, что

$$|\mathcal{F}|_{m_2} < |\mathcal{C}_1(n, k)|_{m_2},$$

иначе по предложению 9 $|\mathcal{F}|_{m_1} \geq |\mathcal{C}_1(n, k)|_{m_1} \geq |\mathcal{L}_r|_{m_1}$, что противоречит выбору m_1 . Поэтому к $|\mathcal{F}|_{m_2}$ применимо предложение 10, и, поскольку второе условие этого предложения приводит к тому же противоречию, верно, что

$$|\mathcal{F}|_{m_2+1} \geq |\mathcal{F}|_{m_2} + \max \{ |\mathcal{C}_1(n, k)|_{m_2+1} - |\mathcal{C}_1(n, k)|_{m_2}, 0 \}. \quad (*)$$

Пусть $r = 1 + pk + q$, $0 \leq q < k$. Из определения семейства $\mathcal{L}_r$ следует, что

$$|\mathcal{L}_r|_{m+1} - |\mathcal{L}_r|_m \leq \max\{|\mathcal{C}_1(n, k)|_{m+1} - |\mathcal{C}_1(n, k)|_m, 0\}$$

при всех m за исключением, быть может, одного значения m в случае $q > 0$, при котором эта разность составляет $\max\{|\mathcal{C}_1(n, k)|_{m+1} - |\mathcal{C}_1(n, k)|_m, 0\} + 1$. Отсюда и из (*) следует, что $|\mathcal{F}|_{m_2} > |\mathcal{L}_r|_{m_2}$ влечет $|\mathcal{F}|_{m_1} \geq |\mathcal{L}_r|_{m_1}$, что противоречит свойству m_1 .

Список литературы

1. Сапоженко А. А., *Проблема Дедекинда и метод граничных функционалов*. Физматлит, Москва, 2009.
2. Kruskal J., The number of simplices in a complex. In: *Mathematical Optimization Techniques*. Univ. of California Press, Berkeley, 1963, pp. 251–278.
3. Katona G. O. H., A theorem of finite sets. In: *Proc. Tihany Conf.*, 1966, pp. 187–207.
4. Mörs M., A generalization of a theorem of Kruskal. *Graphs and Combinatorics* (1985) **1**, 167–183.
5. Füredi Z., Griggs J. R., Families of finite sets with minimal shadows. *Combinatorica* (1986) **6**, 355–363.
6. Clements G. F., Lindström B., A generalization of a combinatorial theorem of Macaulay. *J. Combinatorial Theory* (1969) **7**, 230–238.
7. Безруков С. Л., Минимизация теней подмножеств полурешетки частичных отображений. *Дискретный анализ и исследование операций* (1988) **47**, 3–18.
8. Bezrukov S. L., Leck U., Macaulay posets. *Electron. J. Comb.* (2004) DS12.
9. Frankl P., Shadows and shifting. *Graphs and Combinatorics* (1991) **7**, 23–29.
10. Ahlswede R., Aydinian H., Khachatrian L. H., More about shifting techniques. *European J. Combin.* (2003) **24**, 551–556.

Статья поступила 17.11.2010.