Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Н. Демина, Решетки n -кратно Ω_1 -расслоенных τ -замкнутых формаций мультиоператорных T -групп, *Дискрет. матем.*, 2012, том 24, выпуск 1, 3–25

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1168>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 17:01:44

Решетки n -кратно Ω_1 -расслоенных τ -замкнутых формаций мультиоператорных T -групп

© 2012 г. Е. Н. Демина

В настоящей работе показано, что решетка $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$ всех n -кратно Ω_1 -расслоенных τ -замкнутых $\mathfrak{M}$ -формаций для любого $n \in \mathbf{N}_0$ с направлением φ , $\varphi_0 \leq \varphi$, является алгебраической, модулярной и полной в $\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ есть класс всех мультиоператорных T -групп, удовлетворяющих условиям минимальности и максимальности для T -подгрупп. Получено полное описание n -кратно Ω_1 -расслоенных τ -замкнутых $\mathfrak{M}$ -формаций $\mathfrak{F}$ с $l_\Theta(\mathfrak{F}) \leq 2$, где $\Theta = \tau\Omega_1 F_n^\varphi$, $n \in \mathbf{N}_0$ и $\varphi_0 \leq \varphi$. Также изучены n -кратно Ω_1 -расслоенные τ -замкнутые $\mathfrak{M}$ -формации с r -направлением φ таким, что $\varphi(A) \subseteq \mathfrak{M}_{A'}\mathfrak{M}_A$ для всех $A \in \mathfrak{S}_1$, у которых решетка всех n -кратно Ω_1 -расслоенных τ -замкнутых $\mathfrak{M}$ -подформаций с направлением φ является булевой.

1. Введение

Характерной чертой в общей теории алгебраических систем является рассмотрение их классов, в частности формаций алгебраических систем. Класс алгебраических систем называется формацией, если он замкнут относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений или, коротко, $\{Q, R_0\}$ -замкнут [1]. Методы общей теории формаций используются для изучения групп, колец, модулей, причем в изучении формаций этих алгебр имеется некоторый параллелизм. Исходя из этого, целесообразным является рассмотрение их свойств с единых позиций. Такой единый подход можно осуществить, рассматривая формации мультиоператорных T -групп с конечными композиционными рядами. Напомним, что аддитивная группа G с нулевым элементом 0 называется мультиоператорной T -группой с системой мультиоператоров T (или, коротко, T -группой), если в G задана еще некоторая система n -арных алгебраических операций T при некоторых n , удовлетворяющих условию $n > 0$, причем для всех $t \in T$ выполняется условие $t(0, \dots, 0) = 0$, где слева элемент 0 стоит n раз, если операция t n -арна (см. [2]; [3], гл. III; [4], гл. VI, с. 356).

Одним из основных подходов к изучению формаций является исследование свойств решетки их подформаций. Для любых двух формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ полагают

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_1 \wedge \mathfrak{F}_2 &= \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2, \\ \mathfrak{F}_1 \vee \mathfrak{F}_2 &= \text{form}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2).\end{aligned}$$

Всякое множество формаций, замкнутое относительно операций $\wedge$ и $\vee$, является решеткой (см. [1]). Изучению тех или иных свойств решеток формаций посвящено большое число работ. В частности, многие исследования проведены в классе $\mathfrak{E}$ всех конечных групп.

Так, А. Н. Скиба в [5–6] установил алгебраичность решеток всех формаций конечных групп, всех n -кратно локальных формаций конечных групп. В [1] Л. А. Шеметков и А. Н. Скиба получили результаты о модулярности решеток всех формаций конечных групп, всех n -кратно локальных формаций конечных групп. В [7] В. Г. Сафонов доказал модулярность решетки всех totally насыщенных формаций конечных групп. Формации мальцевских алгебр с системами дополняемых подформаций исследовались в [8]. Другие результаты относительно решеток формаций содержатся в [9–15].

Класс $\mathfrak{C}$ всех мультиоператорных T -групп с конечными композиционными рядами является формацией, но не является многообразием, хотя обратное в общем случае верно. Объединением понятий S -замкнутости и S_n -замкнутости формаций является τ -замкнутость, где τ -подгрупповой функтор (в терминологии работы [5]). Пусть A, B — $\mathfrak{C}$ -группы, $\psi: A \rightarrow B$ — эпиморфизм, и пусть Ξ и Σ — некоторые системы T -подгрупп в A и B соответственно. Тогда через Ξ^ψ обозначается множество $\{H^\psi \mid H \in \Xi\}$, а через $\Sigma^{\psi^{-1}}$ — множество $\{H^{\psi^{-1}} \mid H \in \Sigma\}$ всех полных прообразов в A всех T -групп из Σ (см. [5]).

Пусть $\mathfrak{X}$ есть произвольный непустой класс T -групп и всякой T -группе $G \in \mathfrak{X}$ сопоставлена некоторая система ее T -подгрупп $\tau(G)$. Следуя [5], будем говорить, что τ есть подгрупповой $\mathfrak{X}$ -функтор, если выполняются следующие условия:

- (1) $G \in \tau(G)$ для любой T -группы $G \in \mathfrak{X}$;
- (2) для любого эпиморфизма $\psi: A \rightarrow B$, где $A, B \in \mathfrak{X}$, и любых T -групп $H \in \tau(A)$ и $K \in \tau(B)$ справедливы включения $H^\psi \in \tau(B)$ и $K^{\psi^{-1}} \in \tau(A)$.

Пример 1. Пусть $\mathfrak{X}$ есть произвольный непустой класс T -групп. Подгрупповой $\mathfrak{X}$ -функтор назовем тривиальным, если $\tau(G) = \{G\}$ для любой T -группы $G \in \mathfrak{X}$ (см. [5]).

Пример 2. Пусть $\mathfrak{X}$ есть произвольный непустой класс T -групп и τ — отображение, которое каждой T -группе $G \in \mathfrak{X}$ ставит в соответствие множество всех идеалов T -группы G . Тогда τ является подгрупповым $\mathfrak{X}$ -функтором, который, следуя [16], назовем нормальным подгрупповым $\mathfrak{X}$ -функтором.

Формация T -групп $\mathfrak{F}$ называется τ -замкнутой, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой T -группы $G \in \mathfrak{F}$. Результаты исследования τ -замкнутых формаций конечных групп и их решеток содержатся в работах [17–23]. Например, свойства решеток всех τ -замкнутых totally насыщенных формаций и всех τ -замкнутых totally канонических формаций конечных групп описаны В. Г. Сафоновым и В. Е. Егоровой в [20–21] и [22] соответственно. В [23] Н. Н. Воробьевым, А. А. Царевым и в [19] П. А. Жизневским изучены свойства решетки всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций конечных групп.

В работах [11–13] и [24] разработана теория Ω -расслоенных формаций и их решеток в классе $\mathfrak{C}$. Однако класс $\mathfrak{C}$ всех мультиоператорных T -групп с конечными композиционными рядами в общем случае не является τ -замкнутой формацией. Примером $\mathfrak{C}$ -группы G такой, что $\tau(G) \not\subseteq \mathfrak{C}$ для любого подгруппового $\mathfrak{C}$ -функтора τ такого, что $\tau(G) \not\subseteq \{G, \{0\}\}$, является простая группа А. Ю. Ольшанского с бесконечными циклическими собственными подгруппами ([25], теорема 28.3).

Исходя из вышесказанного, будем рассматривать такой подкласс $\mathfrak{M}$ класса $\mathfrak{C}$, который является классом T -групп одного из следующих видов: классом всех конечных мультиоператорных T -групп или классом всех мультиоператорных T -групп, удовлетворяющих условиям минимальности и максимальности для T -подгрупп. Отметим, что класс $\mathfrak{M}$ является τ -замкнутой $\mathfrak{C}$ -формацией для любого подгруппового $\mathfrak{M}$ -функтора τ .

Еще одним способом изучения решеток формаций алгебраических систем является рассмотрение длины формаций. Это понятие было введено А. Н. Скибой в [6]; сформулируем его для мультиоператорных T -групп. Пусть Θ есть полная модулярная решетка формаций мультиоператорных T -групп, 0_Θ — нуль решетки Θ . Будем говорить, что Θ -формация $\mathfrak{F} \neq 0_\Theta$ имеет Θ -длину n и обозначать ее $l_\Theta(\mathfrak{F}) = n$, если существует такая совокупность Θ -формаций $\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_n$, что $\mathfrak{F}_0 = 0_\Theta$, $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}_{i-1}$ — максимальная Θ -подформация Θ -формации $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, \dots, n$. В [6] изучены локальные формации конечных групп l -длины 5. Ω -расслоенные формации конечных групп длины 3 исследовались в [26–27], а в [28] — формации конечных групп с дополняемыми подформациями длины 3.

В настоящей работе показано, что решетка $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$ всех n -кратно Ω_1 -расслоенных τ -замкнутых $\mathfrak{M}$ -формаций для любого $n \in \mathbb{N}_0$ с направлением φ , $\varphi_0 \leq \varphi$, является алгебраической, модулярной и полной в $\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ есть класс всех мультиоператорных T -групп, удовлетворяющих условиям минимальности и максимальности для T -подгрупп. Получено полное описание n -кратно Ω_1 -расслоенных τ -замкнутых $\mathfrak{M}$ -формаций $\mathfrak{F}$ с $l_\Theta(\mathfrak{F}) \leq 2$, где $\Theta = \tau\Omega_1 F_n^\varphi$, $n \in \mathbb{N}_0$ и $\varphi_0 \leq \varphi$. Также изучены n -кратно Ω_1 -расслоенные τ -замкнутые $\mathfrak{M}$ -формации с r -направлением φ таким, что $\varphi(A) \subseteq \mathfrak{M}_{A'}\mathfrak{M}_A$ для всех $A \in \mathfrak{Z}_1$, у которых решетка всех n -кратно Ω_1 -расслоенных τ -замкнутых $\mathfrak{M}$ -подформаций с направлением φ является булевой.

2. Необходимые обозначения и определения

По аналогии с тем, как в классе $\mathfrak{E}$ всех мультиоператорных T -групп с конечными композиционными рядами была построена теория Ω -расслоенных $\mathfrak{E}$ -формаций (см. [11]), введем обозначения для определения Ω_1 -расслоенных формаций в классе $\mathfrak{M}$.

Пусть $\mathfrak{M}$ есть класс всех мультиоператорных T -групп, удовлетворяющих условиям минимальности и максимальности для T -подгрупп. В дальнейшем будем предполагать, что все рассматриваемые T -группы принадлежат классу $\mathfrak{M}$. Пусть $\mathfrak{Z}_1$ есть класс всех простых $\mathfrak{M}$ -групп, то есть таких ненулевых $\mathfrak{M}$ -групп P , идеалами которых являются лишь нулевой идеал $\{0\}$ и сама $\mathfrak{M}$ -группа P . Пусть Ω_1 есть непустой подкласс класса $\mathfrak{Z}_1$, $\Omega'_1 = \mathfrak{Z}_1 \setminus \Omega_1$ и $\mathfrak{K}(G)$ есть класс всех простых $\mathfrak{M}$ -групп, изоморфных композиционным факторам $\mathfrak{M}$ -группы G . Если $\mathfrak{K}(G) \subseteq \Omega_1$, то G называется Ω_1 -группой. Обозначим через $\mathfrak{M}_{\Omega_1}$ класс всех Ω_1 -групп, принадлежащих $\mathfrak{M}$, $\{0\} \in \mathfrak{M}_{\Omega_1}$. Положим

$$O_{\Omega_1}(G) = G_{\mathfrak{M}_{\Omega_1}}, \quad O_{\Omega'_1, \Omega_1}(G) = G_{\mathfrak{M}_{\Omega'_1} \mathfrak{M}_{\Omega_1}}.$$

Пусть $\mathfrak{X}$ есть непустое множество T -групп. T -группа, принадлежащая $\mathfrak{X}$, называется $\mathfrak{X}$ -группой; $(\mathfrak{X})$ обозначает класс T -групп, порожденный $\mathfrak{X}$; в частности, (G) есть класс всех T -групп, изоморфных T -группе G . Запись $M \triangleleft G$ означает, что M является идеалом T -группы G .

Следуя [29, 30], приведем необходимые для дальнейшего определения и обозначения. Все рассматриваемые функции принимают одинаковые значения на изоморфных T -группах из их области определения. Функция $f: \Omega_1 \cup \{\Omega'_1\} \rightarrow \{\text{формации } T\text{-групп}\}$ называется $\Omega_1 F$ -функцией; функция $\varphi: \mathfrak{Z}_1 \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга } T\text{-групп}\}$ называется FR -функцией. Формация

$$\Omega_1 F(f, \varphi) = (G \in \mathfrak{M}: G/O_{\Omega_1}(G) \in f(\Omega'_1), G/G_{\varphi(A)} \in f(A) \text{ для всех } A \in \Omega_1 \cap \mathfrak{K}(G))$$

называется Ω_1 -расслоенной формацией T -групп с Ω_1 -спутником f и направлением φ или, коротко, $\Omega_1 F$ -формацией. Формация $\Omega_1 F(f, \varphi)$ называется Ω_1 -свободной или, коротко, $\Omega_1 Fr$ -формацией, если $\varphi(A) = \mathfrak{M}_{A'}$ для любого $A \in \mathfrak{Z}_1$ (обозначим направление

Ω_1 -свободной формации через φ_0); Ω_1 -канонической, или, коротко, $\Omega_1 K$ -формацией, если $\varphi(A) = \mathfrak{M}_{A'} \mathfrak{M}_A$ для любого $A \in \mathfrak{S}_1$; Ω_1 -биканонической, или, коротко, $\Omega_1 B$ -формацией, если $\varphi(A) = \mathfrak{M}_{A'}$ для любой неабелевой T -группы $A \in \mathfrak{S}_1$ и $\varphi(A) = \mathfrak{M}_{A'} \mathfrak{M}_A$ для любой абелевой T -группы $A \in \mathfrak{S}_1$. Направление φ расслоенной формации, удовлетворяющее равенству $\mathfrak{M}_{A'} \varphi(A) = \varphi(A)$ для любого $A \in \mathfrak{S}_1$, называется правильным, или, коротко, r -направлением.

Будем называть $\Omega_1 F$ -функцию τ -замкнутой или, коротко, $\tau \Omega_1 F$ -функцией, если все ее значения являются τ -замкнутыми $\mathfrak{M}$ -формациями. Обозначим Ω_1 -расслоенную τ -замкнутую $\mathfrak{M}$ -формацию как $\tau \Omega_1$ -расслоенную $\mathfrak{M}$ -формацию.

Всякая τ -замкнутая $\mathfrak{M}$ -формация считается 0-кратно $\tau \Omega_1$ -расслоенной с произвольным направлением φ . При $n \geq 1$ пусть $\tau \Omega_1 F_n^\varphi$ есть множество всех n -кратно $\tau \Omega_1$ -расслоенных $\mathfrak{M}$ -формаций с направлением φ , обладающих хотя бы одним $\tau \Omega_1 F_{n-1}^\varphi$ -спутником. Через $\tau \Omega_1 K_n$, $\tau \Omega_1 B_n$ и $\tau \Omega_1 Fr_n$ обозначаются соответственно множества всех n -кратно $\tau \Omega_1$ -канонических, n -кратно $\tau \Omega_1$ -биканонических и n -кратно $\tau \Omega_1$ -свободных $\mathfrak{M}$ -формаций.

Пусть $\mathcal{X}$ есть произвольная непустая совокупность $\mathfrak{M}$ -групп. Пересечение всех τ -замкнутых $\mathfrak{M}$ -формаций, содержащих $\mathcal{X}$, обозначим через $\tau \text{form } \mathcal{X}$ — τ -замкнутую $\mathfrak{M}$ -формацию, порожденную множеством $\mathcal{X}$, а через $\tau \Omega_1 F_n(\mathcal{X}, \varphi)$ — пересечение всех $\tau \Omega_1 F_n^\varphi$ -формаций, содержащих $\mathcal{X}$.

Сформулируем некоторые известные результаты теории Ω -расслоенных $\mathfrak{S}$ -формаций для класса $\mathfrak{M}$ в соответствии с принятыми обозначениями.

Лемма 1 ([11], лемма 8). Пусть φ есть произвольная FR -функция,

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i, \quad \mathfrak{F}_i = \Omega_1 F(f_i, \varphi), \quad i \in I.$$

Тогда

$$\mathfrak{F} = \Omega_1 F(f, \varphi),$$

где

$$f = \bigcap_{i \in I} f_i$$

и

$$f(A) = \bigcap_{i \in I} f_i(A)$$

для любого $A \in \Omega_1 \cup \{\Omega_1'\}$.

Лемма 2 ([11], теорема 4). $\Omega_1 F_n^\varphi$ является полной решеткой в $\mathfrak{M}$ для любого $n \in \mathbf{N}_0$ и любого направления φ .

Лемма 3 ([11], теорема 4). $\Omega_1 F_n^\varphi$ является модулярной решеткой для любого $n \in \mathbf{N}_0$ и любого направления φ , $\varphi_0 \leq \varphi$.

3. Полнота, модулярность и алгебраичность решетки n -кратно Ω_1 -расслоенных τ -замкнутых $\mathfrak{M}$ -формаций

Определение 1. Каждая непустая $\mathfrak{M}$ -формация $\mathfrak{F}$ содержит подформации $\emptyset$, (0) и $\mathfrak{F}$, которые будем называть тривиальными подформациями $\mathfrak{M}$ -формации $\mathfrak{F}$.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{L}$ есть непустая подформация в $\mathfrak{C}$, Θ есть непустое множество $\mathfrak{L}$ -формаций, $\emptyset$ и (0) являются соответственно пустой и нулевой формациями T -групп. Множество Θ называется полной решеткой формаций в $\mathfrak{L}$, если $\{\emptyset, (0), \mathfrak{L}\} \subseteq \Theta$ и пересечение любой совокупности Θ -формаций принадлежит Θ . Если $\mathfrak{L} = \mathfrak{C}$, то полную решетку Θ в $\mathfrak{C}$ будем коротко называть полной решеткой (см. [11]).

Теорема 1. Решетка $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$ является полной в $\mathfrak{M}$ для любого $n \in \mathbf{N}_0$ и любого направления φ .

Доказательство. Доказательство будем вести индукцией по n . Пусть $n = 0$, тогда $\tau\Omega_1 F_0^\varphi$ есть множество всех τ -замкнутых $\mathfrak{M}$ -формаций, каждая из которых является 0-кратно $\tau\Omega_1$ -расслоенной с произвольным направлением φ . Пересечение любой совокупности $\mathfrak{M}$ -формаций является $\mathfrak{M}$ -формацией, и пересечение τ -замкнутых формаций является τ -замкнутой формацией. Поэтому пересечение любой совокупности τ -замкнутых $\mathfrak{M}$ -формаций является τ -замкнутой $\mathfrak{M}$ -формацией. Пустая формация $\emptyset$ и нулевая формация (0) являются τ -замкнутыми $\mathfrak{M}$ -формациями. Кроме того, $\mathfrak{M}$ есть τ -замкнутая подформация в $\mathfrak{C}$. Таким образом, в случае $n = 0$ теорема верна.

Пусть $n > 0$. Предположим, что $\tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi$ есть полная решетка в $\mathfrak{M}$. Пусть

$$\mathfrak{F}_i = \tau\Omega_1 F(f_i, \varphi) \in \tau\Omega_1 F_n^\varphi, \quad i \in I,$$

причем $f_i(A) \in \tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi$ для любой $A \in \Omega_1 \cup \{\Omega'_1\}$ и

$$\mathfrak{F} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i.$$

Тогда по предположению индукции

$$f(A) = \bigcap_{i \in I} f_i(A) \in \tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi.$$

По лемме 1, $\mathfrak{F} = \tau\Omega_1 F(f, \varphi)$, и, по определению, $\mathfrak{F} \in \tau\Omega_1 F_n^\varphi$. Таким образом, пересечение любой совокупности $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$ -формаций есть $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$ -формация для любого $n \in \mathbf{N}$. По лемме 2, $\{\emptyset, (0), \mathfrak{M}\} \subseteq \Omega_1 F_n^\varphi$. Пустая формация $\emptyset$ и нулевая формация (0) T -групп являются τ -замкнутыми $\mathfrak{M}$ -формациями, кроме того $\mathfrak{M}$ есть некоторая τ -замкнутая подформация в $\mathfrak{C}$. Следовательно, $\{\emptyset, (0), \mathfrak{M}\} \subseteq \tau\Omega_1 F_n^\varphi$.

Таким образом, $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$ есть полная решетка в $\mathfrak{M}$ для любого $n \in \mathbf{N}_0$ и любого направления φ .

Теорема доказана.

Лемма 4. Пусть $\mathfrak{X}$ есть непустой класс $\mathfrak{M}$ -групп. Тогда n -кратно $\tau\Omega_1$ -расслоенная $\mathfrak{M}$ -формация $\mathfrak{F} = \tau\Omega_1 F_n(\mathfrak{X}, \varphi)$, где $n \in \mathbf{N}$ и $\varphi_0 \leq \varphi$, обладает единственным минимальным $\tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi$ -спутником f таким, что

$$\begin{aligned} f(\Omega'_1) &= \tau\Omega_1 F_{n-1}((G/O_{\Omega_1}(G): G \in \mathfrak{X}), \varphi), \\ f(A) &= \tau\Omega_1 F_{n-1}((G/G_{\varphi(A)}: G \in \mathfrak{X}), \varphi) \end{aligned}$$

для всех $A \in \Omega_1 \cap \mathfrak{R}(\mathfrak{X})$ и $f(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega_1 \setminus \mathfrak{R}(\mathfrak{X})$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}$ есть непустой класс T -групп, φ — такая FR -функция, что $\varphi_0 \leq \varphi$.

Пусть $\mathfrak{K}(\mathcal{X}) = \emptyset$. Тогда $\mathcal{X} = (0)$ есть класс всех нулевых T -групп, $\mathfrak{F} = \tau\Omega_1 F_n((0), \varphi)$, и $\mathfrak{F} = (0)$ в силу теоремы 1. Как нетрудно показать, $\mathfrak{M}$ -формация $\mathfrak{F} = (0)$ обладает единственным минимальным $\Omega_1 F_{n-1}^\varphi$ -спутником m таким, что $m(\Omega') = (0) = \Omega_1 F_{n-1}^\varphi(\{0\}/O_{\Omega_1}(\{0\}))$, $m(A) = \emptyset$ для всех $A \in \Omega_1$. Так как нулевая формация (0) и пустая формация $\emptyset$ являются τ -замкнутыми, все значения спутника m являются τ -замкнутыми $\mathfrak{M}$ -формациями.

Пусть $\mathfrak{K}(\mathcal{X}) \neq \emptyset$. По теореме 1, решетка $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$ является полной в $\mathfrak{M}$, значит, $\mathfrak{M} \in \tau\Omega_1 F_n^\varphi$. Кроме того, $\mathcal{X} \subseteq \mathfrak{M}$, и значит, $\mathfrak{F} = \tau\Omega_1 F_n(\mathcal{X}, \varphi)$ существует, и множество L всех $\tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi$ -спутников $\mathfrak{F}$ непусто.

Обозначим через f_1 пересечение всех элементов из L . Тогда по лемме 1 с учетом того, что пересечение τ -замкнутых формаций является τ -замкнутой формацией, $\mathfrak{F} = \tau\Omega_1 F(f_1, \varphi)$. Так как $\tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi$ по теореме 1 является полной решеткой в $\mathfrak{M}$, f_1 является $\tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi$ -спутником τ -замкнутой $\mathfrak{M}$ -формации $\mathfrak{F}$. Следовательно, $f_1 \in L$. Кроме того, $f_1 \leq h$ для любого элемента $h \in L$. Тем самым установлено, что f_1 есть единственный минимальный $\tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi$ -спутник τ -замкнутой $\mathfrak{M}$ -формации $\mathfrak{F}$.

Пусть f есть $\tau\Omega_1 F$ -функция, описанная в доказываемой лемме. Покажем, что $f = f_1$. Пусть $M \in \mathcal{X}$. Тогда $M/O_{\Omega_1}(M) \in f(\Omega'_1)$ и из включения $\mathfrak{K}(M) \subseteq \mathfrak{K}(\mathcal{X})$ следует, что $M/M_{\varphi(A)} \in f(A)$ при $A \in \Omega_1 \cap \mathfrak{K}(M)$. Если $\mathfrak{S} = \tau\Omega_1 F(f, \varphi)$, то $M \in \mathfrak{S}$ и $\mathcal{X} \subseteq \mathfrak{S}$. Поскольку все значения f являются $(n-1)$ -кратно $\tau\Omega_1$ -расслоенными $\mathfrak{M}$ -формациями с направлением φ , то $\mathfrak{S} \in \tau\Omega_1 F_n^\varphi$ и, значит,

$$\mathfrak{F} = \tau\Omega_1 F_n(\mathcal{X}, \varphi) \subseteq \mathfrak{S}.$$

Покажем, что $f \leq f_1$. Пусть $A \in \Omega_1 \cap \mathfrak{K}(\mathcal{X})$. Тогда найдется такая T -группа $H \in \mathcal{X}$, что $A \in \Omega_1 \cap \mathfrak{K}(H)$. Из равенства $\mathfrak{F} = \tau\Omega_1 F(f_1, \varphi)$ следует, что $H/H_{\varphi(A)} \in f_1(A)$. Поэтому $f_1(A) \neq \emptyset$. Пусть $G \in \mathcal{X}$. Если $A \in \Omega_1 \cap \mathfrak{K}(G)$, то из включения $G \in \mathfrak{F} = \tau\Omega_1 F(f_1, \varphi)$ получаем, что $G/G_{\varphi(A)} \in f_1(A)$. Пусть теперь $A \in (\Omega_1 \cap \mathfrak{K}(\mathcal{X})) \setminus (\Omega_1 \cap \mathfrak{K}(G))$. Тогда $G \in \mathfrak{M}_{A'} = \varphi_0(A) \subseteq \varphi(A)$ и, значит, $G/G_{\varphi(A)} \cong \{0\} \in f_1(A)$. Так как f_1 является $\tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi$ -спутником формации $\mathfrak{F}$ и $\mathcal{X} \subseteq \mathfrak{F}$, получаем, что

$$f(A) = \tau\Omega_1 F_{n-1}((G/G_{\varphi(A)}: G \in \mathcal{X}), \varphi) \subseteq f_1(A)$$

и

$$f(\Omega'_1) = \tau\Omega_1 F_{n-1}((G/O_{\Omega_1}(G): G \in \mathcal{X}), \varphi) \subseteq f_1(\Omega'_1).$$

Если $A \in \Omega_1 \setminus \mathfrak{K}(\mathcal{X})$, то $f(A) = \emptyset \subseteq f_1(A)$. Следовательно, $f \leq f_1$. Тогда

$$\mathfrak{S} = \tau\Omega_1 F(f, \varphi) \subseteq \tau\Omega_1 F(f_1, \varphi) = \mathfrak{F}.$$

Из $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$ следует, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}$. Поэтому $\mathfrak{F} = \tau\Omega_1 F(f, \varphi)$ и, значит, $f \in L$. Так как f_1 есть минимальный элемент в L , из $f \leq f_1$ следует, что $f = f_1$. Лемма доказана.

Следствие 1. Пусть f_i есть минимальный $\tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi$ -спутник n -кратно $\tau\Omega_1$ -расслоенной $\mathfrak{M}$ -формации $\mathfrak{F}_i$ с направлением φ , где $n \in \mathbb{N}$ и $\varphi_0 \leq \varphi$, $i = 1, 2$. Включение $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ выполняется тогда и только тогда, когда $f_1 \leq f_2$.

Для произвольной совокупности τ -замкнутых $\mathfrak{M}$ -формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ положим

$$\vee^\tau(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \tau \operatorname{form} \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right).$$

Если $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ есть множество n -кратно $\tau\Omega_1$ -расслоенных $\mathfrak{M}$ -формаций, то будем писать

$$\vee_{\Omega_1 F_n^\varphi}^\tau(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \tau\Omega_1 F_n^\varphi \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right).$$

Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — система $\tau\Omega_1 F_n$ -функций, то есть таких $\tau\Omega_1 F$ -функций, у которых каждое значение является n -кратно $\tau\Omega_1$ -расслоенной $\mathfrak{M}$ -формацией. Тогда через $\vee_{\Omega_1 F_n^\varphi}^\tau(f_i \mid i \in I)$ обозначим такую $\tau\Omega_1 F_n$ -функцию, что

$$\vee_{\Omega_1 F_n^\varphi}^\tau(f_i \mid i \in I)(A) = \vee_{\Omega_1 F_n^\varphi}^\tau(f_i(A) \mid i \in I)$$

для любой $A \in \Omega_1 \cup \{\Omega'_1\}$.

Лемма 5. Пусть f_i есть минимальный $\tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi$ -спутник n -кратно $\tau\Omega_1$ -расслоенной $\mathfrak{M}$ -формации $\mathfrak{F}_i$ с направлением φ , где $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_0 \leq \varphi$ и $i \in I$. Тогда $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$ -формация $\mathfrak{F} = \vee_{\Omega_1 F_n^\varphi}^\tau(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$ обладает минимальным $\tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi$ -спутником f таким, что

$$f(A) = \vee_{\Omega_1 F_{n-1}^\varphi}^\tau(f_i \mid i \in I)(A) = \vee_{\Omega_1 F_{n-1}^\varphi}^\tau(f_i(A) \mid i \in I)$$

для всех $A \in \Omega_1 \cup \{\Omega'_1\}$.

Доказательство. Пусть m есть минимальный $\tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi$ -спутник $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$ -формации $\mathfrak{F}$. Покажем, что $m = f$. По лемме 4, при

$$\mathfrak{X} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i$$

справедливо равенство

$$\begin{aligned} m(\Omega'_1) &= \tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi \left(G/O_{\Omega_1}(G) : G \in \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) \\ &= \tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi \left(\bigcup_{i \in I} \tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi(G/O_{\Omega_1}(G) : G \in \mathfrak{F}_i) \right) \\ &= \tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi \left(\bigcup_{i \in I} f_i(\Omega'_1) \right) = \vee_{\Omega_1 F_{n-1}^\varphi}^\tau(f_i(\Omega'_1) \mid i \in I) = f(\Omega'_1), \\ m(A) &= \tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi \left(G/G_{\varphi(A)} : G \in \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) \\ &= \tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi \left(\bigcup_{i \in I} \tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi(G/G_{\varphi(A)} : G \in \mathfrak{F}_i) \right) \\ &= \tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi \left(\bigcup_{i \in I} f_i(A) \right) = \vee_{\Omega_1 F_{n-1}^\varphi}^\tau(f_i(A) \mid i \in I) = f(A) \end{aligned}$$

для всех $A \in \Omega_1 \cap \mathfrak{K}(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i)$ и $m(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega_1 \setminus \mathfrak{K}(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i)$, но для таких A , по лемме 4, $f_i(A) = \emptyset$ для любого $i \in I$. Поэтому

$$f(A) = \vee_{\Omega_1 F_{n-1}^\varphi}^\tau(f_i(A) \mid i \in I) = \emptyset = m(A).$$

Следовательно, $f(A) = m(A)$ для всех $A \in \Omega_1 \cap \{\Omega'_1\}$ и значит, $f = m$.

Лемма доказана.

Лемма 6. Для любого τ -замкнутого класса T -групп $\mathfrak{X}$ имеет место равенство

$$\tau \text{ form } \mathfrak{X} = \text{form } \mathfrak{X}.$$

Доказательство. Покажем, что формация $\text{form } \mathfrak{X}$ τ -замкнута. Согласно лемме 3.2 в [1],

$$\text{form } \mathfrak{X} = QR_0(\mathfrak{X}).$$

Пусть $G \in R_0(\mathfrak{X})$ и $H \in \tau(G)$. Покажем, что $H \in R_0(\mathfrak{X})$. Предположим теперь, что $G \in \mathfrak{X}$. По условию, класс T -групп $\mathfrak{X}$ τ -замкнут, поэтому $H \in \mathfrak{X} \subseteq R_0(\mathfrak{X})$.

Пусть $G \notin \mathfrak{X}$. По определению класса $R_0(\mathfrak{X})$ в G найдутся такие идеалы $N_1, \dots, N_t$, что $N_1 \cap \dots \cap N_t = \{0\}$ и $G/N_i \in \mathfrak{X}$, $i = 1, \dots, t$. Поскольку

$$H/H \cap N_i \cong H + N_i/N_i \in \tau(G/N_i)$$

и класс T -групп $\mathfrak{X}$ τ -замкнут, мы видим, что $\tau(G/N_i) \subseteq \mathfrak{X}$ для любого $i = 1, \dots, t$. Следовательно, $H/H \cap N_i \in \mathfrak{X}$, $i = 1, \dots, t$. Так как $(H \cap N_1) \cap \dots \cap (H \cap N_t) = \{0\}$, справедливо включение $H \in R_0(\mathfrak{X})$.

Пусть теперь $G \in QR_0(\mathfrak{X})$ и $H \in \tau(G)$. Покажем, что $H \in QR_0(\mathfrak{X})$. Так как $G \in QR_0(\mathfrak{X})$, выполняется соотношение $G \cong G_1/N$, где $N \triangleleft G_1$ и $G_1 \in R_0(\mathfrak{X})$. Рассмотрим эпиморфизм $\psi: G_1 \rightarrow G$. Тогда $K = H^{\psi^{-1}} \in \tau(G_1) \subseteq R_0(\mathfrak{X})$ по доказанному ранее. Значит, $H \in Q(K) \subseteq QR_0(\mathfrak{X})$.

Таким образом, формация $QR_0(\mathfrak{X}) = \text{form } \mathfrak{X}$ τ -замкнута.

Лемма доказана.

Следствие 2. Для любой совокупности τ -замкнутых $\mathfrak{M}$ -формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ имеет место равенство

$$\tau \text{ form } \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) = \text{form } \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right).$$

Доказательство. Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ есть множество τ -замкнутых $\mathfrak{M}$ -формаций, тогда $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ есть τ -замкнутый класс T -групп. Отсюда, полагая

$$\mathfrak{X} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i,$$

с использованием леммы 6 приходим к желаемому равенству.

Лемма 7. Для произвольной совокупности n -кратно $\tau\Omega_1$ -расслоенных $\mathfrak{M}$ -формаций $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$, с направлением φ , где $n \in \mathbb{N}_0$ и $\varphi_0 \leq \varphi$, имеет место равенство

$$\tau\Omega_1 F_n^\varphi \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) = \Omega_1 F_n^\varphi \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right).$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по n . Введем обозначение

$$\mathfrak{F} = \tau\Omega_1 F_n^\varphi \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right).$$

Пусть $n = 0$, тогда

$$\mathfrak{F} = \tau \operatorname{form} \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right),$$

где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ есть множество τ -замкнутых $\mathfrak{M}$ -формаций. Отсюда, по следствию 2,

$$\mathfrak{F} = \operatorname{form} \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right).$$

Таким образом, в случае $n = 0$ лемма верна.

Пусть $n = 1$, тогда

$$\mathfrak{F} = \tau \Omega_1 F_1^\varphi \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right),$$

где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ есть набор $\tau \Omega_1$ -расслоенных $\mathfrak{M}$ -формаций с направлением φ , $\varphi_0 \leq \varphi$. По лемме 4, при

$$\mathfrak{X} = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i$$

формация $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным τ -замкнутым $\mathfrak{M}$ -спутником f таким, что

$$\begin{aligned} f(\Omega'_1) &= \tau \operatorname{form} \left(G/O_{\Omega_1}(G) : G \in \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) \\ &= \tau \operatorname{form} \left(\bigcup_{i \in I} \tau \operatorname{form}(G/O_{\Omega_1}(G) : G \in \mathfrak{F}_i) \right), \\ f(A) &= \tau \operatorname{form} \left(G/G_{\varphi(A)} : G \in \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) \\ &= \tau \operatorname{form} \left(\bigcup_{i \in I} \tau \operatorname{form}(G/G_{\varphi(A)} : G \in \mathfrak{F}_i) \right) \end{aligned}$$

для всех $A \in \Omega_1 \cap \mathfrak{K} \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right)$ и $f(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega_1 \setminus \mathfrak{K} \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right)$. Тогда, согласно следствию 2,

$$\begin{aligned} f(\Omega'_1) &= \operatorname{form} \left(\bigcup_{i \in I} \tau \operatorname{form}(G/O_{\Omega_1}(G) : G \in \mathfrak{F}_i) \right) \\ &= \operatorname{form} \left(G/O_{\Omega_1}(G) : G \in \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right), \\ f(A) &= \operatorname{form} \left(\bigcup_{i \in I} \tau \operatorname{form}(G/G_{\varphi(A)} : G \in \mathfrak{F}_i) \right) \\ &= \operatorname{form} \left(G/G_{\varphi(A)} : G \in \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) \end{aligned}$$

для всех $A \in \Omega_1 \cap \mathfrak{K} \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right)$ и $f(A) = \emptyset$, если $A \in \Omega_1 \setminus \mathfrak{K} \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right)$. Следовательно, по определению,

$$\mathfrak{F} = \Omega_1 F_1^\varphi \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right).$$

Пусть $n > 1$. Предположим, что утверждение верно для $n - 1$. Тогда, как для случая $n = 1$, указанное в формулировке леммы равенство доказывается для n .

Лемма доказана.

Теорема 2. Решетка $\tau \Omega_1 F_n^\varphi$ является модулярной для любого $n \in \mathbf{N}_0$ и любого направления φ , $\varphi_0 \leq \varphi$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_i \in \tau \Omega_1 F_n^\varphi$, $i = 1, 2, 3$, причем $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_1$. Покажем, что

$$\mathfrak{F}_1 \cap (\mathfrak{F}_2 \vee_{\Omega_1 F_n^\varphi}^{\tau} \mathfrak{F}_3) = \mathfrak{F}_2 \vee_{\Omega_1 F_n^\varphi}^{\tau} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_3).$$

Действительно, применяя леммы 3 и 7, получим, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_1 \cap (\mathfrak{F}_2 \vee_{\Omega_1 F_n^\varphi}^{\tau} \mathfrak{F}_3) &= \mathfrak{F}_1 \cap \tau \Omega_1 F_n^\varphi (\mathfrak{F}_2 \cup \mathfrak{F}_3) \\ &= \mathfrak{F}_1 \cap \Omega_1 F_n^\varphi (\mathfrak{F}_2 \cup \mathfrak{F}_3) \\ &= \Omega_1 F_n^\varphi (\mathfrak{F}_2 \cup (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_3)) \\ &= \tau \Omega_1 F_n^\varphi (\mathfrak{F}_2 \cup (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_3)) \\ &= \mathfrak{F}_2 \vee_{\Omega_1 F_n^\varphi}^{\tau} (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_3). \end{aligned}$$

Следовательно, решетка $\tau \Omega_1 F_n^\varphi$ является модулярной для любого $n \in \mathbf{N}_0$ и любого направления φ , $\varphi_0 \leq \varphi$.

Теорема доказана.

Лемма 8. Любая непустая n -кратно $\tau \Omega_1$ -расслоенная $\mathfrak{M}$ -формация с направлением φ , где $n \in \mathbf{N}_0$ и $\varphi_0 \leq \varphi$, является объединением в решетке $\tau \Omega_1 F_n^\varphi$ своих однопорожденных $\tau \Omega_1 F_n^\varphi$ -подформаций.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ есть непустая n -кратно $\tau \Omega_1$ -расслоенная $\mathfrak{M}$ -формация и $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ есть множество всех однопорожденных n -кратно $\tau \Omega_1$ -расслоенных $\mathfrak{M}$ -подформаций из $\mathfrak{F}$ и

$$\mathfrak{H} = \tau \Omega_1 F_n^\varphi \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right).$$

Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Поскольку $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$, справедливы включения $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда

$$G \in \tau \Omega_1 F_n(G, \varphi) \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \subseteq \Omega_1 F_n^\varphi \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) = \tau \Omega_1 F_n^\varphi \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) = \mathfrak{H}.$$

Значит, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. Лемма доказана.

Определение 3. Пусть L есть полная решетка и $a \in L$. Элемент a называется компактным, если для любого подмножества $X \subseteq L$ из неравенства $a \leq \sup X$ следует, что $a \leq \sup X_1$ для некоторого конечного подмножества $X_1 \subseteq X$ (см. [14]).

Определение 4. Полная решетка называется алгебраической, если любой ее элемент является решеточным объединением компактных элементов (см. [14]).

Теорема 3. Решетка $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$, где $\varphi_0 \leq \varphi$ и $n \in \mathbf{N}_0$, является алгебраической.

Доказательство. Так как любая непустая n -кратно $\tau\Omega_1$ -расслоенная $\mathfrak{M}$ -формация с направлением φ , где $n \in \mathbf{N}_0$ и $\varphi_0 \leq \varphi$, по лемме 8 является объединением в решетке $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$ своих однопорожжденных $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$ -подформаций, для доказательства теоремы достаточно показать, что каждая однопорожденная $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$ -подформация является компактным элементом решетки $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$.

Пусть

$$\mathfrak{F} = \tau\Omega_1 F_n(G, \varphi) \subseteq \mathfrak{S} = \vee_{\Omega_1 F_n^\varphi}^\tau (\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \tau\Omega_1 F_n^\varphi \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right),$$

где $\mathfrak{F}_i$ есть n -кратно $\tau\Omega_1$ -расслоенная $\mathfrak{M}$ -формация с направлением φ , где $n \in \mathbf{N}_0$, $\varphi_0 \leq \varphi$, и $i \in I$. Доказательство будем вести индукцией по n .

Пусть $n = 0$, тогда

$$G \in \tau \text{ form} \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) = \text{form} \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) = QR_0 \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right)$$

по следствию 2 и лемме 3.2 из [1]. Значит, $G \cong H/N$, $N \triangleleft H$, и $H \in R_0(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i)$. Согласно определению операции R_0 , в H найдутся такие идеалы $N_1, \dots, N_t$, что $N_1 \cap \dots \cap N_t = \{0\}$ и $H/N_j \in \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, $j = 1, \dots, t$. Значит, $H/N_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}, \dots, H/N_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторых $i_1, \dots, i_t \in I$. Тогда $H/N_j \in \mathfrak{F}_{i_1} \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{i_t}$, $j = 1, \dots, t$. Таким образом, $H \in R_0(\mathfrak{F}_{i_1} \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{i_t})$. Теперь, исходя из того, что $G \cong H/N$, $N \triangleleft H$, получаем, что $G \in QR_0(\mathfrak{F}_{i_1} \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{i_t})$. Поскольку

$$G \in QR_0(\mathfrak{F}_{i_1} \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{i_t}) = \text{form}(\mathfrak{F}_{i_1} \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{i_t}) = \tau \text{ form}(\mathfrak{F}_{i_1} \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{i_t}),$$

получаем, что

$$\mathfrak{F} = \tau \text{ form } G \subseteq \tau \text{ form}(\mathfrak{F}_{i_1} \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{i_t}).$$

Следовательно, $\mathfrak{F} = \tau \text{ form } G$ есть компактный элемент решетки τ -замкнутых $\mathfrak{M}$ -формаций.

Пусть $n > 0$ и однопорожжденные $\tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi$ -формации являются компактными элементами в решетке $\tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi$. Пусть f_i есть минимальный $\tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi$ -спутник $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$ -формации $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$, h есть минимальный $\tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi$ -спутник $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$ -формации $\mathfrak{S}$, f есть минимальный $\tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi$ -спутник $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$ -формации $\mathfrak{F}$. Тогда по лемме 4

$$f(\Omega'_1) = \tau\Omega_1 F_{n-1}(G/O_{\Omega_1}(G), \varphi),$$

$$f(A) = \tau\Omega_1 F_{n-1}(G/G_{\varphi(A)}, \varphi)$$

для всех $A \in \Omega_1 \cap \mathfrak{K}(G)$, и $f(A) = \emptyset$, если $\Omega_1 \setminus \mathfrak{K}(G)$.

Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$, по следствию 1 $f \leq h$. Согласно лемме 5,

$$h(A) = \tau \Omega_1 F_{n-1}^\varphi \left(\bigcup_{i \in I} f_i(A) \right) = \vee_{\Omega_1 F_{n-1}^\varphi}^\tau (f_i(A) \mid i \in I)$$

для всех $A \in \Omega_1 \cup \{\Omega'_1\}$, и по индукции найдутся такие индексы $i_1, \dots, i_t \in I$, что

$$\begin{aligned} G/O_{\Omega_1}(G) \in f(\Omega'_1) &\subseteq \vee_{\Omega_1 F_{n-1}^\varphi}^\tau (f_{i_p}(\Omega'_1) \mid p = 1, 2, \dots, t) \\ &= \tau \Omega_1 F_{n-1}^\varphi (f_{i_1}(\Omega'_1) \cup \dots \cup f_{i_t}(\Omega'_1)). \end{aligned}$$

Так как $G \in \mathfrak{M}$, G обладает композиционным рядом, и значит, $|\mathfrak{R}(G)| < \infty$. Тогда по индукции найдутся такие индексы $j_1, \dots, j_r \in I$, что для каждого $A \in \Omega_1 \cap \mathfrak{R}(G)$

$$\begin{aligned} G/G_{\varphi(A)} \in f(A) &\subseteq \vee_{\Omega_1 F_{n-1}^\varphi}^\tau (f_{j_q}(A) \mid q = 1, 2, \dots, r) \\ &= \tau \Omega_1 F_{n-1}^\varphi (f_{j_1}(A) \cup \dots \cup f_{j_r}(A)). \end{aligned}$$

Пусть $\{k_1, \dots, k_s\} = \{i_1, \dots, i_t\} \cup \{j_1, \dots, j_r\}$, тогда $\tau \Omega_1 F_{n-1}^\varphi (f_{k_1} \cup \dots \cup f_{k_s})$ есть минимальный $\tau \Omega_1 F_{n-1}^\varphi$ -спутник $\mathfrak{M}$ -формации $\tau \Omega_1 F_n^\varphi (\mathfrak{F}_{k_1} \cup \dots \cup \mathfrak{F}_{k_s})$. Справедливы включения

$$\begin{aligned} G/O_{\Omega_1}(G) \in f(\Omega'_1) &\subseteq \vee_{\Omega_1 F_{n-1}^\varphi}^\tau (f_{k_l}(\Omega'_1) \mid l = 1, 2, \dots, s) \\ &= \tau \Omega_1 F_{n-1}^\varphi (f_{k_1}(\Omega'_1) \cup \dots \cup f_{k_s}(\Omega'_1)), \\ G/G_{\varphi(A)} \in f(A) &\subseteq \vee_{\Omega_1 F_{n-1}^\varphi}^\tau (f_{k_l}(A) \mid l = 1, 2, \dots, s) \\ &= \tau \Omega_1 F_{n-1}^\varphi (f_{k_1}(A) \cup \dots \cup f_{k_s}(A)) \end{aligned}$$

для любой $A \in \Omega_1 \cap \mathfrak{R}(G)$. Значит, $G \in \vee_{\Omega_1 F_n^\varphi}^\tau (\mathfrak{F}_{k_i} \mid i = 1, \dots, s)$. Таким образом,

$$\mathfrak{F} \subseteq \vee_{\Omega_1 F_n^\varphi}^\tau (\mathfrak{F}_{k_i} \mid i = 1, \dots, s).$$

Следовательно, решетка $\tau \Omega_1 F_n^\varphi$ является алгебраической для любого $n \in \mathbf{N}_0$ и любого направления φ , $\varphi_0 \leq \varphi$.

Теорема доказана.

Замечание 1. Если τ есть тривиальный подгрупповой $\mathfrak{C}$ -функтор, то в п. 6 теоремы 4 в [11] и в теореме из [13] показано, что решетка ΩF_n^φ всех n -кратно Ω -расслоенных $\mathfrak{C}$ -формаций является полной, модулярной и алгебраической для любого $n \in \mathbf{N}_0$ и любого направления φ , $\varphi_0 \leq \varphi$.

Следствие 3. Решетки $\tau \Omega_1 F_n^\varphi$ и $\Omega_1 F_n^\varphi$, где $n \in \mathbf{N}_0$ и $\varphi_0 \leq \varphi$; решетки $\tau \Omega_1 Fr_n$, $\tau \Omega_1 K_n$, $\tau \Omega_1 B_n$ и решетки $\Omega_1 Fr_n$, $\Omega_1 K_n$, $\Omega_1 B_n$, где $n \in \mathbf{N}_0$; а также решетки всех $\mathfrak{M}$ -формаций и всех τ -замкнутых $\mathfrak{M}$ -формаций являются алгебраическими, модулярными и полными в $\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ есть класс всех мультиоператорных T -групп, удовлетворяющих условиям минимальности и максимальности для T -подгрупп, или класс всех конечных мультиоператорных T -групп.

Следствие 4. Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{C}$ есть класс всех конечных групп. Тогда решетки $\tau \Omega F_n^\varphi$ и ΩF_n^φ , где $n \in \mathbf{N}_0$ и $\varphi_0 \leq \varphi$; решетки $\tau \Omega Fr_n$, $\tau \Omega K_n$, $\tau \Omega B_n$, $\tau \Omega C_n$ и решетки ΩFr_n , ΩK_n , ΩB_n , ΩC_n , где $n \in \mathbf{N}_0$; а также решетки всех формаций конечных групп и всех τ -замкнутых формаций конечных групп являются полными, модулярными и алгебраическими.

Замечание 2. Следствие 4 обобщает теорему 3.1 в [23], п. 6 леммы 1 в [27], следствия 5–6 в [9] и следствие 9.9 в [1].

4. $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$ -длина n -кратно Ω_1 -расслоенной τ -замкнутой $\mathfrak{M}$ -формации

Пусть $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$ есть решетка n -кратно $\tau\Omega_1$ -расслоенных $\mathfrak{M}$ -формаций с направлением φ . По теоремам 1 и 2, решетка $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$ является модулярной и полной в $\mathfrak{M}$ для любого $n \in \mathbf{N}_0$ и любого направления φ , $\varphi_0 \leq \varphi$. По определению полной решетки, справедливо включение $\emptyset \in \tau\Omega_1 F_n^\varphi$. Поэтому, в случае $\Theta = \tau\Omega_1 F_n^\varphi$, где $n \in \mathbf{N}_0$ и $\varphi_0 \leq \varphi$, будем обозначать $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$ -длину τ -замкнутой $\mathfrak{M}$ -формации $\mathfrak{F} \in \tau\Omega_1 F_n^\varphi$ через $l_{\tau\Omega_1 F_n^\varphi}(\mathfrak{F})$ и полагать $\mathfrak{F}_0 = \emptyset$.

Лемма 9. Пусть $\mathfrak{F}$ есть непустая τ -замкнутая $\mathfrak{M}$ -формация из $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$, где $n \in \mathbf{N}_0$ и $\varphi_0 \leq \varphi$. Равенство $l_{\tau\Omega_1 F_n^\varphi}(\mathfrak{F}) = 1$ выполняется тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = (0)$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $l_{\tau\Omega_1 F_n^\varphi}(\mathfrak{F}) = 1$. Так как пустая формация $\emptyset$ и нулевая формация (0) T -групп являются n -кратно $\tau\Omega_1$ -расслоенными $\mathfrak{M}$ -формациями для любого $n \in \mathbf{N}_0$ и любого направления φ соответственно со спутниками f_0 и f_1 такими, что $f_0(A) = \emptyset$ для любого $A \in \Omega_1 \cup \{\Omega'_1\}$ и $f_1(\Omega'_1) = (0)$, $f_1(A) = \emptyset$ для любого $A \in \Omega_1$, и любая непустая $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$ -формация $\mathfrak{F}$ содержит $\emptyset$ и (0) , получаем, что $\mathfrak{F} = (0)$.

Докажем достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = (0)$. Тогда существует единственная цепь $\emptyset \subset (0) = \mathfrak{F}$. Значит, $l_{\tau\Omega_1 F_n^\varphi}(\mathfrak{F}) = 1$.

Лемма доказана.

Лемма 10. Пусть $\mathfrak{F}$ есть непустая τ -замкнутая $\mathfrak{M}$ -формация из $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$, где $n \in \mathbf{N}_0$ и $\varphi_0 \leq \varphi$. Если $l_{\tau\Omega_1 F_n^\varphi}(\mathfrak{F}) = k$, где $k \in \mathbf{N}$, то

$$\mathfrak{F} = \tau\Omega_1 F_n(G, \varphi),$$

где G есть $\mathfrak{M}$ -группа.

Доказательство. Применим индукцию по k . Пусть $k = 1$ и $l_{\tau\Omega_1 F_n^\varphi}(\mathfrak{F}) = 1$. Тогда по лемме 9

$$\mathfrak{F} = (0) = \tau\Omega_1 F_n(\{0\}, \varphi),$$

где $\{0\}$ есть нулевая T -группа.

Допустим, что утверждение леммы верно при $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$ -длине, равной $k - 1$. Докажем, что лемма верна при $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$ -длине, равной k . Пусть $\mathfrak{F}$ есть $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$ -формация и $l_{\tau\Omega_1 F_n^\varphi}(\mathfrak{F}) = k$. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает такой максимальной $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$ -подформацией $\mathfrak{H}$, что $l_{\tau\Omega_1 F_n^\varphi}(\mathfrak{H}) = k - 1$. По предположению индукции, $\mathfrak{H} = \tau\Omega_1 F_n(H, \varphi)$, где H — T -группа. Выберем T -группу G с наименьшей длиной главного ряда из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$, и пусть $G_1 = G \oplus H$. Тогда $G_1 \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}_1 = \tau\Omega_1 F_n(G_1, \varphi)$. Так как $l_{\tau\Omega_1 F_n^\varphi}(\mathfrak{H}) = k - 1$ и $l_{\tau\Omega_1 F_n^\varphi}(\mathfrak{F}) = k$, справедливо равенство $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F} = \tau\Omega_1 F_n(G_1, \varphi)$.

Лемма доказана.

Как и для класса $\mathfrak{C}$, в классе $\mathfrak{M}$ справедлива следующая лемма.

Лемма 11 ([12], лемма 4). Если A есть простая $\mathfrak{M}$ -группа, то каждая ненулевая T -группа, принадлежащая формации $\mathfrak{F} = \text{form } A$, является прямой суммой конечного числа ненулевых идеалов, изоморфных T -группе A .

Теорема 4. Пусть $\mathfrak{F}$ есть непустая ненулевая τ -замкнутая $\mathfrak{M}$ -формация из $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$, где $n \in \mathbb{N}_0$ и $\varphi_0 \leq \varphi$. Равенство $l_{\tau\Omega_1 F_n^\varphi}(\mathfrak{F}) = 2$ выполняется тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \tau\Omega_1 F_n(A, \varphi)$, где A — простая $\mathfrak{M}$ -группа.

Доказательство. Докажем достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = \tau\Omega_1 F_n(A, \varphi)$, где A — простая T -группа. Индукцией по n покажем, что $l_{\tau\Omega_1 F_n^\varphi}(\mathfrak{F}) = 2$.

Пусть $n = 0$, $\mathfrak{F} = \tau \text{form } A$ и $\mathfrak{S}$ есть непустая подформация из $\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{S} \neq (0)$, то, по лемме 11, $\mathfrak{S}$ содержит T -группу G , которая является прямой суммой конечного числа ненулевых идеалов, изоморфных T -группе A . Тогда G содержит идеал N такой, что $\bar{G} = G/N \cong A$. Так как $\bar{G} \in \mathfrak{S}$, справедливо включение $\tau \text{form } \bar{G} \subseteq \mathfrak{S}$. Тогда

$$\tau \text{form } \bar{G} = \tau \text{form}(\bar{G}) = \tau \text{form}(A) = \mathfrak{F}$$

и $\mathfrak{S} = \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ содержит в качестве подформаций лишь $\emptyset$, (0) и $\mathfrak{F}$, таким образом, $l_{\tau\Omega_1 F_0^\varphi}(\mathfrak{F}) = 2$.

Пусть $n \geq 1$ и утверждение верно для любых натуральных чисел, меньших n . Ввиду леммы 4, $\mathfrak{F} = \tau\Omega_1 F_n(A, \varphi)$ обладает единственным минимальным $\tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi$ -спутником f таким, что

$$\begin{aligned} f(\Omega'_1) &= \tau\Omega_1 F_{n-1}(A/O_{\Omega_1}(A), \varphi), \\ f(B) &= \tau\Omega_1 F_{n-1}(A/A_{\varphi(B)}, \varphi) \end{aligned}$$

для всех $B \in \Omega_1 \cap \mathfrak{R}(A)$, и $f(B) = \emptyset$, если $B \in \Omega_1 \setminus \mathfrak{R}(A)$. Предположим, что $\mathfrak{S} \in \tau\Omega_1 F_n^\varphi$ и $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда, если h есть минимальный $\tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi$ -спутник $\mathfrak{S}$, то, по следствию 1, $h \leq f$ и $h(C)$ есть $\tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi$ -подформация $f(C)$ для всех $C \in \Omega_1 \cup \{\Omega'_1\}$.

Рассмотрим случай, когда $A \in \Omega_1$. При $A \notin \varphi(A)$ получаем, что

$$\begin{aligned} f(\Omega'_1) &= \tau\Omega_1 F_{n-1}(A/O_{\Omega_1}(A), \varphi) = \tau\Omega_1 F_{n-1}(A/A, \varphi) = (0), \\ f(A) &= \tau\Omega_1 F_{n-1}(A/A_{\varphi(A)}, \varphi) = \tau\Omega_1 F_{n-1}(A, \varphi) \end{aligned}$$

и $f(B) = \emptyset$ для $B \in \Omega_1 \setminus \mathfrak{R}(A)$. По предположению индукции $l_{\tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi}(f(A)) = 2$ и $f(A)$ содержит в качестве $\tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi$ -подформаций лишь $\emptyset$, (0) и $\tau\Omega_1 F_{n-1}(A, \varphi)$, значит, $\mathfrak{S} = \emptyset$, (0) или $\mathfrak{F}$. Если $A \in \varphi(A)$, то

$$\begin{aligned} f(\Omega'_1) &= \tau\Omega_1 F_{n-1}(A/O_{\Omega_1}(A), \varphi) = \tau\Omega_1 F_{n-1}(A/A, \varphi) = (0), \\ f(A) &= \tau\Omega_1 F_{n-1}(A/A_{\varphi(A)}, \varphi) = \tau\Omega_1 F_{n-1}(A/A, \varphi) = (0) \end{aligned}$$

и $f(B) = \emptyset$ для $B \in \Omega_1 \setminus \mathfrak{R}(A)$. По лемме 9, $l_{\tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi}(f(A)) = 1$ и $f(A)$ содержит в качестве $\tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi$ -подформаций лишь $\emptyset$ и (0) . Если $h(A) = (0) = h(\Omega'_1)$, то $h = f$ и $\mathfrak{S} = \mathfrak{F}$. Если $h(\Omega'_1) = (0)$ и $h(A) = \emptyset$, то $\mathfrak{S} = (0)$. Если $h(\Omega'_1) = \emptyset = h(A)$, то $\mathfrak{S} = \emptyset$. Значит, $\mathfrak{S} = \emptyset$, (0) или $\mathfrak{S} = \mathfrak{F}$.

В случае, когда $A \notin \Omega_1$, получаем, что $f(\Omega'_1) = \tau\Omega_1 F_{n-1}(A, \varphi)$ и $f(B) = \emptyset$ для любого $B \in \Omega_1$. Тогда, по предположению индукции, $l_{\tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi}(f(\Omega'_1)) = 2$ и $f(\Omega'_1)$ содержит в качестве $\tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi$ -подформаций лишь $\emptyset$, (0) и $\tau\Omega_1 F_{n-1}(A, \varphi)$. Отсюда $\mathfrak{S} = \emptyset$, (0) или $\mathfrak{F}$. Таким образом, во всех случаях $\mathfrak{S}$ есть тривиальная τ -замкнутая $\mathfrak{M}$ -подформация $\mathfrak{F}$ и $l_{\tau\Omega_1 F_n^\varphi}(\mathfrak{F}) = 2$.

Докажем необходимость. Пусть $\mathfrak{F} \in \tau\Omega_1 F_n^\varphi$ и $l_{\tau\Omega_1 F_n^\varphi}(\mathfrak{F}) = 2$, тогда, в силу леммы 9, $\mathfrak{F} \neq (0)$. Выберем $\{0\} \neq G \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$, существует идеал $N \triangleleft G$ такой, что G/N — простая T -группа. Поскольку $G/N \neq \{0\}$, справедливо включение $\emptyset \subset (0) \subset \tau\Omega_1 F_n(G/N, \varphi) \subseteq \mathfrak{F}$. По условию, $l_{\tau\Omega_1 F_n^\varphi}(\mathfrak{F}) = 2$, значит, $\tau\Omega_1 F_n(G/N, \varphi) = \mathfrak{F}$. Таким образом, $\mathfrak{F}$ порождается простой T -группой.

Теорема доказана.

Замечание 3. Леммы 9–10 и теорема 4 справедливы для решеток $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$ и $\Omega_1 F_n^\varphi$, где $n \in \mathbf{N}_0$ и $\varphi_0 \leq \varphi$; решеток $\tau\Omega_1 Fr_n$, $\tau\Omega_1 K_n$, $\tau\Omega_1 B_n$ и решеток $\Omega_1 Fr_n$, $\Omega_1 K_n$, $\Omega_1 B_n$, где $n \in \mathbf{N}_0$; а также для решеток всех $\mathfrak{M}$ -формаций и всех τ -замкнутых $\mathfrak{M}$ -формаций, где $\mathfrak{M}$ есть класс всех мультиоператорных T -групп, удовлетворяющих условиям минимальности и максимальности для T -групп, или класс всех конечных мультиоператорных T -групп.

Замечание 4. Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{C}$ есть класс всех конечных групп. Тогда леммы 9–10 и теорема 4 справедливы для решеток $\tau\Omega F_n^\varphi$ и ΩF_n^φ , где $n \in \mathbf{N}_0$ и $\varphi_0 \leq \varphi$; решеток $\tau\Omega Fr_n$, $\tau\Omega K_n$, $\tau\Omega B_n$, $\tau\Omega C_n$ и решеток ΩFr_n , ΩK_n , ΩB_n , ΩC_n где $n \in \mathbf{N}_0$; а также для решеток всех формаций конечных групп и всех τ -замкнутых формаций конечных групп. В частности, лемма 9 и теорема 4 обобщают леммы 3 и 7 из [27] соответственно.

5. Булевы решетки n -кратно Ω_1 -расслоенных τ -замкнутых $\mathfrak{M}$ -формаций

Лемма 12. Пусть $\mathfrak{X}$ есть класс $\mathfrak{M}$ -групп и $\mathfrak{F} = \tau\Omega_1 F_n(\mathfrak{X}, \varphi)$ есть n -кратно $\tau\Omega_1$ -расслоенная $\mathfrak{M}$ -формация с направлением φ , $\varphi_0 \leq \varphi$. Тогда

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{F}) \cap \Omega_1 = \mathfrak{K}(\mathfrak{X}) \cap \Omega_1.$$

Доказательство. Так как $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, справедливо включение $\mathfrak{K}(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{K}(\mathfrak{F})$, и следовательно, $\mathfrak{K}(\mathfrak{X}) \cap \Omega_1 \subseteq \mathfrak{K}(\mathfrak{F}) \cap \Omega_1$. Допустим, что $\mathfrak{K}(\mathfrak{F}) \cap \Omega_1 \not\subseteq \mathfrak{K}(\mathfrak{X}) \cap \Omega_1$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $A \in \mathfrak{K}(G) \cap \Omega_1 \setminus \mathfrak{K}(\mathfrak{X}) \cap \Omega_1$, причем G есть T -группа с наименьшей длиной главного ряда, обладающая таким свойством. Тогда G есть монолитическая T -группа с монолитом M , кроме того, $A \in \mathfrak{K}(M) \cap \Omega_1$. Поскольку $A \in \Omega_1 \setminus \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$, в силу леммы 4 $f(A) = \emptyset$, где f есть минимальный $\tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi$ -спутник $\tau\Omega_1$ -расслоенной $\mathfrak{M}$ -формации $\mathfrak{F}$. С другой стороны, поскольку $G \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} = \tau\Omega_1 F_n(f, \varphi)$, мы видим, что $G/G_{\varphi(C)} \in f(C)$ для всех $C \in \Omega_1 \cap \mathfrak{K}(G)$. В частности, $G/G_{\varphi(A)} \in f(A)$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 13. Пусть $\mathfrak{X}$ есть непустой ненулевой τ -замкнутый класс $\mathfrak{M}$ -групп, A — простая $\mathfrak{M}$ -группа, $A \in \mathfrak{F} = \tau\Omega_1 F_n(\mathfrak{X}, \varphi)$, $\varphi_0 \leq \varphi$. Тогда $A \in \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$.

Доказательство. Поскольку $A \in \mathfrak{F}$, справедливо включение $A \in \mathfrak{K}(\mathfrak{F})$. Доказательство проведем индукцией по n . Если $n = 0$, то по лемме 6

$$\mathfrak{F} = \tau \text{ form } \mathfrak{X} = \text{form } \mathfrak{X}$$

и $A \in \mathfrak{K}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{K}(\mathfrak{F})$.

Пусть $n > 0$. Предположим, что утверждение леммы верно для натуральных чисел, меньших n , и $A \in \mathfrak{F} = \tau\Omega_1 F_n(\mathfrak{X}, \varphi)$. Пусть $A \in \Omega_1$. Тогда по лемме 12

$$\mathfrak{K}(\mathfrak{F}) \cap \Omega_1 = \mathfrak{K}(\mathfrak{X}) \cap \Omega_1,$$

и значит, $A \in \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$. Пусть $A \notin \Omega_1$. Тогда из $A \in \mathfrak{F}$ следует, что

$$A \cong A/O_{\Omega_1}(A) \in f(\Omega'_1) = \tau\Omega_1 F_{n-1}((G/O_{\Omega_1}(G): G \in \mathfrak{X}), \varphi),$$

где f – минимальный $\tau\Omega_1 F_{n-1}^\varphi$ -спутник τ -замкнутой $\mathfrak{M}$ -формации $\mathfrak{F}$. По предположению индукции, $A \in \mathfrak{K}(G/O_{\Omega_1}(G): G \in \mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$. Таким образом, в любом случае $A \in \mathfrak{K}(\mathfrak{X})$.

Лемма доказана.

Аналогично тому, как это было сделано для Ω -расслоенных $\mathfrak{C}$ -формаций, приведем результаты для Ω_1 -расслоенных $\mathfrak{M}$ -формаций.

Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ есть набор $\mathfrak{M}$ -формаций таких, что

$$\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (0), \quad i, j \in I, \quad i \neq j.$$

Нетрудно показать, что

$$\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i = \{A_{i_1} + A_{i_2} + \dots + A_{i_n} \mid A_{i_j} \in \mathfrak{F}_{i_j}, i_j \in I, j = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbf{N}\},$$

где $A_{i_1} + A_{i_2} + \dots + A_{i_n}$ – внешняя прямая сумма $\mathfrak{M}$ -групп A_{i_j} , $j = 1, 2, \dots, n$, является $\mathfrak{M}$ -формацией.

Лемма 14 ([12], теорема 1). Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ есть некоторая система n -кратно Ω_1 -расслоенных $\mathfrak{M}$ -формаций с g -направлением φ таким, что $\varphi(A) \subseteq \mathfrak{M}_A \mathfrak{M}_A$ для любого $A \in \mathfrak{F}_1$, и $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (0)$ для любых $i, j \in I$, $i \neq j$. Тогда $\mathfrak{M}$ -формация

$$\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$$

является n -кратно Ω_1 -расслоенной $\mathfrak{M}$ -формацией с направлением φ .

Лемма 15. Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ есть некоторая система τ -замкнутых $\mathfrak{M}$ -формаций таких, что $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (0)$ для любых $i, j \in I$, $i \neq j$. Тогда

$$\tau \text{ form} \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i.$$

Доказательство. Используя следствие 2, получим, что

$$\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i \subseteq \text{form} \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) = \tau \text{ form} \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right).$$

Значит, справедливо включение

$$\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i \subseteq \tau \text{ form} \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right).$$

Докажем обратное включение. Пусть

$$G \in \tau \text{ form} \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) = \text{form} \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) = QR_0 \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right).$$

Тогда $G \cong H/N$, $N \triangleleft H$ и $H \in R_0(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i)$. Согласно определению операции R_0 , в H найдутся такие идеалы $N_1, \dots, N_t$, что $N_1 \cap \dots \cap N_t = \{0\}$ и $H/N_j \in \bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, $j = 1, \dots, t$. Значит, $H/N_1 \in \mathfrak{F}_{i_1} \dots H/N_t \in \mathfrak{F}_{i_t}$ для некоторых $i_1, \dots, i_t \in I$. Если $i_1 = \dots = i_t$, $H \cong H/N_1 \cap \dots \cap N_t \in \mathfrak{F}_{i_j}$ для любого $j = 1, \dots, t$ и, следовательно,

$$G \cong H/N \in \mathfrak{F}_{i_j} \subseteq \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i.$$

Пусть $i_k \neq i_l$ для некоторых $k, l = 1, \dots, t$. Так как $N_k + N_l \triangleleft H$, $N_k \subseteq N_k + N_l$ и $\mathfrak{F}_{i_k}$ — формация, получаем, что $H/N_k + N_l \cong H/N_k/N_k + N_l/N_k \in \mathfrak{F}_{i_k}$. Аналогично можно показать, что $H/N_k + N_l \in \mathfrak{F}_{i_l}$ и $H/N_k + N_l \in \mathfrak{F}_{i_k} \cap \mathfrak{F}_{i_l}$. По условию, $\mathfrak{F}_{i_k} \cap \mathfrak{F}_{i_l} = (0)$, поэтому $H = N_k + N_l$, причем $N_k \cong H/N_l \in \mathfrak{F}_{i_l}$ и $N_l \cong H/N_k \in \mathfrak{F}_{i_k}$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}_{i_l} \oplus \mathfrak{F}_{i_k}$. Так как $\mathfrak{F}_{i_l} \oplus \mathfrak{F}_{i_k}$ — формация, получаем, что

$$G \cong H/N \in \mathfrak{F}_{i_l} \oplus \mathfrak{F}_{i_k} \subseteq \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i.$$

Значит,

$$\tau \text{ form} \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) \subseteq \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i.$$

Таким образом,

$$\tau \text{ form} \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i.$$

Лемма доказана.

Лемма 16. Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ есть некоторая система n -кратно $\tau\Omega_1$ -расслоенных $\mathfrak{M}$ -формаций с r -направлением φ таким, что $\varphi(A) \subseteq \mathfrak{M}_{A'}\mathfrak{M}_A$ для любого $A \in \mathfrak{F}_1$, и $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (0)$ для любых $i, j \in I$, $i \neq j$. Тогда $\mathfrak{M}$ -формация

$$\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$$

является n -кратно $\tau\Omega_1$ -расслоенной $\mathfrak{M}$ -формацией с направлением φ .

Доказательство. По лемме 14,

$$\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i \in \Omega_1 F_n^\varphi,$$

где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ есть некоторая система n -кратно $\tau\Omega_1$ -расслоенных $\mathfrak{M}$ -формаций с r -направлением φ таким, что $\varphi(A) \subseteq \mathfrak{M}_{A'}\mathfrak{M}_A$ для любого $A \in \mathfrak{F}_1$, и, в силу леммы 15, $\mathfrak{M}$ -формация $\mathfrak{F}$ τ -замкнута. Лемма доказана.

Следствие 5. Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ есть некоторая система n -кратно $\tau\Omega_1$ -расслоенных $\mathfrak{M}$ -формаций с r -направлением φ таким, что $\varphi(A) \subseteq \mathfrak{M}_{A'}\mathfrak{M}_A$ для любого $A \in \mathfrak{F}_1$, и $\mathfrak{F}_i \cap \mathfrak{F}_j = (0)$ для любых $i, j \in I$, $i \neq j$. Тогда

$$\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i = \tau\Omega_1 F_n^\varphi \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right).$$

Доказательство. По лемме 7,

$$\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i \subseteq \Omega_1 F_n^\varphi \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) = \tau \Omega_1 F_n^\varphi \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right).$$

Значит,

$$\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i \subseteq \tau \Omega_1 F_n^\varphi \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right).$$

Покажем, что $\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ является $\tau \Omega_1 F_n^\varphi$ -формацией, содержащей $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i$. Так как

$$\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \subseteq \text{form} \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) = \tau \text{form} \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right)$$

и, согласно лемме 15,

$$\tau \text{form} \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right) = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i,$$

приходим к соотношению

$$\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \subseteq \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i.$$

Кроме того, $\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i \in \tau \Omega_1 F_n^\varphi$ по лемме 16. Таким образом,

$$\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i = \tau \Omega_1 F_n^\varphi \left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i \right).$$

Следствие доказано.

Пусть Θ есть полная решетка формаций в $\mathfrak{M}$. Для $\mathfrak{M}$ -формации $\mathfrak{F} \in \Theta$ обозначим через $L_\Theta(\mathfrak{F})$ решетку всех Θ -подформаций $\mathfrak{M}$ -формации $\mathfrak{F}$. В частности, через $L_{\tau \Omega_1 F_n^\varphi}(\mathfrak{F})$ обозначается решетка всех $\tau \Omega_1 F_n^\varphi$ -подформаций в $\mathfrak{F}$, где $n \in \mathbf{N}_0$ и φ — произвольное направление.

Определение 5. Элемент $\mathfrak{B}$ решетки $\mathfrak{M}$ -формаций Θ с нулем (0) называется атомом, если $\mathfrak{B} \neq (0)$ и $(0) \subseteq \mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{Z} \in \Theta$, влечет равенство $\mathfrak{Z} = (0)$ или $\mathfrak{Z} = \mathfrak{B}$ (см. [32]).

Лемма 17. Пусть $\{\mathfrak{B}_i \mid i \in I\}$ есть непустой набор атомов решетки $\tau \Omega_1 F_n^\varphi$ и

$$\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{B}_i.$$

Если $\mathfrak{B} \neq \emptyset$ есть произвольная ненулевая $\tau \Omega_1 F_n^\varphi$ -подформация в $\mathfrak{F}$, то во множестве $\{\mathfrak{B}_i \mid i \in I\}$ найдется непустое подмножество $\{\mathfrak{B}_j \mid j \in J\}$ такое, что

$$\mathfrak{B} = \bigoplus_{j \in J} \mathfrak{B}_j.$$

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{B}$. Так как $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$, найдутся такие $i_1, \dots, i_t \in I$, что $G = A_{i_1} + \dots + A_{i_t}$, где $A_{i_1} \in \mathfrak{B}_{i_1}, \dots, A_{i_t} \in \mathfrak{B}_{i_t}$. Следовательно,

$$G \in (\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}_{i_1}) \oplus \dots \oplus (\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}_{i_t}) \subseteq \bigoplus_{i \in I} (\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}_i).$$

Значит,

$$\mathfrak{B} \subseteq \bigoplus_{i \in I} (\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}_i).$$

С другой стороны, из того, что $\mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$ для любого $i \in I$, следует, что

$$\bigoplus_{i \in I} (\mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{B}) \subseteq \mathfrak{B}.$$

Таким образом,

$$\mathfrak{B} = \bigoplus_{i \in I} (\mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{B}).$$

Так как $\mathfrak{B}_i$ есть атом решетки $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$ и $\mathfrak{B} \in \tau\Omega_1 F_n^\varphi$, получаем, что $\mathfrak{B}_i \cap \mathfrak{B} \in \{(0), \mathfrak{B}_i\}$. Пусть J есть такое подмножество множества I , что $j \in J$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B}_j \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_j$. Так как $\mathfrak{B} \notin \{\emptyset, (0)\}$, ясно, что $J \neq \emptyset$. Очевидно, что

$$\mathfrak{B} = \bigoplus_{j \in J} \mathfrak{B}_j.$$

Лемма доказана.

Определение 6. Решетку $\mathfrak{M}$ -формаций Θ назовем ограниченной, если $(0) \in \Theta$ и существует $\mathfrak{F} \in \Theta$ такая, что для произвольной $\mathfrak{M}$ -формации $\mathfrak{H} \in \Theta$ справедливо включение $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Здесь нулевую формацию (0) будем рассматривать в качестве минимального непустого элемента решетки Θ (см. [14]).

Определение 7. Ограниченную решетку $\mathfrak{M}$ -формаций Θ будем называть решеткой с дополнениями, если для любой непустой $\mathfrak{M}$ -формации $\mathfrak{B} \in \Theta$ существует $\mathfrak{H} \in \Theta$ такая, что $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} = (0)$ и $\mathfrak{B} \vee_\Theta \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ — максимальный элемент решетки Θ (см. [14]).

Определение 8. Решетка $\mathfrak{M}$ -формаций называется булевой, если она дистрибутивна и является решеткой с дополнениями (см. [14]).

Теорема 5. Пусть $\mathfrak{F} \in \tau\Omega_1 F_n^\varphi$, где φ есть r -направление такое, что $\varphi(A) \subseteq \mathfrak{M}_A' \mathfrak{M}_A$ для любого $A \in \mathfrak{F}_1$. Тогда следующие условия равносильны.

- (1) решетка $L_{\tau\Omega_1 F_n^\varphi}(\mathfrak{F})$ булева;
- (2) $\mathfrak{F} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ есть набор всех атомов решетки $L_{\tau\Omega_1 F_n^\varphi}(\mathfrak{F})$;
- (3) в $\mathfrak{F}$ дополняем каждый элемент решетки $L_{\tau\Omega_1 F_n^\varphi}(\mathfrak{F})$.

Доказательство. Покажем, что из выполнимости условия 3 следует выполнимость условия 2. Рассмотрим набор $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ всех атомов решетки $L_{\tau\Omega_1 F_n^\varphi}(\mathfrak{F})$ и

$$\mathfrak{S} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i.$$

Очевидно, что $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{F}$ и, по лемме 16, $\mathfrak{S} \in \tau\Omega_1 F_n^\varphi$. Допустим, что $\mathfrak{S} \neq \mathfrak{F}$ и G есть T -группа с наименьшей длиной главного ряда из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{S}$. Тогда G есть монолитическая T -группа с монолитом $M = G^{\mathfrak{S}}$. Поскольку $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{F}$, из условия 3 следует, что найдется такая τ -замкнутая $\mathfrak{M}$ -формация $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$, что

$$\mathfrak{S} \cap \mathfrak{B} = (0), \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{S} \vee_{L_{\tau\Omega_1 F_n^\varphi}(\mathfrak{F})} \mathfrak{B}.$$

Поскольку $G \notin \mathfrak{S}$, из монолитичности G заключаем, что $G \in \mathfrak{B}$ и $G/M \in \mathfrak{S} \cap \mathfrak{B} = (0)$. Таким образом, $G = M$, G есть простая T -группа и, по теореме 4, имеется цепь $\emptyset \subset (0) \subset \tau\Omega_1 F_n(G, \varphi)$. Значит, $\tau\Omega_1 F_n(G, \varphi)$ есть атом решетки $L_{\tau\Omega_1 F_n^\varphi}(\mathfrak{F})$. Получаем, что $G \in \tau\Omega_1 F_n(G, \varphi) \subseteq \mathfrak{S}$, что противоречит выбору G . Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}$.

Пусть теперь выполняется условие 2. Покажем, что $L_{\tau\Omega_1 F_n^\varphi}(\mathfrak{F})$ есть решетка с дополнениями. Рассмотрим $\mathfrak{B} \in \tau\Omega_1 F_n^\varphi$, где $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$ и $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I_1\}$ есть набор всех тех подформаций из $\mathfrak{B}$, которые являются атомами решетки $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$. В силу леммы 17,

$$\mathfrak{B} = \bigoplus_{i \in I_1} \mathfrak{F}_i.$$

Пусть

$$I_2 = I \setminus I_1, \quad \mathfrak{S} = \bigoplus_{i \in I_2} \mathfrak{F}_i.$$

Покажем, что $\mathfrak{S}$ есть дополнение к $\mathfrak{B}$ в решетке $L_{\tau\Omega_1 F_n^\varphi}(\mathfrak{F})$. Предположим, что это неверно и $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{S} \neq (0)$, тогда существует $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{B} \cap \mathfrak{S}$, причем $\mathfrak{L}$ есть атом решетки $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$. Следовательно, $\mathfrak{L} = \mathfrak{F}_i$ для некоторого $i \in I$, но $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Получаем противоречие. Значит, $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{S} = (0)$.

Заметим, что если $\mathfrak{F} \in \Theta$ и Θ есть полная решетка формаций в $\mathfrak{M}$, то для любых $\mathfrak{B}, \mathfrak{S} \in L_\Theta(\mathfrak{F})$ справедливо равенство

$$\mathfrak{B} \vee_{L_\Theta(\mathfrak{F})} \mathfrak{S} = \mathfrak{B} \vee_\Theta \mathfrak{S}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i = \left(\bigoplus_{i \in I_1} \mathfrak{F}_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{i \in I_2} \mathfrak{F}_i \right) \\ &= \mathfrak{B} \oplus \mathfrak{S} = \mathfrak{B} \vee_{\tau\Omega_1 F_n^\varphi}^\tau \mathfrak{S} = \mathfrak{B} \vee_{L_{\tau\Omega_1 F_n^\varphi}(\mathfrak{F})} \mathfrak{S}. \end{aligned}$$

Итак, $L_{\tau\Omega_1 F_n^\varphi}(\mathfrak{F})$ есть решетка с дополнениями.

Докажем ее дистрибутивность. Пусть $\mathfrak{B}, \mathfrak{S}$ и $\mathfrak{L}$ есть произвольные $\tau\Omega_1 F_n^\varphi$ -подформации $\mathfrak{F}$. Тогда

$$\begin{aligned} (\mathfrak{B} \cap \mathfrak{L}) \vee_{\tau\Omega_1 F_n^\varphi}^\tau (\mathfrak{B} \cap \mathfrak{S}) &= \tau\Omega_1 F_n^\varphi((\mathfrak{B} \cap \mathfrak{L}) \cup (\mathfrak{B} \cap \mathfrak{S}), \varphi) \\ &= \tau\Omega_1 F_n^\varphi((\mathfrak{B} \cap (\mathfrak{L} \cup \mathfrak{S})), \varphi) \subseteq \mathfrak{B} \cap \tau\Omega_1 F_n^\varphi(\mathfrak{L} \cup \mathfrak{S}). \end{aligned}$$

Предположим, что обратное включение неверно и G есть T -группа с наименьшей длиной главного ряда из $\mathfrak{B} \cap (\mathfrak{L} \vee_{\Omega_1 F_n^\varphi}^\tau \mathfrak{S}) \setminus (\mathfrak{B} \cap \mathfrak{L}) \vee_{\Omega_1 F_n^\varphi}^\tau (\mathfrak{B} \cap \mathfrak{S})$. Так как G есть монолитическая T -группа, из включения $G \in \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}_i$ для некоторого $i \in I$. Поскольку

$$G \in \mathfrak{L} \vee_{\Omega_1 F_n^\varphi}^\tau \mathfrak{S} = \tau \Omega_1 F_n^\varphi (\mathfrak{L} \cup \mathfrak{S})$$

и $G \in \mathfrak{F}_i = \tau \Omega_1 F_n (G, \varphi)$, причем $\mathfrak{F}_i$ является атомом, справедливо включение

$$\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{L} \vee_{\Omega_1 F_n^\varphi}^\tau \mathfrak{S}.$$

В силу леммы 17,

$$\mathfrak{L} = \bigoplus_{i \in I_1} \mathfrak{F}_i, \quad \mathfrak{S} = \bigoplus_{i \in I_2} \mathfrak{F}_i.$$

Далее,

$$\mathfrak{L} \vee_{\Omega_1 F_n^\varphi}^\tau \mathfrak{S} = \tau \Omega_1 F_n ((\mathfrak{L} \cup \mathfrak{S}), \varphi) \subseteq \tau \Omega_1 F_n \left(\left(\bigoplus_{i \in I_1 \cup I_2} \mathfrak{F}_i \right), \varphi \right) = \bigoplus_{i \in I_1 \cup I_2} \mathfrak{F}_i.$$

Следовательно, либо $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{L}$, либо $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{S}$. В любом из этих случаев

$$G \in (\mathfrak{B} \cap \mathfrak{L}) \vee_{\Omega_1 F_n^\varphi}^\tau (\mathfrak{B} \cap \mathfrak{S}).$$

Получено противоречие с выбором G . Значит, решетка $L_{\tau \Omega_1 F_n^\varphi}(\mathfrak{F})$ дистрибутивна.

Докажем, что выполнимость условия 1 влечет выполнимость условия 3. Поскольку решетка $L_{\tau \Omega_1 F_n^\varphi}(\mathfrak{F})$ булева, по определению, решетка $L_{\tau \Omega_1 F_n^\varphi}(\mathfrak{F})$ является решеткой с дополнениями. Значит, для любой $\mathfrak{M}$ -формации $\mathfrak{B} \in L_{\tau \Omega_1 F_n^\varphi}(\mathfrak{F})$ найдется $\mathfrak{S} \in L_{\tau \Omega_1 F_n^\varphi}(\mathfrak{F})$ такая, что $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{S} = (0)$ и

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{B} \vee_{L_{\tau \Omega_1 F_n^\varphi}(\mathfrak{F})} \mathfrak{S} = \mathfrak{B} \vee_{\Omega_1 F_n^\varphi}^\tau \mathfrak{S} = \tau \Omega_1 F_n^\varphi (\mathfrak{B} \cup \mathfrak{S}).$$

Таким образом, в $\mathfrak{F}$ дополняем каждый элемент решетки $L_{\tau \Omega_1 F_n^\varphi}(\mathfrak{F})$.

Теорема доказана.

Замечание 5. В [12] подобный теореме 5 результат получен для решетки ΩF_n^φ всех n -кратно Ω -расслоенных $\mathfrak{C}$ -формаций с аналогичным направлением φ .

Замечание 6. Теорема 5 справедлива для решеток $\tau \Omega_1 F_n^\varphi$, $\Omega_1 F_n^\varphi$, где $n \in \mathbf{N}_0$ и φ есть r -направление такое, что $\varphi(A) \subseteq \mathfrak{M}_{A'} \mathfrak{M}_A$ для любого $A \in \mathfrak{S}_1$; решеток $\tau \Omega_1 Fr_n$, $\tau \Omega_1 K_n$, $\tau \Omega_1 B_n$ и решеток $\Omega_1 Fr_n$, $\Omega_1 K_n$, $\Omega_1 B_n$, где $n \in \mathbf{N}_0$; а также для решеток всех $\mathfrak{M}$ -формаций и всех τ -замкнутых $\mathfrak{M}$ -формаций, где $\mathfrak{M}$ есть класс всех мультиоператорных T -групп, удовлетворяющих условиям минимальности и максимальности для T -подгрупп, или класс всех конечных мультиоператорных T -групп.

Замечание 7. Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{C}$ есть класс всех конечных групп. Тогда теорема 5 будет справедлива для решеток $\tau \Omega F_n^\varphi$ и ΩF_n^φ , где $n \in \mathbf{N}_0$ и φ есть r -направление такое, что $\varphi(A) \subseteq \mathfrak{C}_{A'} \mathfrak{C}_A$ для любого $A \in \mathfrak{S}$; решеток $\tau \Omega Fr_n$, $\tau \Omega K_n$, $\tau \Omega B_n$, $\tau \Omega C_n$ и решеток ΩFr_n , ΩK_n , ΩB_n , ΩC_n , где $n \in \mathbf{N}_0$; а также для решеток всех формаций конечных групп и всех τ -замкнутых формаций конечных групп. В частности, теорема 5 обобщает основные результаты [10].

Замечание 8. Теорема 4.3.13 в [5] отражает результат исследования τ -замкнутых n -кратно локальных формаций конечных групп, у которых решетка всех τ -замкнутых n -кратно локальных подформаций является булевой.

Список литературы

1. Шеметков Л. А., Скиба А. Н., *Формации алгебраических систем*. Наука, Москва, 1989.
2. Higgins P. J., Groups with multiple operators. *Proc. London Math. Soc.* (1956) **6**, 366–416.
3. Курош А. Г., *Лекции по общей алгебре*. Наука, Москва, 1973.
4. Скорняков Л. А., *Общая алгебра*, **2**. Наука, Москва, 1991.
5. Скиба А. Н., *Алгебра формаций*. Беларуская навука, Минск, 1997.
6. Скиба А. Н., О локальных формациях длины 5. В сб.: *Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп*. Наука и техника, Минск, 1986, с. 135–149.
7. Safonov V. G., On modularity of the lattice of totally saturated formations of finite groups. *Comm. Algebra* (2007) **35**, 3495–3502.
8. Скиба А. Н., Шеметков Л. А., Формации алгебр с дополняемыми подформациями. *Украинский матем. журн.* (1991) **43**, 1008–1012.
9. Скачкова Ю. А., Решетки Ω -расслоенных формаций. *Дискретная математика* (2002) **14**, №2, 85–94.
10. Скачкова Ю. А., Булевы решетки кратно Ω -расслоенных формаций. *Дискретная математика* (2002) **14**, №3, 42–46.
11. Ведерников В. А., Демина Е. Н., Ω -расслоенные формации мультиоператорных T -групп. *Сибирский матем. журн.* (2010) **51**, 990–1009.
12. Демина Е. Н., Булевы решетки кратно Ω -расслоенных формаций мультиоператорных T -групп. В сб.: *Теория групп и ее приложения: Труды 8-й Международной школы-конференции, посвященной 75-летию В. А. Белоногова*. Кабардино-Балкарский ун-т, Нальчик, 2010, с. 86–93.
13. Демина Е. Н., Алгебраические решетки n -кратно Ω -расслоенных формаций мультиоператорных T -групп. В сб.: *Труды Международной конф. «Алгебра, логика и приложения»*. СФУ, Красноярск, 2010, с. 33–34.
14. Гретцер Г., *Общая теория решеток*. Мир, Москва, 1982.
15. Shemetkov L. A., Skiba A. N., Vorob'ev N. N., On lattices of formations of finite groups. *Algebra Colloq.* (2010) **17**, 557–564.
16. Каморников С. Ф., Селькин М. В., *Подгрупповые функторы и классы конечных групп*. Беларуская навука, Минск, 2003.
17. Корпачева М. А., Сорокина М. М., Об Ω -расслоенных τ -замкнутых формациях конечных групп. В сб.: *Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша: Тезисы докладов*. Мех.-мат. ф-т МГУ, Москва, 2008, с. 137–138.
18. Шабалина И. П., О решетке τ -замкнутых n -кратно ω -локальных формаций конечных групп. *Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук* (2003) №1, 28–30.
19. Жизневский П. А., О модулярности и индуктивности решетки всех τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций конечных групп. *Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины* (2010) **58**, №1, 185–191.
20. Сафонов В. Г., Об алгебраичности решетки всех τ -замкнутых totally насыщенных формаций. *Алгебра и логика* (2006) **45**, 620–626.
21. Сафонов В. Г., О модулярности решетки τ -замкнутых totally насыщенных формаций конечных групп. *Украинский матем. журн.* (2006) **58**, 852–858.
22. Егорова В. Е., Об алгебраичности решетки всех τ -замкнутых totally канонических формаций. В сб.: *Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша: Тезисы докладов*. Мех.-мат. ф-т МГУ, Москва, 2008, с. 88–89.

23. Воробьев Н. Н., Царев А. А., О модулярности решетки τ -замкнутых n -кратно ω -композиционных формаций. *Украинский матем. журн.* (2010) **62**, 453–463.
24. Ведерников В. А., Демина Е. Н., Ω -расслоенные формации и классы Фиттинга T -групп. В сб.: *Алгебра и ее приложения: Труды Международной алгебраической конференции, посвященной 80-летию со дня рождения А. И. Кострикина*. Кабардино-Балкарский ун-т, Нальчик, 2009, с. 26–29.
25. Ольшанский А. Ю., *Геометрия определяющих соотношений в группах*. Наука, Москва, 1989.
26. Ведерников В. А., Коптюх Д. Г., Композиционные формации s -длины 3. *Дискретная математика* (2001) **13**, №1, 119–131.
27. Ведерников В. А., Коптюх Д. Г., Ω -расслоенные формации конечных групп Ω_φ -длины 3. В сб.: *Сб. научных трудов математического факультета МГПУ*. МГПУ, Москва, 2005, с. 164–175.
28. Ведерников В. А., Формации конечных групп с дополняемыми подформациями длины 3. *Вопросы алгебры* (1993) **6**, 16–21.
29. Ведерников В. А., Сорокина М. М., Ω -расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп. *Дискретная математика* (2001) **13**, №3, 125–144.
30. Ведерников В. А., Максимальные спутники Ω -расслоенных формаций и классов Фиттинга. *Труды Института математики и механики УрО РАН* (2001) **7**, №2, 55–71.
31. Кон П., *Универсальная алгебра*. Мир, Москва, 1968.
32. Скорняков Л. А., *Элементы общей алгебры*. Наука, Москва, 1983.

Статья поступила 26.11.2010.