Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Н. Бояринов, О распределении абсолютных значений тригонометрической суммы, *Дискрет. матем.*, 2012, том 24, выпуск 1, 26–29

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1169>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 15:05:36

О распределении абсолютных значений тригонометрической суммы

© 2012 г. Р. Н. Бояринов

Доказана теорема о распределении больших значений модуля тригонометрической суммы с лакунарными последовательностями натуральных чисел.

В 1956 г. А. Г. Постников в [1] доказал следующую теорему о распределении значений показательной тригонометрической суммы.

Теорема 1. Пусть

$$S(\alpha) = \sum_{x=0}^{P-1} e^{2\pi i \alpha g^x},$$

где $0 \leq \alpha \leq 1$, g — целое число, $g \geq 2$. Интервал $[0, 1)$ эффективно разбивается на два подмножества $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$, причем если $\alpha \in \mathfrak{M}_1$, то

$$|S(\alpha)| \leq C(\varepsilon) \frac{P}{\ln^{1/2-\varepsilon} P}, \quad 0 < \varepsilon < 1/2,$$

и

$$\text{mes } \mathfrak{M}_2 = O(e^{-a(\ln P)^3}),$$

где a есть некоторая положительная постоянная.

Настоящая заметка посвящена обобщению результата А. Г. Постникова на случай лакунарной последовательности натуральных чисел. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть даны лакунарные последовательности натуральных чисел $F_j(x)$, $1 \leq j \leq k$, то есть такие, что для любого $x \geq 1$ выполняются неравенства

$$\frac{F_j(x+1)}{F_j(x)} \geq \beta_j > 1,$$

где x, j, k — натуральные числа. Рассмотрим тригонометрическую сумму

$$S_k(\vec{\alpha}) = S_k(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \sum_{x=1}^P e^{2\pi i (\alpha_1 F_1(x) + \dots + \alpha_k F_k(x))}.$$

Для любого $\lambda > 0$ k -мерный куб $[0, 1]^k$ разбивается на два непересекающихся подмножества $\mathfrak{M}_1(\lambda)$ и $\mathfrak{M}_2(\lambda)$. Множество $\mathfrak{M}_1(\lambda)$ определяется как множество тех $\bar{\alpha} \in [0, 1]^k$, для которых $|S_k(\bar{\alpha})| \leq \lambda \sqrt{P}$, а $\mathfrak{M}_2(\lambda) = [0, 1]^k - \mathfrak{M}_1(\lambda)$. Тогда для меры второго множества $\mathfrak{M}_2(\lambda)$ справедлива оценка сверху

$$\text{mes } \mathfrak{M}_2(\lambda) < \exp(1 - \kappa \lambda^2),$$

где

$$\kappa = \frac{\beta - 1}{e\beta},$$

$$\beta = \max_{1 \leq j \leq k} \beta_j.$$

Замечание 1. При $k = 1$ и $\lambda = (\ln P)^{3/2}$ теорема 2 представляет собой улучшение результата А. Г. Постникова, а именно, что $|S(\alpha)| \leq \sqrt{P \ln^3 P}$ для всех $\alpha \in [0, 1]$ за исключением множества точек α , мера которого не превосходит величины $\exp(1 - \kappa \lambda^2)$, где $\kappa = (g - 1)/(eg)$.

Замечание 2. Теорема 2 верна и для суммы

$$W_k(\bar{\alpha}) = \sum_{x=1}^P e^{2\pi i(\alpha_1 m_1 F_1(x) + \dots + \alpha_k m_k F_k(x))},$$

где $m_1, \dots, m_k$ — целые числа, не все равные нулю. В этом случае

$$\kappa = \frac{\gamma - 1}{e\gamma},$$

$$\gamma = \max_{1 \leq j \leq k, m_j \neq 0} \beta_j.$$

Замечание 3. Теорема 2 верна и для сумм вида $\text{Re } S_k(\bar{\alpha})$, $\text{Im } S_k(\bar{\alpha})$. В этом случае

$$\kappa = \frac{\beta - 1}{e\beta},$$

$$\beta = \max_{1 \leq j \leq k} \beta_j.$$

Замечание 4. Теорема 2 верна и для сумм вида $\text{Re } W_k(\bar{\alpha})$, $\text{Im } W_k(\bar{\alpha})$. В этом случае

$$\kappa = \frac{\gamma - 1}{e\gamma},$$

$$\gamma = \max_{1 \leq j \leq k, m_j \neq 0} \beta_j.$$

Замечание 5. В силу замечания 3, результаты теоремы 2 для сумм вида $\text{Re } S_k(\bar{\alpha})$, $\text{Im } S_k(\bar{\alpha})$ при $k = 1$ и $\lambda \geq (\ln P)^{3/2}$ уточняют результаты работы [2].

Доказательство теоремы 2 опирается на нижеследующую лемму.

Лемма 1. Пусть $F(x)$ — лакунарная последовательность натуральных чисел и

$$\frac{F(x+1)}{F(x)} \geq \delta > 1.$$

Тогда для числа решений $r_n(P)$ уравнения

$$F(x_1) + \dots + F(x_n) = F(y_1) + \dots + F(y_n)$$

в натуральных числах $1 \leq x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \leq P$ справедлива оценка сверху

$$r_n(P) \leq n! \left(\frac{\delta}{\delta - 1} \right)^n P^n.$$

Доказательство леммы можно найти в [3–5].

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} F_1(x_1) + \dots + F_1(x_n) &= F_1(y_1) + \dots + F_1(y_n) \\ &\dots \\ F_k(x_1) + \dots + F_k(x_n) &= F_k(y_1) + \dots + F_k(y_n). \end{aligned} \quad (1)$$

Тогда для числа решений $v_{j,n}(P)$ j -го уравнения системы (1)

$$F_j(x_1) + \dots + F_j(x_n) = F_j(y_1) + \dots + F_j(y_n)$$

в натуральных числах $1 \leq x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \leq P$ из леммы 1 следует оценка сверху

$$v_{j,n}(P) \leq n! \left(\frac{\beta_j}{\beta_j - 1} \right)^n P^n.$$

Тогда для числа решений $J_{k,n}(P)$ системы (1) справедлива оценка

$$J_{k,n}(P) \leq \min_{1 \leq j \leq k} v_{j,n}(P) \leq \min_{1 \leq j \leq k} n! \left(\frac{\beta_j}{\beta_j - 1} \right)^n P^n = n! \left(\frac{\beta}{\beta - 1} \right)^n P^n,$$

где

$$\beta = \max_{1 \leq j \leq k} \beta_j.$$

Для доказательства основного утверждения теоремы 2 применим неравенство А. А. Маркова

$$\lambda^{2n} P^n \text{mes } \mathfrak{M}_2(\lambda) \leq \int_{[0,1]^k} |S_k(\bar{\alpha})|^{2n} d\bar{\alpha} = J_{k,n}(P) \leq n! \left(\frac{\beta}{\beta - 1} \right)^n P^n.$$

Отсюда получаем, что

$$\text{mes } \mathfrak{M}_2(\lambda) \leq \left(\frac{n\beta}{(\beta - 1)\lambda^2} \right)^n.$$

При $\lambda \geq 1/\sqrt{\kappa}$ возьмем $n = [\kappa\lambda^2]$, где $[x]$ — целая часть числа x . Отсюда

$$\text{mes } \mathfrak{M}_2(\lambda) \leq e^{-n} < \exp(1 - \kappa\lambda^2).$$

При $0 < \lambda < 1/\sqrt{\kappa}$ справедливы неравенства

$$\text{mes } \mathfrak{M}_2(\lambda) \leq 1 \exp(1 - \kappa\lambda^2).$$

Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. Постников А. Г., Оценка показательной тригонометрической суммы. *Известия РАН. Сер. матем.* (1956) **70**, 661–666.
2. Гапошкин В. Ф., О скорости приближения к нормальному закону распределений взвешенных сумм лакунарных рядов. *Теория вероятностей и ее применения* (1968) **13**, №3, 445–461.
3. Бояринов Р. Н., Чубариков В. Н., О распределении значений функций на последовательности Фибоначчи. *Доклады РАН* (2001) **379**, 9–11.
4. Бояринов Р. Н., Центральная предельная теорема для равномерного распределения дробных долей быстрорастущих последовательностей. *Вестник МГУ. Сер. I, матем., механ.* (2001) №5, 52–54.
5. Бояринов Р. Н., Нгонго И. С., Чубариков В. Н., О новых метрических теоремах в методе А. Г. Постникова. В сб.: *Актуальные проблемы теории чисел: Труды IV Международной конф.*, Тула, 2002, с. 5–31.

Статья поступила 13.04. 2011.