Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Глухов, П. Н. Закревский, О коэффициентах аддитивности и аффинности дискретных функций, *Дискрет. матем.*, 2012, том 24, выпуск 1, 30–47

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1170>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 15:28:09

О коэффициентах аддитивности и аффинности дискретных функций

© 2012 г. М. М. Глухов, П. Н. Закревский

Вводятся и изучаются коэффициенты аддитивности и аффинности функций на конечных группах. При этом особое внимание уделяется булевым функциям и бент-функциям.

1. Введение

Будем использовать следующие обозначения:

B^A есть множество всех функций, определенных на A со значениями в B ;

$\|f\| = |\{a \in A: f(a) \neq 0\}|$ есть вес функции $f \in B^A$ при условии, что $A = (A; +)$ есть группоид с нулем;

$N_b^f = \{a \in A: f(a) = b\}$ для $f \in B^A, a \in A, b \in B$;

V_n есть линейное пространство векторов-строк длины n над полем $P = GF(2)$,

$V_n^* = V_n \setminus \{0\}$;

F_n есть множество всех булевых функций от n переменных;

L_n есть множество всех линейных булевых функций от n переменных;

A_n есть множество всех аффинных булевых функций от n переменных;

$+$, $-$, 0 есть операции сложения, вычитания и нулевой элемент во всех используемых алгебрах.

В работах по дискретным функциям, связанных с криптографическими приложениями, большое внимание уделяется вопросам приближения функций над конечными полями и кольцами линейными функциями. Развитие этого направления началось, в основном, с исследования булевых функций [8].

Один из основных методов сравнения булевой функции с линейными функциями основан на использовании статистической структуры функции. Напомним (см. [8]), что статистической структурой булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ называется набор из 2^n чисел $\Delta_a^f, a \in V_n$, определяемых формулами

$$\frac{\|f(x) - (a, x)\|}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{\Delta_a^f}{2^n},$$

где $a = (a_1, \dots, a_n) \in V_n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in V_n$ и

$$(a, x) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n.$$

Отсюда находим, что

$$\Delta_a^f = 2^{n-1} - \|f(x) - (a, x)\|. \quad (1)$$

Если ввести расстояние между функциями как расстояние Хэмминга между столбцами табличных заданий этих функций при одном и том же упорядочении векторов-аргументов, то величина $\|f(x) - (a, x)\|$ будет расстоянием Хэмминга между функциями $f(x)$ и (a, x) . Значит, элементы Δ_a^f статистической структуры функции f будут определять расстояния от функции до линейных функций и тем самым оценивать близость или удаленность функции f от линейных функций.

Еще один подход к сравнению булевых функций из $f \in F_n$ с линейными основан на использовании характеров группы $G = (V_n; +)$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. При этом вместо функции f рассматривают так называемую характеристическую для нее функцию $f_b(x) = \chi_b(f(x))$, где χ_b — комплексный характер аддитивной группы $H = \{0, 1\}$ поля $GF(2)$, соответствующий элементу a . Так как $\chi_b(x) = (-1)^{bx}$, то $f_b(x) = (-1)^{bf(x)}$, то есть $f_0(x) = 1$, а $f_1(x) = (-1)^{f(x)}$. Разложим функцию f_1 в ряд Фурье по характерам η_a группы G :

$$f_1(x) = \sum_{a \in G} C_a^f \eta_a(x).$$

Систему комплексных чисел C_a^f , где $a \in G$, называют спектром функции f . Из ортогональности характеров в пространстве всех функций из $\mathbb{C}^G$ над полем $\mathbb{C}$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \sum_{x \in G} f(x) \overline{g(x)}$$

следует, что

$$C_a^f = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f_1(x) \bar{\eta}_a^G(x).$$

Если $x = (x_1, \dots, x_n)$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, то $\eta_a = (-1)^{(a, x)}$ и

$$C_a^f = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} (-1)^{f(x) - (a, x)}.$$

Заметим еще, что для функции $f \in F_n$ имеет место равенство

$$\|f(x) - (a, x)\| = 2^{n-1} - \frac{1}{2} \sum_{x \in V_n} (-1)^{f(x) - (a, x)}.$$

Отсюда и из (1) получаем соотношение

$$\Delta_a^f = 2^{n-1} C_a^f. \quad (2)$$

Таким образом, близость булевой функции к линейным функциям можно характеризовать и элементами статистической структуры, и элементами спектра.

Булева функция $f \in F_n$ называется минимальной, а также бент-функцией, если $|\Delta_a^f| = 2^{n/2-1}$ для любого $a \in V_n$. Следовательно, для бент-функции f от n переменных выполняется условие

$$\|f(x) + (a, x)\| = 2^{n-1} \pm 2^{n/2-1}.$$

В дальнейшем многими авторами понятия статистической структуры, спектра, бент-функции и другие понятия для булевых функций обобщались естественным образом на функции, определенные на различных конечных полях, кольцах, группах (см., например, [1, 3, 4]). В ряде таких работ рассматривался, в частности, способ сравнения функций на группах с линейными функциями и гомоморфизмами, основанный на свойстве

$$f(a + b) = f(a) + f(b). \quad (3)$$

Пусть $(G; +)$ и $(H; +)$ есть конечные группы, и H^G есть множество всех функций, определенных на G со значениями в H . Заметим, что функции над конечным простым полем, обладающие свойством (3) при любых $a, b \in G$, являются линейными. Поэтому гомоморфизмы групп являются аналогами линейных функций над простыми конечными полями. В работе [7] гомоморфизмы групп называются линейными функциями, а свойство (3) положено в основу теста на близость функции f к линейной функции. В последующие годы этому тесту линейности был посвящен ряд работ тех же и других авторов (см. [5, 6, 9]). В них, в частности, исследовалась величина

$$\text{Err}(f) = \mathbf{P}(f(u) + f(v) \neq f(u + v)),$$

которую можно трактовать как вероятность отклонения функции f от гомоморфизма при равновероятном и независимом выборе элементов u и v из группы G . Одна из основных задач, рассматриваемых в указанных работах, заключалась в установлении соотношений между величиной $\text{Err}(f)$ и расстоянием функции f от класса линейных функций (гомоморфизмов).

Заметим, что этот подход сравнения функций с гомоморфизмами для функций от n переменных над кольцами вычетов и конечными полями рассматривался ранее А. С. Амбросимовым (1981 г.). В частности, им в обоих этих случаях для любого целого числа $l > 1$ были найдены формулы вероятности аддитивности $\mathbf{P}\left(f\left(\sum_{i=1}^l x_i\right) = \sum_{i=1}^l f(x_i)\right)$ функции f в общем случае, а также в случаях, когда f является бент-функцией. Продолжая это направление исследований, мы введем следующие определения.

Определение 1. Коэффициентом аддитивности функции $f \in H^G$ назовем число

$$Ad(f) = \frac{|\{(x, y) \in G^2: f(x + y) = f(x) + f(y)\}|}{|G|^2}.$$

Определение 2. Коэффициентом аффинности функции $f \in H^G$ назовем число

$$Af(f) = \max_{a \in H} \frac{1}{|G|^2} |\{(x, y) \in G^2: f(x + y) = f(x) + f(y) + a\}|.$$

В данной статье, используя идеи А. С. Амбросимова, и обозначения из работы [4] В. И. Солодовникова, мы находим выражение коэффициента $Ad(f)$ через спектр функции f при условии, что группы G, H являются прямыми суммами нескольких экземпляров одной и той же циклической группы. Частными случаями полученного утверждения являются теоремы Амбросимова о функциях над полями и кольцами вычетов при $l = 2$.

Далее в статье основное внимание уделяется нахождению параметров $Ad(f)$ и $Af(f)$ для функций из некоторых классов булевых функций.

2. О коэффициенте аддитивности для дискретных функций на абелевых группах

Непосредственно из определения коэффициента аффинности функций из H^G легко получить следующие простейшие его свойства.

Предложение 1. Для любой функции $f \in H^G$ имеют место следующие свойства коэффициента $Af(f)$:

- (1) $1/|H| \leq Af(f) \leq 1$;
- (2) $Af(f) = 1 \iff f$ есть аффинная функция;
- (3) $Af(f) = Af(f + c)$ для всех $c \in H$;
- (4) $Af(f) = Af(f + h)$ для всех $g(x) \in \text{Hom}(G, H)$;
- (5) $Af(f) = Af(f \circ \varphi)$ для всех $\varphi \in \text{Aut}(G)$, где $\circ$ означает композицию функций.

Для формулировки следующего утверждения введем еще некоторые понятия и обозначения. При изучении функций из H^G обычно используются комплексные характеры групп G и H . С этой целью по функции $f \in H^G$ и элементу $a \in H$ определяют комплекснозначную функцию $f_a: G \rightarrow \mathbb{C}$:

$$f_a(x) = \chi_a(f(x)),$$

где χ_a — комплексный характер группы H , соответствующий элементу a .

Обозначим через η_b^G характер группы G , соответствующий b , и разложим функцию f_a в ряд Фурье по характерам группы G :

$$f_a(x) = \sum_{b \in G} C_b^{f_a} \eta_b^G(x).$$

Систему комплексных чисел $C_b^{f_a}$, где $a \in H$, $b \in G$, называют спектром функции f_a . Из ортогональности характеров следует, что

$$C_b^{f_a} = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f_a(x) \bar{\eta}_b^G(x),$$

где $\bar{\eta}_b^G$ — характер, сопряженный с η_b^G .

Числа $C_b^{f_a}$ при любых $a, b \in G$ обладают следующими свойствами:

$$|C_b^{f_a}| \leq 1, \tag{4}$$

$$\sum_{b \in G} |C_b^{f_a}|^2 = 1, \tag{5}$$

$$\max\{|C_b^{f_a}|\} \geq \frac{1}{\sqrt{|G|}}. \tag{6}$$

Свойство (4) следует из того, что значениями функций f_a, χ_b^G являются комплексные корни некоторых степеней из 1 и их модули равны 1. Свойство (5) следует из равенства Парсеваля для унитарного пространства функций $\mathbb{C}^G$ со скалярным произведением

$$S(f, g) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x) \bar{g}(x),$$

поскольку множество характеров η_b^G , $b \in G$, является его ортонормированным базисом. Свойство (6) следует из (5).

Функцию $f \in H^G$ называют бент-функцией, если числа $|C_b^{fa}|$ равны между собой при любых $b \in G$, $a \in H \setminus \{0\}$. Из равенства (6) следует, что для любой бент-функции $f \in H^G$ выполняются равенства

$$|C_b^{fa}| = |G|^{-1/2}.$$

Теорема 1. Пусть $f: G \rightarrow H$, где $G = (\mathbf{Z}/q)^n$, $H = (\mathbf{Z}/q)^t$ есть прямые суммы аддитивной группы $\mathbf{Z}/q$. Тогда имеет место равенство

$$Ad(f) = \frac{1}{|H|} \sum_{a \in H} \sum_{b \in G} C_b^{fa} |C_b^{fa}|^2. \quad (7)$$

Доказательство. Обозначим правую часть равенства (7) через X . Так как группа $\mathbf{Z}/q$ циклическая порядка q , то ее характер φ_u , соответствующий элементу u , определяется равенствами

$$\varphi_u(x) = e_1^{ux},$$

где e_1 есть фиксированный первообразный корень степени q из 1. Не теряя общности, можно считать, что для всех прямых слагаемых групп G , H используется один и тот же корень $e^{2\pi i/q}$. Тогда из (2) и (3) получаем, что

$$\begin{aligned} C_b^{fa} &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f_a(x) \bar{\eta}_b^G(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \chi_a(f(x)) \bar{\eta}_b^G(x) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} e^{(2\pi i/q)((a, f(x)) - (b, x))}, \end{aligned}$$

где для элементов $u = (u_1, \dots, u_r) \in (\mathbf{Z}/q)^r$, $v = (v_1, \dots, v_r) \in (\mathbf{Z}/q)^r$ под (u, v) понимается число $u_1 v_1 + \dots + u_r v_r \bmod q$. Учитывая, что элемент, сопряженный с корнем из 1, совпадает с обратным к нему, получим, что

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{|H||G|^3} \sum_{a \in H} \sum_{b \in G} e^{(2\pi i/q)((a, f(x) + f(y) - f(z)) - (b, x + y - z))} \\ &= \frac{1}{|H||G|^3} \sum_{a \in H} \sum_{x, y, z \in G} e^{(2\pi i/q)((a, f(x) + f(y) - f(z))} \sum_{b \in G} e^{-(2\pi i/q)(b, x + y - z)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Легко проверить, что для любого $u_1 \in \{1, \dots, q-1\}$ выполняется равенство

$$\exp\left\{\frac{2\pi i}{q} u_1 0\right\} + \exp\left\{\frac{2\pi i}{q} u_1 1\right\} + \dots + \exp\left\{\frac{2\pi i}{q} u_1 (q-1)\right\} = 0.$$

Следовательно, последняя сумма в (8) равна нулю при $x + y \neq z$, и равна $|G|$ при $x + y = z$. Учитывая этот факт и поменяв в (8) порядок суммирования, получим, что

$$X = \frac{1}{|H||G|^2} \sum_{x, y \in G} \sum_{a \in H} e^{(2\pi i/q)q(a, f(x) + f(y) - f(x+y))}.$$

По тем же соображениям, что и выше, последняя сумма равна 0, если $f(x) + f(y) \neq f(x + y)$, и равна $|H|$ в противном случае. Значит,

$$X = \frac{1}{|G|^2} \sum_{\substack{x, y \in G \\ f(x) + f(y) = f(x+y)}} 1 = Ad(f),$$

и теорема доказана.

Заметим, что формула (7) является весьма громоздкой: в ней участвует весь спектр рассматриваемой функции. Однако в качестве следствий из нее можно получить достаточно простые формулы для бент-функций.

Следствие 1. Если функция f из теоремы 1 является бент-функцией, то

$$Ad(f) = \begin{cases} \frac{1}{|H|} + \frac{|H| - 1}{|G||H|}, & f(0) = 0, \\ \frac{1}{|H|} - \frac{1}{|G||H|}, & f(0) \neq 0. \end{cases} \quad (9)$$

Доказательство. Введем обозначения $H \setminus \{0\} = H^*$. Согласно равенству (7)

$$\begin{aligned} Ad(f) &= \frac{1}{|H|} \sum_{a \in H} \sum_{b \in G} C_b^{f_a} |C_b^{f_a}|^2 \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{a \in H^*} \sum_{b \in G} C_b^{f_a} |G|^{-1} + \frac{1}{|H|} \sum_{b \in G} C_b^{f_0} |C_b^{f_0}|^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Из определения функции f_a видно, что $C_b^{f_0} = 0$, если $b \neq 0$ и $C_b^{f_0} = 1$, если $b = 0$. Отсюда следует, что

$$\sum_{b \in G} C_b^{f_0} |C_b^{f_0}|^2 = 1,$$

и поэтому

$$\sum_{a \in H^*} \sum_{b \in G} C_b^{f_a} = \sum_{a \in H} \sum_{b \in G} C_b^{f_a} - 1.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \sum_{a \in H} \sum_{b \in G} C_b^{f_a} &= \sum_{a \in H} \sum_{b \in G} \sum_{x \in G} \exp \left\{ \frac{2\pi i}{q} ((a, f(x)) - (b, x)) \right\} \\ &= \sum_{x \in G} \sum_{a \in H} \exp \left\{ \frac{2\pi i}{q} (a, f(x)) \right\} \sum_{b \in G} \exp \left\{ -\frac{2\pi i}{q} (b, x) \right\} \\ &= |G| \sum_{a \in H} \exp \left\{ \frac{2\pi i}{q} (a, f(0)) \right\}. \end{aligned}$$

Остается заметить, что

$$\begin{aligned} \sum_{a \in H} \exp \left\{ \frac{2\pi i}{q} (a, f(0)) \right\} &= 0, & f(0) \neq 0, \\ \sum_{a \in H} \exp \left\{ \frac{2\pi i}{q} (a, f(0)) \right\} &= |H|, & f(0) = 0. \end{aligned}$$

Подставив найденные величины в (10), получим доказываемое утверждение.

Замечание 1. Для случая $G = (\mathbf{Z}/q)^n$, $H = \mathbf{Z}/q$ формулы (7) и (8) совпадают с соответствующими формулами А. С. Амбросимова при $l = 2$ для функций от n переменных над $\mathbf{Z}/q$, а при $G = (\mathbf{Z}/p)^{nt}$, $H = (\mathbf{Z}/p)^t$ — с его формулами для функций от n переменных над полем $GF(p^t)$.

3. О коэффициентах аддитивности и аффинности для булевых функций

Так как в данном пункте будут рассматриваться только булевы функции, как правило, будем называть их просто функциями.

При изучении булевых функций из F_n в качестве G используется группа $(V_n; +)$, которая отождествляется с пространством V_n , а в качестве H используется аддитивная группа поля $P = GF(2)$.

Из утверждения 1 и следствия теоремы 1 получаем следующие утверждения для булевых функций.

Следствие 2. Для любой функции $f \in F_n$ имеют место следующие свойства коэффициента $Af(f)$:

- (1) $1/2 \leq Af(f) \leq 1$;
- (2) $Af(f) = 1 \iff f \in L_n$ или $f + 1 \in L_n$;
- (3) $Af(f) = Af(f + 1)$;
- (4) $Af(f) = Af(f + g)$ для всех $g(x) \in L_n$;
- (5) $Af(f(x)) = Af(f(\varphi(x)))$ для любого линейного преобразования φ пространства V_n .

Следствие 3. Для любой функции $f \in F_n$

$$Ad(f) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{3n-2}} \sum_{a \in V_n} (\Delta_a^f)^3.$$

Следствие 4. Если f — бент-функция из F_n , то

$$Af(f) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Для нахождения параметра $Ad(f)$, исходя из его определения, необходима проверка условия $f(a + b) = f(a) + f(b)$ для всех пар $(a, b) \in V_n^2$. Следующее утверждение позволяет уменьшить полный перебор, а также может оказаться полезным для решения некоторых других вопросов, связанных с коэффициентами аффинности и аддитивности функций.

Теорема 2. Пусть $f \in F_n$, $\|f\| = k$, $N_1^f = \{c_1, \dots, c_k\}$, M — множество из t неупорядоченных троек $\{a, b, c\}$ с элементами $a, b, c \in N_1^f \setminus \{0\}$, удовлетворяющими условию

$$a + b + c = 0. \quad (11)$$

Тогда при $i = f(0)$

$$\begin{aligned} Af(f) &= \max \left\{ \frac{6}{2^{2n}} \left(2^{n-1}k - (k-i)^2 + 4m - \frac{i}{3} \right), \right. \\ &\quad \left. 1 - \frac{6}{2^{2n}} \left(2^{n-1}k - (k-i)^2 + 4m - \frac{i}{3} \right) \right\}, \\ Ad(f) &= 1 - \frac{6}{2^{2n}} \left(2^{n-1}k - (k-i)^2 + 4m - \frac{i}{3} \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Введем обозначение

$$U_i = \{(a, b) \in V_n^2 : |\{a, b, a+b\} \cap N_1^f| = i\}, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Множество V_n^2 всех упорядоченных пар (a, b) элементов из V_n^2 разбивается на четыре попарно не пересекающихся подмножеств U_i , $i = 0, 1, 2, 3$.

Очевидно, что для пар $(a, b) \in U_0 \cup U_2$ и для пар $(a, b) \in U_1 \cup U_3$ выполняются соответственно равенства $f(a+b) = f(a) + f(b)$ и $f(a+b) = f(a) + f(b) + 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} Ad(f) &= \frac{|U_0 \cup U_2|}{2^{2n}}, \\ Af(f) &= \frac{\max(|U_0 \cup U_2|, |U_1 \cup U_3|)}{2^{2n}}. \end{aligned}$$

Так как

$$|U_0 \cup U_1 \cup U_2 \cup U_3| = 2^{2n}$$

и множества $U_0, \dots, U_3$ попарно не пересекаются, получаем, что

$$\begin{aligned} Ad(f) &= \frac{2^{2n} - |U_1 \cup U_3|}{2^{2n}}, \\ Af(f) &= \frac{\max(2^{2n} - |U_1 \cup U_3|, |U_1 \cup U_3|)}{2^{2n}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом, для вычисления $Af(f)$ достаточно найти $|U_1|$ и $|U_3|$.

Рассмотрим сначала случай, когда $f(0) = 0$, то есть N_1^f не содержит нулевого вектора.

Вычислим $|U_3|$. Из определения $|U_3|$ видно, что $(a, b) \in U_3$ в том и только том случае, когда элементы a, b содержатся в некоторой тройке из M . Так как N_1^f не содержит нулевого вектора, компоненты каждой из таких троек попарно различны. Поэтому из каждой тройки $\{a, b, c\}$ получается 6 пар из U_3 : (a, b) , (a, c) , (b, c) , (c, b) , (c, a) , (b, a) . Следовательно, $|U_3| = 6m$.

Вычислим $|U_1|$. Найдем сначала число N неупорядоченных троек $\{a, b, c\}$ с различными ненулевыми компонентами из V_n и с нулевой суммой, в которых ровно одна компонента содержится в N_1^f . Заметим, что для каждого $c_t \in N_1^f$ существует ровно 2^{n-1} неупорядоченных пар $\{a, b\}$ таких, что $a+b = c_t$ (это пары вида $\{a, a+c_t\}$). Обозначим множество всех таких пар через M_t . Нас интересуют лишь те из них, в которых $a, b \notin N_1^f$. В связи с этим найдем сначала число пар $\{a, b\}$, в которых $a, b \in N_1^f$. Обозначим через d_t число соотношений вида (12), в которые входит c_t . Каждое такое соотношение дает одну неупорядоченную пару $\{c_r, c_s\} \in M_t$. Всего же получим d_t таких пар. Удалив из M_t

эти пары, а также пару $\{0, c_t\}$, получим $2^{n-1} - (d_t + 1)$ пар, а значит, и столько же неупорядоченных троек $\{a, b, c_t\}$, в которых $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $a \notin N_1^f$ или $b \notin N_1^f$. Суммируя числа $2^{n-1} - (d_t + 1)$ по $t \in \{1, \dots, k\}$, получим $(2^{n-1} - 1)k - (d_1 + \dots + d_k)$. Сумма $d_1 + \dots + d_k$ равна числу вхождений всех букв из N_1^f в тройки из M , и значит, равна $3m$.

Таким образом, получено множество T из $(2^{n-1} - 1)k - 3m$ троек вида $\{a, b, c_i\}$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Из его построения видно, что оно содержит все тройки с попарно различными компонентами и с нулевой суммой компонент, в которых c_i пробегает множество N_1^f , а элементы a и b отличны от 0, и либо оба вектора a, b не принадлежат N_1^f , либо только один из них принадлежит N_1^f , причем в последнем случае каждая тройка получена дважды. Действительно, если тройка $\{a, c_i, c_j\} \in T$, то она получена один раз при $t = i$ и один раз при $t = j$. Подсчитаем теперь число троек в T с ровно двумя различными компонентами из N_1^f . Заметим, что при любых двух компонентах $c_i, c_j \in N_1^f$ тройки с нулевой суммой компонент ее третья компонента определяется однозначно. Однако она может принадлежать или не принадлежать N_1^f . Так как пара векторов c_i, c_j может входить лишь в одну тройку из M , при всех возможных парах различных индексов i, j получим m различных троек с тремя компонентами из N_1^f , причем каждая такая тройка будет получена трижды, так как тройка $\{c_r, c_i, c_j\}$ будет получена при трех различных сочетаниях из чисел r, i, j по 2. Отсюда следует, что число различных троек в M равно $\binom{k}{2} - 3m$, и

$$N = (2^{n-1} - 1)k - 3m - 2 \left(\binom{k}{2} - 3m \right) = (2^{n-1} - k)k + 3m.$$

Заметим теперь, что из каждой полученной тройки $\{a, b, c\}$ получается 6 пар из множества U_1 . Следовательно,

$$|U_1| = 6((2^{n-1} - k)k + 3m). \quad (13)$$

Из полученных результатов находим, что

$$|U_1| + |U_3| = 6((2^{n-1} - k)k + 4m). \quad (14)$$

Из (12) и (14) следуют утверждения теоремы в рассматриваемом случае.

Пусть теперь $f(0) = 1$, то есть N_1^f содержит нулевой вектор 0. Тогда все пары из U_3 без нулевых компонент строятся по тройкам из M , а пары, содержащие нулевые компоненты, — по тройкам $\{c_i, c_i, 0\}$, $i = 1, \dots, k$. При этом получится из каждой тройки без нулей 6 пар, из тройки $\{c_i, c_i, 0\}$ 3 пары при $c_i \neq 0$ и одна пара при $c_i = 0$. В итоге получаем, что

$$|U_3| = 6m + 3(k - 1) + 1.$$

Для нахождения числа $|U_1|$ можно поступить следующим образом. Сначала, как и в рассмотренном выше случае, найдем все тройки из U_1 , содержащие по одному ненулевому вектору из N_1^f . Так как число таких элементов равно $k - 1$, в соответствии с формулой (13) число полученных троек равно $6((2^{n-1} - (k - 1))(k - 1) + 3m)$.

Теперь найдем все тройки из U_1 , содержащие нулевые компоненты. Они исчерпываются $2^n - k$ тройками $\{a, a, 0\}$, где $a \neq c_i$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Из каждой такой тройки получается 3 пары из U_1 : (a, a) , $(a, 0)$, $(0, a)$. В итоге получаем, что

$$\begin{aligned} |U_1| &= 6((2^{n-1} - (k - 1))(k - 1) + 3m) + 3(2^n - k), \\ |U_1 \cup U_3| &= 6(2^{n-1}k - (k - 1)^2 + 4m - 1/3). \end{aligned}$$

Отсюда следуют утверждения теоремы в рассматриваемом случае. В итоге теорема 2 полностью доказана.

Из условий теоремы видно, что показатель аффинности функции f определяется тремя ее параметрами: числом переменных n , весом k и числом соотношений вида (11) между ненулевыми векторами, на которых значение функции равно единице, далее это число соотношений будем обозначать через $m(f)$.

4. Булевы функции с минимальным коэффициентом аффинности

Согласно следствиям 2 и 3, $Af(f) \geq 1/2$ для любой функции $f \in F_n$ и весьма близок к $1/2$ для бент-функций. С точки зрения криптографических применений представляется интересной задача описания класса булевых функции с наименьшим значением параметра $Af(f)$ в классе функций из F_n веса k . В частности интересно знать, достигается ли для функций $f \in F_n$ оценка $1/2$, и существуют ли функции с меньшим коэффициентом аффинности, чем для бент-функций?

Оказывается, что оценка $1/2$ не достигается. Именно, справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. Для любой функции $f \in F_n$ веса k имеют место неравенства

$$Af(f) \geq \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2n-3}}, & f(0) = 0, k \equiv 0 \pmod{2}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2n-3}} - \frac{3}{2^{2n-1}}, & f(0) = 0, k \equiv 1 \pmod{2}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2n-3}}, & f(0) = 1, k \equiv 0 \pmod{2}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2n-3}} + \frac{3}{2^{2n-1}}, & f(0) = 1, k \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases}$$

причем достигаются указанные оценки могут лишь при

$$m = m_0 + \Delta,$$

где

$$m_0 = \frac{2^{2n-4}}{3} - \frac{(2^{n-1} - k)k}{4}$$

и

$$\Delta \in \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{7}{12}, -\frac{2k-1}{4} + \frac{5}{12}, -\frac{2k-1}{4} + \frac{2}{3} \right\}.$$

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что для функции $f \in F_n$, $f(0) = 0$, коэффициент аффинности может принять наименьшее значение $1/2$ лишь при таком $m(f) = m$, которое удовлетворяет равенству

$$\frac{6}{2^{2n}}((2^{n-1} - k)k + 4m) = 1 - \frac{6}{2^{2n}}((2^{n-1} - k)k + 4m).$$

Решая это уравнение относительно m , получим $m = m_0$. Очевидно, что это число m не является целым. Поэтому в данном случае оценка $1/2$ не достигается, и $\min\{Af(f)\}$ может получиться лишь при $m(f) = [m]$, или $m(f) = [m] + 1$, где $[m]$ есть целая часть числа m . Легко видеть, что при четном и нечетном k величина $[m]$ равна соответственно $(2^{2n-4} - 1)/3 - ((2^{n-1} - k)k)/4$ и $(2^{2n-4})/3 - ((2^{n-1} - k)k)/4 - 7/12$.

Аналогично, в случае $f(0) = 1$, решая уравнение

$$\frac{6}{2^{2n}} \left(2^{n-1}k - (k-1)^2 + 4m - \frac{1}{3} \right) = 1 - \frac{6}{2^{2n}} \left(2^{n-1}k - (k-1)^2 + 4m - \frac{1}{3} \right),$$

получим, что

$$[m] = \left\lfloor \frac{2^{2n-4}}{3} - \frac{(2^{n-1} - k)k + 2k - 1}{4} + \frac{1}{12} \right\rfloor,$$

что при четном и нечетном k равно $(2^{2n-4})/3 - ((2^{n-1} - k)k + 2k - 1)/4 - 7/12$ и $(2^{2n-4})/3 - ((2^{n-1} - k)k + 2k - 1)/4 - 1/3$ соответственно.

Вычисляя теперь во всех случаях $Af(f)$ при найденных значениях $m(f) = [m]$ и $m(f) = [m] + 1$, и выбирая в каждом случае минимальное значение $Af(f)$, получим соотношения из предложения 2.

Наиболее интересными для приложений являются случаи, когда $\|f\| = 2^{n-1}$, то есть функция является равновероятной (сбалансированной), или $\|f\| = 2^{n-1} - 2^{n/2-1}$, как у бент-функций. Из предложения 2 в этих случаях получаем следующее следствие.

Следствие 5. Пусть $f \in F_n$, $f(0) = 0$ и $n > 3$. Тогда

- (а) если $\|f\| = 2^{n-1}$, то для наименьшего значения величины $Af(f)$ выполняется неравенство

$$Af(f) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2n-3}}, \quad (15)$$

и эта оценка может достигаться лишь при условии, что

$$m = \left\lfloor \frac{2^{2n-4}}{3} \right\rfloor = \frac{2^{2n-4} - 1}{3};$$

- (б) если $\|f\| = 2^{n-1} - 2^{n/2-1}$, то для наименьшего значения величины $Af(f)$ выполняется неравенство (15), и эта оценка может достигаться лишь при

$$m = \frac{2^{2n-4} - 1}{3} - 2^{n-4}(2^{n/2} - 1).$$

Таким образом, для поиска булевых функций с наименьшим коэффициентом аффинности необходимо уметь строить функции с указанным в предложении 2 числом троек m . Вопрос о существовании таких значений параметра m в общем случае остается открытым. Для $n = 4, 6$ примеры таких функций имеются.

Пример 1. Пусть $n = 4$, $k = 6$. Если $N_1^f = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$, система $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ линейно независима, $c_5 = c_1 + c_2$, $c_6 = c_3 + c_4$, то $Af(f) = 1/2 + 1/32 = 0,53125$, что совпадает с минимальным значением из части (б) следствия 5.

Заметим, что к таким функциям относится бент-функция $x_1x_2 \oplus x_3x_4$.

Вместе с тем, такой же коэффициент аффинности могут иметь и не бент-функции.

Пример 2. Пусть $n = 4$, $k = 4$. Если $N_1^f = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, где система $\{c_1, c_2, c_3\}$ линейно независима, $c_4 = c_1 + c_2$, то $Af(f) = 1/2 + 1/32 = 0,53125$.

Пример 3. Пусть $n = 6$, $k = 28$, $N_1^g = W_1 \cup W_2$, где

$$W_1 = \{3, 7, 11, 12, 13, 14, 15, 19, 21, 23, 27, 28, 29, 30\},$$

$$W_2 = \{32, 33, 38, 39, 42, 44, 45, 49, 50, 54, 57, 58, 61, 63\}.$$

Для этой функции $\|g\| = 28$ и $Af(g) = 1/2 + 1/2^9$ минимален.

Пример 3 свидетельствует о том, что для $n = 6$ коэффициент аффинности бент-функций не является минимальным, так как, согласно предложению 2, он для $n = 6$ равен $1/2 + 1/2^7$.

5. Коэффициент аффинности булевой мультилинейной функции

В данном параграфе решается задача вычисления коэффициента аффинности для функций из класса мультилинейных функций.

Определение 3 ([2]). Функция $f \in F_n$ называется мультиаффинной, если она представляется в виде

$$f(x) = \bigwedge_{i=1}^k ((a_i, x) + b_i), \quad (16)$$

где $x, a_i \in V_n$, $b_i \in P$, $1 \leq k \leq 2^n$.

Функции вида (16), при $b_1 = \dots = b_k = 0$ будем называть мультилинейными.

Изучим, как устроен набор коэффициентов статистической структуры мультилинейной функции.

Лемма 1. Пусть

$$f(x) = \prod_{i=1}^k (a_i, x);$$

пусть $(a_1, \dots, a_r)$, $r \leq k$, — максимальная линейно независимая подсистема системы векторов $(a_1, \dots, a_k)$,

$$a_j = \sum_{i=1}^r c_i^j a_i, \quad j \in \{r+1, \dots, k\},$$

и $c_j = (c_1^j, \dots, c_r^j)$. Тогда

$$f(x) = \begin{cases} \prod_{i=1}^r (a_i, x) & \text{если } \|c_j\| \equiv 1 \pmod{2} \text{ для всех } j \in \{r+1, \dots, k\}, \\ 0 & \text{если найдется } j \in \{r+1, \dots, k\} \text{ такое, что } \|c_j\| \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть существует вектор c_j , $j \in \{r+1, \dots, k\}$, четного веса. Представим функцию f в виде

$$f(x) = \prod_{i=1}^r (a_i, x) (a_j, x) \prod_{\substack{i=r+1 \\ i \neq j}}^k (a_i, x). \quad (17)$$

Вектор a_j линейно выражается через систему векторов $(a_1, \dots, a_r)$, поэтому равенство (17) можно записать в виде

$$f(x) = \prod_{i=1}^r (a_i, x) \left(\sum_{l=1}^r (c_l^j a_l, x) \right) \prod_{\substack{i=r+1 \\ i \neq j}}^k (a_i, x).$$

Поскольку вектор c_j четного веса, верно равенство

$$\prod_{i=1}^r (a_i, x) \left(\sum_{l=1}^r (c_l^{j'} a_l, x) \right) = 0,$$

и поэтому функция $f = 0$.

Если вес c_j нечетен для всех $j \in \{r+1, \dots, k\}$, то для любого такого j

$$\prod_{i=1}^r (a_i, x) \left(\sum_{l=1}^r (c_l^j a_l, x) \right) = \prod_{i=1}^r (a_i, x),$$

и поэтому справедливо равенство

$$f(x) = \prod_{i=1}^r (a_i, x).$$

Лемма доказана.

Для спектра функции $\prod_{i=1}^r (a_i, x)$ справедливо следующее утверждение.

Предложение 3. (а) Пусть

$$f(x) = \prod_{i=1}^r (a_i, x),$$

система векторов $\alpha = (a_1, \dots, a_r)$ линейно независима,

$$a = \sum_{i=1}^r c_i a_i \in V_n,$$

и $c = (c_1, \dots, c_r)$. Тогда

$$\Delta_a^f = \begin{cases} 2^{n-1} - 2^{n-r}, & a = 0, \\ 2^{n-r}, & \|c\| \equiv 0 \pmod{2}, a \neq 0, \\ -2^{n-r}, & \|c\| \equiv 1 \pmod{2}, a \neq 0. \end{cases}$$

(б) Если $a \in V_n$ и система $(a_1, \dots, a_r, a)$ линейно независима, то $\Delta_a^f = 0$.
При этом числа равных элементов спектра находятся по формулам

$$\begin{aligned} |\{a \in V_n: \Delta_a^f = 2^{n-1} - 2^{n-r}\}| &= 1; \\ |\{a \in V_n: \Delta_a^f = 2^{n-r}\}| &= 2^{r-1}; \\ |\{a \in V_n: \Delta_a^f = -2^{n-r}\}| &= 2^{r-1} - 1; \\ |\{a \in V_n: \Delta_a^f = 0\}| &= 2^n - 2^r. \end{aligned}$$

Доказательство. Воспользуемся определением коэффициента статистической структуры в форме (1).

Так как система α линейно независима, верно равенство $\|f\| = 2^{n-r}$, и в случае $a = 0$ утверждение верно. Вычислим вес функции $f(x)(a, x)$ при $a \neq 0$.

Из доказательства леммы 1 следует система равенств

$$f(x)(a, x) = \begin{cases} \prod_{i=1}^r (a_i, x) & \text{в случае (а) при } \|c\| \equiv 1 \pmod{2}, \\ 0 & \text{в случае (а) при } \|c\| \equiv 0 \pmod{2}, \\ \prod_{i=1}^r (a_i, x)(a, x) & \text{in case (b).} \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\|f(x)(a, x)\| = \begin{cases} 2^{n-r} & \text{в случае (а) при } \|c\| \equiv 1 \pmod{2}, \\ 0 & \text{в случае (а) при } \|c\| \equiv 0 \pmod{2}, \\ 2^{n-(r+1)} & \text{в случае (б).} \end{cases}$$

Подставляя полученные значения в формулу (1), получим искомые равенства для коэффициентов статистической структуры функции $f(x)$. Из них нетрудно вычислить и кратности каждого из элементов спектра функции f . В итоге утверждение доказано.

Пользуясь значениями коэффициентов статистической структуры функции f , вычислим величину коэффициента аффинности произвольной мультилинейной функции.

Предложение 4. Пусть

$$f(x) = \prod_{i=1}^k (a_i, x),$$

и $(a_1, \dots, a_r)$, $r \leq k \leq 2^n$, есть максимальная линейно независимая подсистема системы векторов $(a_1, \dots, a_k)$. Тогда в обозначениях леммы 1

$$Af(f) = \max \left\{ \frac{1}{2} \pm \frac{2^{2r-2} - 3(2^{r-1} - 1)}{2^{2r-1}} \right\}$$

если $\|c_j\| \equiv 1 \pmod{2}$ для всех $j \in \{r+1, \dots, k\}$, и $Af(f) = 1$, если найдется $j \in \{r+1, \dots, k\}$ такое, что $\|c_j\| \equiv 0 \pmod{2}$.

Справедливость предложения 4 следует из леммы 1, предложения 3 и следствия 3.

6. Коэффициент аффинности функций, близких к бент-функциям

Рассмотрим задачу нахождения коэффициента аффинности функции, отличающейся от бент-функции на фиксированном наборе векторов. Для двух различных функций $f, g \in F_n$ введем обозначения

$$V_n^{(0)}(f, g) = \{x \in V_n : f(x) = g(x)\},$$

$$V_n^{(1)}(f, g) = V_n \setminus V_n^{(0)}(f, g),$$

и установим связь между коэффициентами $Ad(f)$ и $Ad(g)$.

Для этого нам потребуется понятие автокорреляционной функции для булевой функции (см., например, [3]).

Определение 4. Автокорреляционной функцией функции $f \in F_n$ называется функция $\Delta_f : V_n \rightarrow \mathbf{Z}$, определенная формулой

$$\Delta_f(u) = \sum_{x \in V_n} (-1)^{f(x+u)+f(x)}.$$

Предложение 5. Для любых различных функций $f, g \in F_n$

$$\begin{aligned} & Ad(f) - Ad(g) \\ &= \frac{3}{2^{2n}} \sum_{z \in V_n^{(1)}(f, g)} (-1)^{f(z)} \Delta_f(z) \\ &\quad - \frac{3}{2^{2n-1}} \sum_{z \in V_n^{(1)}(f, g)} \sum_{y \in V_n^{(1)}(f, g)} (-1)^{f(z)+f(y)+f(z+y)} \\ &\quad + \frac{1}{2^{3n-2}} \sum_{x \in V_n^{(1)}(f, g)} \sum_{y \in V_n^{(1)}(f, g)} \sum_{z \in V_n^{(1)}(f, g)} (-1)^{f(z)+f(y)+f(x)} \sum_{\alpha \in V_n} (-1)^{(\alpha, z+y+x)}. \end{aligned}$$

Доказательство. В соответствии с формулой (17),

$$Ad(f) - Ad(g) = \frac{1}{2^{3n-2}} \sum_{a \in V_n} ((\Delta_a^f)^3 - (\Delta_a^g)^3).$$

Вычислим величину одного слагаемого при любом фиксированном значении вектора a . По формуле разности кубов

$$(\Delta_a^f)^3 - (\Delta_a^g)^3 = (\Delta_a^f - \Delta_a^g)((\Delta_a^f)^2 + \Delta_a^f \Delta_a^g + (\Delta_a^g)^2).$$

По определению 4, учитывая, что $\Delta_a^f - \Delta_a^g = 0$ при $a \in V_n^{(0)}(f, g)$, получим, что

$$\begin{aligned} \Delta_a^f - \Delta_a^g &= \frac{1}{2} \left(\sum_{x \in V_n^{(1)}(f, g)} ((-1)^{f(x)+(a, x)} - (-1)^{g(x)+(a, x)}) \right) \\ &= \sum_{x \in V_n^{(1)}(f, g)} (-1)^{f(x)+(a, x)}. \end{aligned}$$

Проводя аналогичные рассуждения, вычислим второй сомножитель:

$$(\Delta_a^f)^2 + \Delta_a^f \Delta_a^g + (\Delta_a^g)^2 = \frac{3}{4} \sum_{x \in V_n^{(0)}(f,g)} \sum_{y \in V_n^{(0)}(f,g)} (-1)^{f(x)+f(y)+(a,x+y)} + \frac{1}{4} \sum_{x \in V_n^{(1)}(f,g)} \sum_{y \in V_n^{(1)}(f,g)} (-1)^{f(x)+f(y)+(a,x+y)}. \quad (18)$$

Полученную формулу можно упростить. Обозначим

$$c_{x,y} = (-1)^{f(x)+f(y)+(a,x+y)}.$$

Прибавим к сумме $\sum_{x \in V_n^{(0)}(f,g)} \sum_{y \in V_n^{(0)}(f,g)} c_{x,y}$ и вычтем из нее одну и ту же величину $\sum_{x \in V_n^{(0)}(f,g)} \sum_{y \in V_n^{(1)}(f,g)} c_{x,y} + \sum_{x \in V_n^{(1)}(f,g)} \sum_{y \in V_n^{(0)}(f,g)} c_{x,y} + \sum_{x \in V_n^{(1)}(f,g)} \sum_{y \in V_n^{(1)}(f,g)} c_{x,y}$. Тогда, в соответствии с определением коэффициента статистической структуры булевой функции, получим, что

$$\sum_{x \in V_n^{(0)}(f,g)} \sum_{y \in V_n^{(0)}(f,g)} c_{x,y} = 4(\Delta_a^f)^2 - 2 \sum_{x \in V_n^{(0)}(f,g)} \sum_{y \in V_n^{(1)}(f,g)} c_{x,y} - \sum_{x \in V_n^{(1)}(f,g)} \sum_{y \in V_n^{(1)}(f,g)} c_{x,y}.$$

Произведя соответствующую замену в формуле (18), получим равенство

$$(\Delta_a^f)^2 + \Delta_a^f \Delta_a^g + (\Delta_a^g)^2 = \frac{1}{4} \left(12(\Delta_a^f)^2 - 6 \sum_{x \in V_n^{(0)}(f,g)} \sum_{y \in V_n^{(1)}(f,g)} c_{x,y} - 2 \sum_{x \in V_n^{(1)}(f,g)} \sum_{y \in V_n^{(1)}(f,g)} c_{x,y} \right). \quad (19)$$

Преобразуем правую часть (19) к виду $3(\Delta_a^f)^2 - 3\Delta_a^f \sum_{y \in V_n^{(1)}(f,g)} (-1)^{f(y)+(a,y)} + \sum_{x \in V_n^{(1)}(f,g)} \sum_{y \in V_n^{(1)}(f,g)} (-1)^{f(x)+f(y)+(a,x+y)}$ и получим

$$(\Delta_a^f)^3 - (\Delta_a^g)^3 = \sum_{z \in V_n^{(1)}(f,g)} (-1)^{f(z)+(a,z)} \left(3(\Delta_a^f)^2 - 3\Delta_a^f \sum_{y \in V_n^{(1)}(f,g)} (-1)^{f(y)+(a,y)} + \sum_{x \in V_n^{(1)}(f,g)} \sum_{y \in V_n^{(1)}(f,g)} (-1)^{f(x)+f(y)+(a,x+y)} \right).$$

Просуммируем полученное выражение по всем значениям вектора a . Для этого вычислим предварительно суммы

$$S_1 = \sum_{a \in V_n} \sum_{z \in V_n^{(1)}(f,g)} (-1)^{f(z)+(a,z)} (\Delta_a^f)^2, \\ S_2 = \sum_{a \in V_n} \sum_{z \in V_n^{(1)}(f,g)} \sum_{y \in V_n^{(1)}(f,g)} (f,g) (-1)^{f(z)+f(y)+(a,z+y)} \Delta_a^f.$$

Используя формулу разложения функции f по характерам группы V_n над полем комплексных чисел, получим, что

$$S_1 = \frac{1}{4} \sum_{x \in V_n} \sum_{y \in V_n} \sum_{z \in V_n^{(1)}(f,g)} (-1)^{f(x)+f(y)+f(z)} \sum_{a \in V_n} (-1)^{(a,x+y+z)},$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \sum_{x \in V_n} \sum_{y \in V_n^{(1)}(f,g)} \sum_{z \in V_n^{(1)}(f,g)} (-1)^{f(x)+f(y)+f(z)} \sum_{a \in V_n} (-1)^{(a,x+y+z)}.$$

Сумма $\sum_{a \in V_n} (-1)^{(a,x+y+z)}$ равна 2^n в случае $x + y + z = 0$ и 0 в остальных случаях. Учитывая данное свойство, приходим к формулам

$$S_1 = \frac{2^n}{4} \sum_{z \in V_n^{(1)}(f,g)} (-1)^{f(z)} \Delta_f(z),$$

$$S_2 = 2^{n-1} \sum_{z \in V_n^{(1)}(f,g)} \sum_{y \in V_n^{(1)}(f,g)} (-1)^{f(z)+f(y)+f(z+y)}.$$

Умножив найденные выражения на соответствующие коэффициенты, получим доказываемое предложение.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Следствие 6. Если множество $V_n^{(1)}(f, g)$ является подпространством в V_n , то

$$Ad(f) - Ad(g) = \frac{3}{2^{2n}} \sum_{z \in V_n^{(1)}(f,g)} (-1)^{f(z)} \Delta_f(z) - \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{z \in V_n^{(1)}(f,g)} \sum_{y \in V_n^{(1)}(f,g)} (-1)^{f(z)+f(y)+f(z+y)}.$$

Пусть далее f — бент-функция. Тогда

$$\frac{3}{2^{2n}} \sum_{z \in V_n^{(1)}(f,g)} (-1)^{f(z)} \Delta_f(z) = \begin{cases} \frac{3}{2^n} (-1)^{f(0)} & 0 \in V_n^{(1)}(f, g), \\ 0 & 0 \notin V_n^{(1)}(f, g). \end{cases}$$

Для любого значения $i \in \{1, \dots, 2^{n-1}\}$ зафиксируем $2^n - i$ векторов. Функцию, совпадающую с бент-функцией f на данном наборе векторов обозначим через f_i . Отметим, что дальнейшие рассуждения не зависят от набора фиксируемых векторов.

Для значений параметра $i = 1, 2, 3$ вычислим значение разности коэффициентов аддитивности.

Следствие 7. Если f — бент-функция, то

$$Ad(f) - Ad(f_1) = \begin{cases} \frac{3 \cdot 2^{n-1} - 1}{2^{2n-1}} (-1)^{f(0)}, & V_n^{(1)}(f, f_1) = \{0\}, \\ -\frac{3}{2^{2n-1}} (-1)^{f(0)}, & V_n^{(1)}(f, f_1) = \{\gamma\}; \end{cases}$$

$$Ad(f) - Ad(f_2) = \begin{cases} \frac{3 \cdot 2^{n-1} - 4}{2^{2n-1}} (-1)^{f(0)}, & V_n^{(1)}(f, f_2) = \{0, \gamma\}, \\ -\frac{6}{2^{2n-1}} ((-1)^{f(0)} + (-1)^{f(\gamma_1)+f(\gamma_2)+f(\gamma_1+\gamma_2)}), & V_n^{(1)}(f, f_2) = \{\gamma_1, \gamma_2\}; \end{cases}$$

и

$$Ad(f) - Ad(f_3) = \begin{cases} \frac{3 \cdot 2^{n-1} - 7}{2^{2n-1}} (-1)^{f(0)} - \frac{6}{2^{2n-1}} (-1)^{f(\gamma_1)+f(\gamma_2)+f(\gamma_1+\gamma_2)}, & V_n^{(1)}(f, f_3) = \{0, \gamma_1, \gamma_2\}, \\ -\frac{3}{2^{2n-1}} ((-1)^{f(0)} + 2(-1)^{f(\gamma_1)+f(\gamma_2)+f(\gamma_3)}), & V_n^{(1)}(f, f_3) = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}, \\ & \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_3, \\ -\frac{3}{2^{2n-1}} (3(-1)^{f(0)} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (-1)^{f(\gamma_3)+f(\gamma_j)+f(\gamma_3+\gamma_j)}), & V_n^{(1)}(f, f_3) = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\} \\ & \gamma_1 + \gamma_2 \neq \gamma_3. \end{cases}$$

Список литературы

1. Амбросимов А. С., Свойства бент-функций q -значной логики над конечными полями. *Дискретная математика* (1994) **6**, №3, 50–60.
2. Горшков С. П., Применение теории NP -полных задач для оценки сложности решения систем булевых уравнений. *Обзорные прикладной и промышленной математики* (1995) **2**, 325–399.
3. Логачев О. А., Сальников А. А., Ященко В. В., *Булевы функции в теории кодирования и криптологии*. МЦНМО, Москва, 2004.
4. Солодовников В. И., Бент-функции из конечной абелевой группы в конечную абелеву группу. *Дискретная математика* (2002) **14**, №1, 99–113.
5. Bellare M., Goldwasser S., Lund C., Russell A., Efficient probabilistic checkable proofs and applications to approximation. In: *Proc. STOC'94*. ACM, New York, 1994, p. 820.
6. Bellare M., Coppersmith D., Hastad J., Kiwi M., Sudan M., Linearity testing in characteristic two. *IEEE Trans. Inform. Theory* (1996) **42**, 1781–1795.
7. Blum M., Luby M., Rubinfeld R., Self-testings/correcting with applications to numerical problems. *J. Comput. Syst. Sci.* (1993) **47**, 549–595.
8. Golomb S. W., On classification of Boolean functions. *IRE Trans. Circuit Theory* (1959) **6**, 176–186.
9. Kaufman T., Litsyn S., Xie N., Breaking the ϵ -soundness bound of the linearity test over $GF(2)$. *SIAM J. Comput.* (2010) **39**, 1998–2003.

Статья поступила 13.12.2011.