Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Потапов, Д. С. Кротов, О числе n -арных квазигрупп конечного порядка, *Дискрет. матем.*, 2012, том 24, выпуск 1, 60–69

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1172>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 13:28:38

О числе n -арных квазигрупп конечного порядка

© 2012 г. В. Н. Потапов, Д. С. Кротов

Пусть $Q(n, k)$ — число n -арных квазигрупп порядка k . Получена рекуррентная формула для чисел $Q(n, 4)$. Доказано, что при любых $n \geq 2$ и $k \geq 5$ справедливы неравенства

$$((k-3)/2)^{n/2}((k-1)/2)^{n/2} < \log_2 Q(n, k) \leq c_k(k-2)^n,$$

где c_k не зависит от n . Таким образом, верхняя асимптотическая граница для чисел $Q(n, k)$ улучшена при любых $k \geq 5$, нижняя — при нечетных $k \geq 7$.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт №02.740.11.0429) и Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 08–01–00671, 08–01–00673, 10–01–00616.

1. Введение

Алгебраическая система из множества Σ мощности $|\Sigma| = k$ и n -арной операции $f: \Sigma^n \rightarrow \Sigma$ называется n -арной квазигруппой порядка k , если унарная операция, полученная фиксацией любых $n-1$ аргументов операции f любыми значениями из Σ , всегда является биекцией. Принято называть n -арной квазигруппой порядка k или n -квазигруппой порядка k также и соответствующую функцию f (таблица значений такой функции известна под названием латинский гиперкуб, в случае $n = 2$ — латинский квадрат).

Зафиксируем множество элементов $\Sigma = \{0, 1, \dots, k-1\}$. Обозначим через $Q(n, k)$ число различных n -арных квазигрупп порядка k (при фиксированном Σ). Иногда под числом квазигрупп подразумевают число попарно неизоморфных квазигрупп. Известно, что для каждого n существует только две n -арных квазигруппы порядка 2. Имеется $Q(n, 3) = 3 \cdot 2^n$ различных n -арных квазигрупп порядка 3, которые составляют единственный класс эквивалентности. В [1] доказано асимптотическое равенство

$$Q(n, 4) = 3^{n+1}2^{2n+1}(1 + o(1))$$

при $n \rightarrow \infty$. В настоящей работе (в разделе 4) предложен рекуррентный способ вычисления чисел $Q(n, 4)$, выписаны первые 8 значений этой величины. Ранее были известны только пять первых значений $Q(n, 4)$, кроме того, известны числа $Q(n, 5)$ и $Q(n, 6)$ для $n \leq 5$ и $n \leq 3$ соответственно (см. [9]) и число $Q(2, k)$ при $k \leq 11$ (см. [8] и библиографию в ней).

Асимптотика числа и даже логарифма числа (и даже логарифма логарифма числа) n -арных квазигрупп порядков, больших 4, неизвестна. В [7] получены следующие нижние

оценки:

$$\begin{aligned} Q(n, 5) &\geq 2^{3^{n/3}-c}, & c < 0,072; \\ Q(n, k) &\geq 2^{(k/2)^n}, & k \text{ четно}; \\ Q(n, k) &\geq 2^{n(k/3)^n}, & k \text{ кратно трем}; \\ Q(n, k) &\geq 2^{\frac{3}{2}\lfloor k/3 \rfloor^n}. \end{aligned}$$

В [4] для числа n -арных квазигрупп порядка k была предложена верхняя оценка

$$Q(n, k) \leq 3^{(k-2)^n} 2^{n(k-2)^{n-1}}.$$

В разделе 2 настоящей статьи усилена верхняя оценка числа n -арных квазигрупп конечного порядка и в раздел 3 усилена нижняя оценка числа n -арных квазигрупп нечетного порядка

$$\left(\frac{k-3}{2}\right)^{n/2} \left(\frac{k-1}{2}\right)^{n/2} \log_2 Q(n, k) \leq c_k (k-2)^n,$$

где c_k не зависит от n , точнее,

$$c_k = \frac{\log_2 k!}{k-2} + \frac{k}{k-4}.$$

2. Верхняя оценка

Будем говорить, что множество $M \subseteq \Sigma^n$ удовлетворяет свойству (A), если для любого элемента $\bar{x}$ из M и каждой позиции $i = 1, \dots, n$ найдется другой элемент $\bar{y}$ из M , отличающийся от $\bar{x}$ только в позиции i . По индукции легко получить следующее утверждение.

Предложение 1. Любое непустое подмножество $C \subseteq \Sigma^n$, удовлетворяющее свойству (A), имеет мощность не менее 2^n .

Частичной n -арной квазигруппой порядка $|\Sigma|$ называется функция $g: \Omega \rightarrow \Sigma$, где $\Omega \subset \Sigma^n$, удовлетворяющая следующему свойству: $g(\bar{x}) \neq g(\bar{y})$ для любых двух наборов $\bar{x}, \bar{y} \in \Omega$, отличающихся ровно в одной позиции. Будем говорить, что n -арная квазигруппа $f: \Sigma^n \rightarrow \Sigma$ является продолжением частичной n -арной квазигруппы $g: \Omega \rightarrow \Sigma$, где $\Omega \subset \Sigma^n$, если $f|_{\Omega} \equiv g$.

Лемма 1. Пусть $|\Sigma| = k$, $B = \Sigma \setminus \{a, b\}$, $k \geq 3$, $a, b \in \Sigma$. Тогда частичная n -арная квазигруппа $g: \Sigma^{n-1} \times B \rightarrow \Sigma$ имеет не более чем $2^{(k/2)^{n-1}}$ различных продолжений.

Доказательство. Пусть P — множество неупорядоченных пар элементов множества Σ . Рассмотрим частичную n -арную квазигруппу $g: \Sigma^{n-1} \times B \rightarrow \Sigma$. Определим функцию $G: \Sigma^{n-1} \rightarrow P$ равенством

$$G(\bar{x}) = \Sigma \setminus \{g(\bar{x}c) : c \in \Sigma \setminus \{a, b\}\}.$$

Определим граф $\Gamma = (\Sigma^{n-1}, E)$, в котором две вершины $\bar{x}$ и $\bar{y}$ соединены ребром тогда и только тогда, когда наборы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ отличаются только в одной позиции и $G(\bar{x}) \cap G(\bar{y}) \neq \emptyset$. Нетрудно видеть, что компоненты связности графа Γ удовлетворяют свойству (A).

Пусть n -арные квазигруппы f_1 и f_2 являются продолжениями частичной n -арной квазигруппы g . Нетрудно видеть, что

$$\{f_1(\bar{x}a), f_1(\bar{x}b)\} = G(\bar{x})$$

для любого $\bar{x} \in \Sigma^{n-1}$, причем, если $f_1(\bar{x}a) = f_2(\bar{x}a)$, то продолжения f_1 и f_2 совпадают на всей компоненте связности графа Γ , содержащей вершину $\bar{x} \in \Sigma^{n-1}$. Таким образом, для однозначного определения продолжения частичной n -арной квазигруппы g достаточно зафиксировать одно из двух возможных значений в каждой компоненте связности графа Γ . Из предложения 1 следует, что каждая компонента связности имеет мощность не менее 2^{n-1} . Тогда число компонент связности графа Γ не превосходит $(k/2)^{n-1}$. Значит, g имеет не более $2^{(k/2)^{n-1}}$ продолжений.

Теорема 1. Если $k \geq 5$ и $n \geq 2$, то

$$Q(n, k) \leq 2^{c_k(k-2)^n},$$

где

$$c_k = \frac{\log_2 k!}{k-2} + \frac{k}{k-4}.$$

Доказательство. Число частичных n -арных квазигрупп $g: \Sigma^{n-1} \times B \rightarrow \Sigma$, где $|\Sigma| = k$, $B = \Sigma \setminus \{a, b\}$, не превосходит $Q(n, k)^{k-2}$. Из леммы 1 следует неравенство

$$Q(n+1, k) \leq Q(n, k)^{k-2} 2^{(k/2)^n}. \quad (1)$$

Введем обозначение

$$\alpha_n = \frac{\log_2 Q(n, k)}{(k-2)^n}.$$

Тогда из неравенства (1) следует, что

$$\alpha_{n+1} \leq \alpha_n + \left(\frac{k}{2(k-2)} \right)^n.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\log_2 k!}{k-2}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2(k-2)} \right)^n &= \frac{k}{k-4}, \end{aligned}$$

справедливо неравенство

$$\alpha_n \leq \frac{\log_2 k!}{k-2} + \frac{k}{k-4}.$$

3. Нижняя оценка

Пусть a и b — два различных элемента из Σ . Будем называть $\{a, b\}$ -компонентой n -арной квазигруппы f такое множество $S \subset \Sigma^n$, что

$$(1) \quad f(S) = \{a, b\} \text{ и}$$

(2) функция

$$g(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}) & \text{при } \bar{x} \notin S, \\ b & \text{при } \bar{x} \in S \text{ и } f(\bar{x}) = a, \\ a & \text{при } \bar{x} \in S \text{ и } f(\bar{x}) = b \end{cases}$$

также является n -арной квазигруппой.

В этом случае будем говорить, что g получена из f свитчингом компоненты S . Заметим, что в определении $\{a, b\}$ -компоненты условие 2 можно заменить свойством (А) из предыдущего раздела. Очевидно, что свитчинг непересекающихся компонент можно производить независимо.

Предложение 2. Пусть S и S' — непересекающиеся $\{a, b\}$ - и $\{c, d\}$ -компоненты n -арной квазигруппы f соответственно, и n -арная квазигруппа g получена из f свитчингом компоненты S . Тогда S' также является $\{c, d\}$ -компонентой квазигруппы g .

Следующее предложение нетрудно получить из определения $\{a, b\}$ -компоненты, аналогичное утверждение имеется в [7].

Предложение 3. Пусть множество $C = \{c_1, d_1\} \times \{c_2, d_2\}$ является $\{a, b\}$ -компонентой 2-квазигруппы g . Пусть множество C_i является $\{c_i, d_i\}$ -компонентой n_i -арной квазигруппы q_i при $i = 1, 2$. Тогда множество $C_1 \times C_2$ является $\{a, b\}$ -компонентой $(n_1 + n_2)$ -арной квазигруппы f , где

$$f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \equiv g(q_1(\bar{x}_1), q_2(\bar{x}_2)).$$

Назовем 2-квазигруппу $\varphi: \Sigma \rightarrow \Sigma$ идемпотентной, если $\varphi(x, x) = x$ для любого $x \in \Sigma$. Известно (см., например, [2]), что верно следующее утверждение.

Предложение 4. Для любого $t \geq 3$ имеется идемпотентная 2-квазигруппа порядка t .

В следующем предложении приведена конструкция 2-квазигрупп, которая будет использована при доказательстве нижней оценки числа n -арных квазигрупп нечетного порядка.

Предложение 5. Для любого $t \geq 3$ найдется 2-квазигруппа ψ порядка $2t + 1$, имеющая t $\{2i, 2i + 1\}$ -компонент для каждого $i \in \{0, \dots, t - 1\}$, причем все, кроме одной, $\{2i, 2i + 1\}$ -компоненты имеют вид $\{2j, 2j + 1\} \times \{2l, 2l + 1\}$.

Доказательство. По предложению 4, найдется идемпотентная 2-квазигруппа φ_t порядка t . Для любых $a, b \in \{0, \dots, t - 1\}$, $a \neq b$, и $\delta, \sigma \in \{0, 1\}$ положим

$$\begin{aligned} \psi(2a + \delta, 2b + \sigma) &= 2\varphi_t(a, b) + (\delta + \sigma \bmod 2); \\ \psi(2a + \delta, 2a + \delta) &= 2a + 1 - \delta; \\ \psi(2a + \delta, 2a + 1 - \delta) &= k - 1; \\ \psi(k - 1, 2a + \delta) &= \psi(2a + \delta, k - 1) = 2a + \delta; \\ \psi(k - 1, k - 1) &= k - 1. \end{aligned}$$

Непосредственная проверка показывает, что ψ есть 2-квазигруппа, обладающая требуемыми свойствами.

Ниже приведен пример таблиц значений 2-квазигруппы φ_4 и соответствующей ψ :

$$\varphi_4:$$

0	2	3	1
3	1	0	2
1	3	2	0
2	0	1	3

 $\psi:$

1	8	4	5	6	7	2	3	0
8	0	5	4	7	6	3	2	1
6	7	3	8	0	1	4	5	2
7	6	8	2	1	0	5	4	3
2	3	6	7	5	8	0	1	4
3	2	7	6	8	4	1	0	5
4	5	0	1	2	3	7	8	6
5	4	1	0	3	2	8	6	7
0	1	2	3	4	5	6	7	8

Из предложения 1 нетрудно заключить, что 2-квазигруппа нечетного порядка k , построенная в предложении 5, имеет максимальное число непересекающихся компонент среди всех 2-квазигрупп порядка k .

Теорема 2. Если $k \geq 5$ — нечетное число и $n \geq 2$, то

$$Q(n, k) \geq 2^{((k-3)/2)^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} ((k-1)/2)^{\lceil (n+1)/2 \rceil}} > 2^{((k-3)/2)^{n/2} ((k-1)/2)^{n/2}}.$$

Доказательство. Пусть ψ — 2-квазигруппа порядка k , построенная в предложении 5. Определим рекуррентно n -арную квазигруппу Ψ^n равенствами

$$\begin{aligned} \Psi^2 &\equiv \psi; \\ \Psi^{2m+1}(\bar{x}, y) &= \psi(\Psi^{2m}(\bar{x}), y); \\ \Psi^{2m+2}(\bar{x}, y, z) &= \psi(\Psi^{2m}(\bar{x}), \psi(y, z)). \end{aligned}$$

Обозначим через α_n число $\{2i, 2i+1\}$ -компонент n -арной квазигруппы Ψ^n , где $i \in \{0, \dots, (k-3)/2\}$. Из предложений 3 и 5 следуют соотношения $\alpha_2 = (k-1)/2$, $\alpha_{2m+1} \geq \alpha_{2m}(k-3)/2$, $\alpha_{2m+2} \geq \alpha_{2m}((k-3)/2)((k-1)/2)$. Тогда

$$\alpha_{2m} \geq ((k-3)/2)^{m-1} ((k-1)/2)^m, \quad \alpha_{2m+1} \geq ((k-3)/2)^m ((k-1)/2)^m.$$

Поскольку $\{2i, 2i+1\}$ -компоненты при различных i не пересекаются, всего непересекающихся компонент не меньше, чем $(k-1)\alpha_n/2$. Из предложения 2 следует, что из n -арной квазигруппы Ψ^n свитчингами непересекающихся компонент можно получить требуемое число различных n -арных квазигрупп порядка k .

4. Число n -арных квазигрупп порядка 4

Введем обозначение $[n] = \{1, \dots, n\}$; n -арная квазигруппа f называется n -арной лупой, если существует такой элемент $e \in \Sigma$, называемый единичным, что для всех $i \in [n]$ и $a \in \Sigma$ имеет место равенство $f(e \dots e a e \dots e) = a$. Далее мы всегда будем подразумевать, что 0 является единичным элементом n -арной лупы (в общем случае могут быть и другие единичные элементы). Особо отметим, что данное соглашение существенно в интерпретации понятия числа n -арных луп. В частности, справедлив следующий простой и хорошо известный факт.

Предложение 6. Пусть $Q'(n, k)$ — число n -арных луп порядка k . Тогда

$$Q(n, k) = k((k-1)!)^n Q'(n, k).$$

Разделимой (приводимой) называется n -арная квазигруппа f , если найдутся целое число m , $2 \leq m < n$, $(n - m + 1)$ -арная квазигруппа h , m -арная квазигруппа g и перестановка $\sigma : [n] \rightarrow [n]$, такие, что

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv h(g(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}), x_{\sigma(m+1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

В дальнейшем будем предполагать, что $\Sigma = \{0, 1, 2, 3\}$, то есть речь пойдет только об n -арных квазигруппах порядка 4. Известно (см., например, [2]), что имеется ровно четыре бинарные лупы порядка 4 (одна изоморфна группе $Z_2 \times Z_2$ и три изоморфны группе Z_4).

Следующее утверждение является прямым следствием теоремы из [3].

Лемма 2. Для разделимой n -арной лупы f порядка 4 справедливо одно и только одно из двух представлений:

$$f(\bar{x}) = q_0(q_1(\tilde{x}_1), \dots, q_m(\tilde{x}_m)), \quad (2)$$

где q_j есть n_j -арные лупы при $j = 1, \dots, m$, q_0 есть неразделимая m -арная лупа, $m \geq 3$, $\tilde{x}_j$ — некоторые наборы переменных x_i , $i \in I_j$, где $\{I_j\}$ — разбиение множества $[n]$, причем в данном представлении разбиение $\{I_j\}$ единственно, и

$$f(\bar{x}) = q_1(\tilde{x}_1) * \dots * q_k(\tilde{x}_k), \quad (3)$$

где $*$ есть бинарная операция в одной из 4 луп, q_j есть n_j -арные лупы при j , $1 \leq j \leq k$, непредставимые в виде $q_j(\tilde{x}_j) = q'(\tilde{x}'_j) * q''(\tilde{x}''_j)$, $\tilde{x}_j$ — некоторые наборы переменных x_i , $i \in I_j$, где $\{I_j\}$ — разбиение множества $[n]$, причем в данном представлении разбиение $\{I_j\}$ единственно.

Корневой операцией n -арной квазигруппы f будем называть m -арную квазигруппу q_0 , если имеет место представление (2), и бинарную операцию $*$, если имеет место представление (3).

Простой комбинаторный подсчет показывает, что число $F_{j, \bar{k}}$ различных разбиений множества $[n]$ на k подмножеств, из которых k_i подмножеств имеет мощность j_i , $1 \leq i \leq t$, $0 < j_1 < \dots < j_t$, удовлетворяет равенству

$$F_{j, \bar{k}} = \frac{n!}{(j_1!)^{k_1} \dots (j_t!)^{k_t}} \frac{1}{k_1! \dots k_t!}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + \dots + k_t &= k, \\ k_1 j_1 + k_2 j_2 + \dots + k_t j_t &= n. \end{aligned}$$

Пусть $f: \Sigma^n \rightarrow \Sigma$ — n -арная квазигруппа, определим множество

$$S_{a,b}(f) \triangleq \{\bar{x} \in \Sigma^n : f(\bar{x}) \in \{a, b\}\}.$$

Назовем n -арную лупу f a -полулинейной, где $a \in \{1, 2, 3\}$ если характеристическая функция $\chi_{S_{0,a}(f)}$ множества $S = S_{0,a}(f)$ имеет вид

$$\chi_{S_{0,a}(f)}(x_1, \dots, x_n) \equiv \sum_{i=1}^n \chi_{\{0,a\}}(x_i) \pmod{2}. \quad (5)$$

Будем называть линейной n -арную квазигруппу f , если она одновременно является a -полулинейной и b -полулинейной, где $a \neq b$, $a, b \in \{1, 2, 3\}$. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что справедливо следующее утверждение.

Предложение 7. Из четырех бинарных луп порядка 4 одна (изоморфная группе $Z_2 \times Z_2$) является линейной, а три остальных — 1-, 2- и 3-полулинейными соответственно.

Справедливо следующее утверждение (см. [1]).

Предложение 8. Линейная n -арная лупа единственна и является одновременно 1-, 2- и 3-полулинейной.

Нетрудно видеть (см. также [1]), что справедливо следующее утверждение.

Предложение 9. Пусть f — разделимая a -полулинейная n -арная лупа, тогда f можно представить как суперпозицию a -полулинейных луп вида (2) или (3).

Обозначим через l_n^a мощность множества a -полулинейных n -арных луп и через l_n — мощность множества полулинейных n -арных луп.

Как было установлено в [1], мощность множества всех n -арных луп асимптотически совпадает с мощностью множества полулинейных n -арных луп, которая легко вычисляется.

Лемма 3 ([1]). Справедливы равенства

$$l_n = 3 \cdot 2^{2^n - n - 1} - 2, \quad l_n^a = 2^{2^n - n - 1}, \quad a \in \{1, 2, 3\}.$$

В [6] получено описание n -арных квазигрупп порядка 4 в определенных выше терминах, а именно, доказана следующая теорема.

Теорема 3. Каждая n -арная лупа порядка 4 является разделимой или полулинейной.

На этом описании по-существу основывается вывод рекуррентной формулы для числа n -арных луп (и квазигрупп) порядка 4.

Введем следующие обозначения:

v_n — число n -арных луп (порядка 4);

r_n^* — число разделимых n -арных луп с бинарной корневой операцией *;

r_n^0 — число разделимых n -арных луп с корневой операцией арности, большей либо равной 3;

r_n^{a*} — число разделимых a -полулинейных n -арных луп с a -полулинейной бинарной корневой операцией *;

r_n^{a0} — число разделимых a -полулинейных n -арных луп с корневой операцией арности, большей либо равной 3;

p_n^a — число неразделимых a -полулинейных n -арных луп;

p_n — число неразделимых n -арных луп.

Из леммы 2 и предложения 9 вытекают следующие соотношения:

$$\begin{aligned} r_n^{a*} &= \sum_{i=2}^n \sum_{\bar{j}, \bar{k}} F_{\bar{j}, \bar{k}} (l_{j_1}^a - r_{j_1}^{a*})^{k_1} \dots (l_{j_t}^a - r_{j_t}^{a*})^{k_t}, \\ r_n^* &= \sum_{i=2}^n \sum_{\bar{j}, \bar{k}} F_{\bar{j}, \bar{k}} (v_{j_1} - r_{j_1}^*)^{k_1} \dots (v_{j_t} - r_{j_t}^*)^{k_t}, \\ r_n^{a0} &= \sum_{i=3}^{n-1} p_i^a \sum_{\bar{j}, \bar{k}} F_{\bar{j}, \bar{k}} (l_{j_1}^a)^{k_1} \dots (l_{j_t}^a)^{k_t}, \\ r_n^0 &= \sum_{i=3}^{n-1} p_i \sum_{\bar{j}, \bar{k}} F_{\bar{j}, \bar{k}} (v_{j_1})^{k_1} \dots (v_{j_t})^{k_t}, \end{aligned}$$

где вторая сумма берется по наборам $\bar{k} = (k_1, \dots, k_t)$ и $\bar{j} = (j_1, \dots, j_t)$ положительных целых чисел, удовлетворяющих равенствам

$$\begin{aligned} k_1 + \dots + k_t &= i, \\ k_1 j_1 + k_2 j_2 + \dots + k_t j_t &= n \end{aligned}$$

и неравенствам $j_1 < \dots < j_t$. Из теоремы 3 и предложения 8 вытекают соотношения

$$\begin{aligned} v_n &= p_n + r_n^0 + 4r_n^*, \\ p_n^a &= l_n^a - r_n^{a0} - 2r_n^{a*}, \\ p_n &= 3p_n^a. \end{aligned}$$

Из леммы 3 следует, что

$$l_n^a = 2^{2^n - n - 1}, \quad a \in \{1, 2, 3\}.$$

Из предложения 7 получаем начальные значения для перечисленных выше величин:

$$\begin{aligned} r_2^{a*} &= 2, \\ r_2^* &= 4, \\ r_2^{a0} &= r_2^0 = 0. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что приведенные выше равенства и предложение 6 обеспечивают рекуррентный способ вычисления числа n -арных квазигрупп порядка 4.

Наконец, выпишем первые восемь значений величины $Q'(n, 4)$:

1,
4,
64,
7132,
201538000,
432345572694417712,
3987683987354747642922773353963277968,
678469272874899582559986240285280710364867063489779510427038722229750276832,
и $Q(n, 4)$:

24,
 576,
 55296,
 36972288,
 6268637952000,
 80686060158523011084288,
 4465185218736554544676917926460256725000192,
 4558271384916189349044295395852008182480786230841798008741684281906576963885826048.

5. Заключение

В заключение скажем несколько слов о связи тематики настоящей статьи с известным понятием латинского трэйда. Частичная n -арная квазигруппа $t: \Omega \rightarrow \Sigma$, $\Omega \subset \Sigma^n$, называется многомерным латинским трэйдом, далее просто трэйдом, если существует другая частичная n -арная квазигруппа $t': \Omega \rightarrow \Sigma$ такая, что

- (1) $t(\bar{x}) \neq t'(\bar{x})$ для всех $\bar{x} \in \Omega$;
- (2) для любого i , $i = 1, \dots, n$, и любых допустимых значений $x_1, \dots, x_n$ множества $\{t(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n) \mid y \in \Sigma\}$ и $\{t'(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n) \mid y \in \Sigma\}$ совпадают.

В этом случае пара (t, t') называется битрэйдом (в зависимости от контекста, битрэйды рассматривают как упорядоченную, либо как неупорядоченную пару), а трэйд t' называется партнером трэйда t . Исследованию битрэйдов в случае $n = 2$ (латинских битрэйдов) уделяется значительное внимание, см. обзор [5].

Будем говорить, что n -арная квазигруппа f содержит трэйд t , если $t = f|_{\Omega}$ для некоторого Ω . При этом из определений следует, что замена значений f на множестве Ω значениями партнера t' трэйда t приводит к другой n -арной квазигруппе. Трэйды $t = f|_{\Omega}$ и $s = f|_{\Theta}$ назовем независимыми, если их носители (области определения) Ω и Θ не пересекаются. Максимальное число попарно независимых трэйдов, которые содержит n -арная квазигруппа f , назовем ее трэйдовым числом $\text{trd}(f)$. Максимум $\text{trd}(f)$ по всем n -арным квазигруппам f порядка k обозначим через $\text{Trd}(n, k)$. Поскольку независимые трэйды в n -арной квазигруппе можно независимо заменять на партнеров, число $Q(n, k)$ различных n -арных квазигрупп порядка k удовлетворяет неравенству

$$Q(n, k) \geq 2^{\text{Trd}(n, k)}. \quad (6)$$

Легко понять, что нижняя оценка в разделе 3 (как и все оценки в [7]) получена именно таким образом: $\{a, b\}$ -компонента по определению является носителем некоторого трэйда. Поскольку носитель трэйда обладает свойством (A), из предложения 1 вытекает соотношение

$$\text{Trd}(n, k) \leq k^n / 2^n = 2^{(\log_2 k - 1)n},$$

причем для четных k легко доказать равенство. Для нечетных k из результатов раздела 3 следует оценка

$$\text{Trd}(n, k) \geq 2^{c(k)n},$$

где

$$c(k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \log_2 k - 1.$$

Однако для фиксированных k , в частности, для малых значений $5, 7, \dots$ вопрос об асимптотическом поведении величины $\text{Trd}(n, k)$ остается открытым.

Проблема 1. При $n \rightarrow \infty$ вычислить асимптотику логарифма и асимптотику величины $\text{Trd}(n, k)$ для нечетных $k \geq 5$.

Другой вопрос состоит в том, насколько оценка (6) близка к истинной. Для порядка 4 оценка (6) асимптотически точна после логарифмирования. Для большего фиксированного порядка асимптотика двукратного логарифма величины $Q(n, k)$ неизвестна. Кажется естественным предположить, что асимптотика двукратного логарифма величины $Q(n, k)$ и логарифма величины $\text{Trd}(n, k)$ совпадают.

Проблема 2. Верно ли, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\log_2 \log_2 Q(n, k)}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\log_2 \text{Trd}(n, k)}{n} \right)?$$

В частности, верно ли, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\log_2 \log_2 Q(n, k)}{n} \right) \leq \log_2 k - 1?$$

Существование этих пределов также не доказано.

Список литературы

1. Потапов В. Н., Асимптотика числа n -квазигрупп порядка 4. *Сибирский матем. журнал* (2006) **47**, №4, 873–887.
2. Белоусов В. Д., *Основы теории квазигрупп*. Наука, Москва, 1967.
3. Черемушкин А. В., *Каноническая декомпозиция n -арных квазигрупп*. Штиинца, Кишинев, 1988.
4. Потапов В. Н., Верхняя оценка числа n -квазигрупп конечного порядка. В сб.: *Труды XVII международной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем»*. Новосибирск, 2008, с. 135–137.
5. Cavenagh N. J., The theory and application of latin bitrades: A survey. *Mathematica Slovaca* (2008) **58**, 691–718.
6. Krotov D. S., Potapov V. N., n -ary quasigroups of order 4. *SIAM J. Discrete Math.* (2009) **23**, 561–570.
7. Krotov D. S., Potapov V. N., Sokolova P. V., On reconstructing reducible n -ary quasigroups and switching subquasigroups. *Quasigroups Relat. Syst.* (2008) **16**, 55–67.
8. McKay B. D., Wanless I. M., On the number of Latin squares. *Ann. Comb.* (2005) **9**, 335–344.
9. McKay B. D., Wanless I. M., A census of small Latin hypercubes. *SIAM J. Discrete Math.* (2008) **22**, 719–736.

Статья поступила 2.12.2009.