Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Жуковский, Оценка количества максимальных расширений в случайном графе, *Дискрет. матем.*, 2012, том 24, выпуск 1, 79–107

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1174>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 09:34:12

Оценка количества максимальных расширений в случайном графе

© 2012 г. М. Е. Жуковский

В работе изучается классическая задача об асимптотическом поведении вероятностей свойств случайных графов в модели, впервые рассмотренной П. Эрдешем и А. Реньи. Исследуются различные расширения подграфов случайного графа. Число так называемых надежных расширений подграфов в случайном графе было оценено в 1990 г. Дж. Спенсером. В его работе был поставлен вопрос, для каждого ли набора вершин существуют расширения, которые в определенном смысле не расширяются дальше. Мы ввели понятия нейтральной и максимальной пары, оценили число максимальных пар и дали тем самым исчерпывающий ответ на поставленный Спенсером вопрос.

Задача о числе расширений находит свое применение в обосновании справедливости законов нуль–единица для случайных графов. Наш результат также используется для доказательства некоторых таких законов.

В исследуемой нами задаче о распределении малых подграфов в случайном графе до сих пор оставалась одна неразрешенная ситуация, которую мы и рассмотрели. Таким образом, наша теорема не только служит новым инструментом в доказательстве законов нуль–единица, но и закрывает брешь в изучении малых подграфов в случайном графе.

1. Введение

В работе изучаются различные расширения подграфов случайного графа. Число так называемых надежных расширений подграфов в случайном графе было оценено в 1990 г. Дж. Спенсером (см. [1, 2]). В отдельных случаях возникает вопрос, для каждого ли набора вершин существуют расширения данного типа, которые в определенном смысле не расширяются дальше. Для рассмотрения этих случаев мы введем понятия нейтральной пары и максимального расширения, после чего оценим число максимальных расширений.

Задача о числе расширений находит свое применение в обосновании справедливости законов нуль–единица для случайных графов (см. [2–6]). Впервые такой подход был использован в работе Дж. Спенсера и С. Шела в 1988 г. [3]. В этой работе получены результаты для свойств, записанных на языке первого порядка (см. [7, 8]). Кроме того, в 1997 г. М. МакАртур (см. [4]) рассмотрела свойства, заданные формулами с неограниченным числом дизъюнкций и конъюнкций и с ограниченной заранее фиксированным числом кванторной глубины. Наши результаты применяются для доказательства законов нуль–единица для свойств, записанных на языке первого порядка, при этом глубина формул опять же ограничена заранее фиксированным числом. Для таких свойств нам удалось расширить результат Дж. Спенсера и С. Шела.

В следующем параграфе мы приведем формулировку теоремы Спенсера, а также введем все необходимые для этого определения. Кроме того, мы дадим определения нейтральной и максимальной пары графов, которые понадобятся, чтобы сформулировать в следующем разделе полученные нами результаты о максимальных расширениях. Доказательство этих теорем мы приведем в разделе 3. Помимо этого, в разделе 4 рассматриваются некоторые обобщения этих теорем.

1.1. Основные определения. Теорема о числе надежных расширений

Как обычно, граф $G = (V, E)$ состоит из множества вершин V и совокупности ребер E (см. [9, 10]). Мы используем также обозначения $V = V(G)$ и $E = E(G)$. Рассмотрим графы $H, G, \tilde{H}, \tilde{G}$ такие, что $V(H) = \{x_1, \dots, x_k\}$, $V(G) = \{x_1, \dots, x_l\}$, $V(\tilde{G}) = \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l\}$, $V(\tilde{H}) = \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}$, причем $H \subset G$, $\tilde{H} \subset \tilde{G}$ (в силу этого, $k < l$).

Граф $\tilde{G}$ называется (G, H) -расширением графа $\tilde{H}$, если

$$\{x_i, x_j\} \in E(G) \setminus E(H) \implies \{\tilde{x}_i, \tilde{x}_j\} \in E(\tilde{G}) \setminus E(\tilde{H})$$

(здесь и далее ребро, соединяющее вершины x и y , записывается как $\{x, y\}$). Если выполняется соотношение

$$\{x_i, x_j\} \in E(G) \setminus E(H) \iff \{\tilde{x}_i, \tilde{x}_j\} \in E(\tilde{G}) \setminus E(\tilde{H}),$$

то $\tilde{G}$ назовем точным расширением. Положим

$$v(G, H) = |V(G) \setminus V(H)|, \quad e(G, H) = |E(G) \setminus E(H)|;$$

(здесь и далее $|X|$ есть мощность множества X). Пусть фиксировано число $\alpha > 0$. Если для любого такого графа S , что $H \subset S \subseteq G$, выполнено неравенство $v(S, H) - \alpha e(S, H) > 0$, то пара (G, H) называется α -надежной (см. [1, 2, 5]). Если же для любого такого графа S , что $H \subseteq S \subset G$, выполнено неравенство $v(G, S) - \alpha e(G, S) < 0$, то пара (G, H) называется α -жесткой (см. [2, 5]).

Напомним теперь определение случайного графа. Пусть N является натуральным числом, $0 \leq p \leq 1$. Рассмотрим множество $\Omega_N = \{\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})\}$ всех неориентированных графов без петель и кратных ребер с множеством вершин $\mathcal{V} = \{1, \dots, N\}$. Случайный граф — это вероятностное пространство

$$G(N, p) = (\Omega_N, \mathcal{F}_N, \mathbf{P}_{N,p}),$$

где

$$\mathcal{F}_N = 2^{\Omega_N}, \quad \mathbf{P}_{N,p}(\mathcal{G}) = p^{|\mathcal{E}|} (1-p)^{\binom{N}{2}-|\mathcal{E}|}.$$

Иными словами, любые две различные вершины графа в пространстве $G(N, p)$ соединены ребром с вероятностью p независимо от всех остальных пар вершин (см. [5, 11–13]). В дальнейшем мы будем рассматривать модели, в которых вероятность p зависит от числа вершин N . В данной работе нас будет интересовать асимптотическое поведение вероятностей выполнения свойств случайных графов (то есть для каждого свойства $\mathcal{A}$ — асимптотическое поведение величин $\mathbf{P}_{N,p}(\mathcal{S}_N)$, где $\mathcal{S}_N \in \mathcal{F}_N$ — множество всех графов из Ω_N , обладающих свойством $\mathcal{A}$).

Пусть $\mathcal{A}$ — некоторое свойство и $\mathcal{S}_N$ — множество всех графов из Ω_N , обладающих этим свойством. Мы будем говорить, что свойство $\mathcal{A}$ выполнено с асимптотической

Рис. 1.

вероятностью 1, если вероятность его выполнения стремится к 1, то есть справедливо равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{N,p}(\mathcal{G}_N) = 1.$$

Будем, кроме того, называть функцию $p_0(N)$ пороговой для свойства L , если

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{N,p}(G \models L) &= 1, & p &= o(p_0), \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{N,p}(G \models L) &= 0, & p &= \omega(p_0). \end{aligned}$$

Здесь и далее для функций $f = f(N)$, $g = g(N)$ мы будем говорить, что справедливо равенство $f = \omega(g)$ при $N \rightarrow \infty$ в том случае, когда для любого числа $C > 0$ найдется такое N_0 , что для всех $N > N_0$ выполнено неравенство $|f(N)| > C|g(N)|$.

Рассмотрим случайный граф $G(N, p(N)) = (\Omega_N, \mathcal{F}_N, \mathbf{P}_{N,p})$ и два графа H и G таких, что $H \subset G$, $V(H) = \{x_1, \dots, x_k\}$, $V(G) = \{x_1, \dots, x_l\}$. Пусть $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k \in \mathcal{V}$ и случайная величина $N_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$ на вероятностном пространстве $G(N, p(N))$ каждому графу $\mathcal{G}$ из Ω_N ставит в соответствие число (G, H) -расширений подграфа в $\mathcal{G}$, индуцированного на $\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}$ (граф X является подграфом графа Y , индуцированным на множество $S \subset V(Y)$, если $V(X) = S$ и для любых вершин $x, y \in S$ справедливо соотношение $\{x, y\} \in E(X) \iff \{x, y\} \in E(Y)$). Иными словами, пусть $W \subset \mathcal{V} \setminus \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}$ — множество, мощность $|W|$ которого равна $l - k$. Если можно так занумеровать элементы множества W числами $k + 1, k + 2, \dots, l$, что граф $\mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l\}}$ является (G, H) -расширением графа $\mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}}$, то положим $I_W(\mathcal{G}) = 1$. В противном случае $I_W(\mathcal{G}) = 0$. Случайная величина $N_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$ определяется равенством

$$N_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = \sum_{\substack{W \subset \mathcal{V} \setminus \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\} \\ |W| = l - k}} I_W.$$

Теорема 1 ([1, 2]). Пусть $p = N^{-\alpha}$ и пара (G, H) является α -надежной. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ справедливо равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{N,p}(|N_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) - \mathbf{E}_{N,p} N_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)| \leq \varepsilon \mathbf{E}_{N,p} N_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)) = 1$$

для всех $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$, где $\mathbf{E}_{N,p}$ — математическое ожидание по мере $\mathbf{P}_{N,p}$.

Замечание 1. Утверждение этой теоремы Спенсера фактически означает, что с асимптотической вероятностью 1 для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ справедливо соотношение

$$N_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \sim \mathbf{E}_{N,p} N_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$$

при $N \rightarrow \infty$. В дальнейшем в подобных случаях мы будем пользоваться именно такой формой записи.

Замечание 2. Справедливо равенство

$$\mathbf{E}_{N,p} N_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = \binom{N}{v(G,H)} p^{e(G,H)}.$$

Поэтому

$$\mathbf{E}_{N,p} N_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = \Theta(N^{v(G,H) - \alpha e(G,H)})$$

и стремится к бесконечности при $N \rightarrow \infty$ (для функций $f = f(N)$, $g = g(N)$, мы говорим, что $f = \Theta(g)$ при $N \rightarrow \infty$, если существуют такие положительные числа c , C и $N_0 \in \mathbf{N}$, что для всех $N > N_0$ справедливы неравенства $c|f(N)| \leq |g(N)| \leq C|f(N)|$). Действительно, в показателе степени стоит положительное число $v(G, H) - \alpha e(G, H)$ в случае α -надежной пары (G, H) . Поэтому в этом случае с асимптотической вероятностью 1 для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k \in \mathcal{V}(G, H)$ -расширение графа, индуцированного на множество $\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}$, существует, и число таких расширений с ростом N стремится к бесконечности.

Заметим, что если α — рациональное число, то равенство $v(G, H) - \alpha e(G, H) = 0$ возможно. Рассмотрим, скажем, случайный граф с $p = N^{-\alpha}$, $\alpha = 1/2$. Пусть G — полный граф на трех вершинах, H — подграф, индуцированный на некоторые его две вершины. Найдём вероятность того, что для конкретных двух вершин $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ найдется третья вершина $\tilde{x}_3$, соединенная с каждой из них. Она, очевидно, равна

$$1 - (1 - p^2)^{N-2} \sim 1 - 1/e.$$

Поэтому

$$\mathbf{P}_{N,p}(N_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = 0) \sim 1/e$$

при $N \rightarrow \infty$. Кроме того, при достаточно больших N справедливо неравенство

$$\mathbf{E}_{N,p} N_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \geq 1 - 2/e.$$

Таким образом, утверждение теоремы не выполнено. Мы показали, что с асимптотической вероятностью 1 для каждой вершины $\tilde{x}_1$ найдется вершина $\tilde{x}_2$, для которой не существует вершины $\tilde{x}_3$, соединенной с каждой из $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$. Иными словами, для расширения на

вершинах $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ графа на одной вершине $\tilde{x}_1$ не существует описанного расширения на вершинах $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$. При этом с асимптотической вероятностью 1 для каждой вершины $\tilde{x}_1$ число таких «вторых» вершин $\tilde{x}_2$ эквивалентно Ne^{-1} .

Образно говоря, мы рассмотрели расширения, которые в некотором смысле не расширяются дальше, то есть являются максимальными, и оценили их число в случайном графе. Как отмечалось выше, эти расширения используются для доказательств законов нуля–единица для случайных графов. В приведенном примере при $\alpha < 1/2$ или $\alpha > 1/2$ такие оценки напрямую следуют из результатов, полученных Дж. Спенсером (см. [1, 2, 5]). Опишем подробнее эти расширения.

1.2. Нейтральные и максимальные пары

Пусть $0 < \alpha \leq 1$ — рациональное число. Рассмотрим графы H, G . Пусть $H \subset G$, любая вершина графа H соединена с некоторой вершиной из $V(G) \setminus V(H)$, и для любого такого графа S , что $H \subset S \subset G$, справедливо неравенство $v(S, H) - \alpha e(S, H) > 0$, но $v(G, H) - \alpha e(G, H) = 0$. В этом случае пару (G, H) будем называть α -нейтральной. Заметим, что условие $0 < \alpha \leq 1$ существенно. Оно необходимо для существования нейтральной пары. Действительно, пусть пара (G, H) является α -нейтральной. Пусть, кроме того, для некоторых вершин $y \in V(G) \setminus V(H)$, $x \in V(H)$, справедливо соотношение $y \sim x$. Такие вершины найдутся в силу определения нейтрального расширения. Пусть S — подграф графа G , индуцированный на множество вершин $\{y\} \cup V(H)$. Тогда $v(S, H) = e(S, H) = 1$, но $\alpha \leq v(S, H)/e(S, H)$. Поэтому $\alpha \leq 1$.

Пусть $\tilde{H} \subset \tilde{G} \subset \Gamma$ и $T \subset K$, причем $|V(T)| \leq |V(\tilde{G})|$. Пара $(\tilde{G}, \tilde{H})$ называется (K, T) -максимальной в Γ , если у любого подграфа $\tilde{T}$ графа $\tilde{G}$ такого, что $|V(\tilde{T})| = |V(T)|$ и $\tilde{T} \cap \tilde{H} \neq \tilde{T}$, не существует такого точного (K, T) -расширения $\tilde{K}$ в $\Gamma \setminus (\tilde{G} \setminus \tilde{T})$, что каждая вершина из $V(\tilde{K}) \setminus V(\tilde{T})$ не соединена ребром ни с одной вершиной из $V(\tilde{G}) \setminus V(\tilde{T})$. Заметим, что если $|V(T)| > |V(\tilde{H})|$, то условие $\tilde{T} \cap \tilde{H} \neq \tilde{T}$ не требуется.

Для наглядности рассмотрим пример максимальной пары в некотором графе Γ . Пусть граф $\tilde{H} \subset \Gamma$ состоит из одной вершины $\tilde{x}_1$, полный граф $\tilde{G} \subset \Gamma$ на вершинах $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ содержит в себе граф $\tilde{H}$. Пусть, кроме того, K — граф на вершинах y_1, y_2, y_3 , T — его подграф на вершинах y_1, y_2 , причем в графе K вершина y_3 соединена с вершинами y_1, y_2 . Тогда пара $(\tilde{G}, \tilde{H})$ является (K, T) -максимальной в графе Γ , если в графе $\Gamma \setminus \tilde{G}$ не существует вершины, соединенной с ровно двумя из $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$. Заметим, что в нашем примере пара $(\tilde{G}, \tilde{H})$ является $1/2$ -надежной, а пара (K, T) является $1/2$ -нейтральной. Полученные нами результаты, которые будут сформулированы в следующем разделе, справедливы именно для (K, T) -максимальных α -надежных пар, где пара (K, T) является α -нейтральной.

2. Формулировки новых результатов

Рассмотрим снова случайный граф

$$G(N, p(N)) = (\Omega_N, \mathcal{F}_N, \mathbf{P}_{N,p})$$

и два графа H и G таких, что $H \subset G$, $V(H) = \{x_1, \dots, x_k\}$, $V(G) = \{x_1, \dots, x_l\}$. Пусть $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k \in \mathcal{V}$ и случайная величина $N_{(G,H)}^{(K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$ на вероятностном пространстве $G(N, p(N))$ каждому графу $\mathcal{G}$ из Ω_N ставит в соответствие число таких (G, H) -расширений $\tilde{G}$ подграфа в $\mathcal{G}$, индуцированного на $\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}$, что пара $(\tilde{G}, \mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}})$

является (K, T) -максимальной в $\mathcal{G}$. Иными словами, пусть $W \subset \mathcal{V} \setminus \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}$ — множество, мощность $|W|$ которого равна $l - k$. Если можно так занумеровать элементы множества W числами $k + 1, k + 2, \dots, l$, что граф $\mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l\}}$ является (G, H) -расширением графа $\mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}}$ и пара $(\mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l\}}, \mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}})$ является (K, T) -максимальной, то положим $I_W(\mathcal{G}) = 1$. В противном случае положим $I_W(\mathcal{G}) = 0$. Случайная величина $N_{(G,H)}^{(K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$ определяется равенством

$$N_{(G,H)}^{(K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = \sum_{\substack{W \subset \mathcal{V} \setminus \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\} \\ |W|=l-k}} I_W.$$

Введем, кроме того, случайную величину $N_{(G,H)}^{(K_1,T_1),(K_2,T_2),\dots,(K_s,T_s)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$, которая каждому графу $\mathcal{G}$ из Ω_N ставит в соответствие число таких (G, H) -расширений $\tilde{G}$ подграфа в $\mathcal{G}$, индуцированного на $\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}$, что пара $(\tilde{G}, \mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}})$ является (K_1, T_1) -максимальной, (K_2, T_2) -максимальной, $\dots$, (K_s, T_s) -максимальной в $\mathcal{G}$.

Пусть пара (G, H) является α -надежной и $p = N^{-\alpha}$. Из результатов, полученных Дж. Спенсером (см. [1, 2, 5]), следуют оценки величин $N_{(G,H)}^{(K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$, если пара (K, T) является α -надежной. А именно, с асимптотической вероятностью 1 для любых $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ справедливо равенство $N_{(G,H)}^{(K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = 0$. Если же пара (K, T) является α -жесткой и число α иррационально, то оценки для этих случайных величин выводятся из тех же результатов (см. лемму 10.7.6 в [2]); если α рационально, то оценки следуют из доказанной нами в настоящей работе леммы о нейтральных расширениях и леммы 10.7.6 в [2]. А именно, с асимптотической вероятностью 1 для любых $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ справедливо соотношение

$$N_{(G,H)}^{(K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \sim N_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k).$$

Этот результат непосредственно вытекает из описанных лемм, поэтому не обсуждается.

Теорема 2. Пусть пары $(K_1, T_1), (K_2, T_2), \dots, (K_s, T_s)$ являются α -нейтральными. При сделанных предположениях, с асимптотической вероятностью 1 для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$

$$\begin{aligned} N_{(G,H)}^{(K_1,T_1),(K_2,T_2),\dots,(K_s,T_s)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) &\sim \mathbf{E}_{N,p} N_{(G,H)}^{(K_1,T_1),(K_2,T_2),\dots,(K_s,T_s)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \\ &= \Theta(N^{v(G,H)-\alpha e(G,H)}). \end{aligned}$$

Прежде чем обосновать справедливость этого результата, мы докажем его частный случай для одной α -нейтральной пары, который мы формулируем здесь в виде отдельного утверждения.

Предложение 1. Пусть $p = N^{-\alpha}$, где $0 < \alpha \leq 1$ — рациональное число, пара (G, H) является α -надежной, а пара (K, T) является α -нейтральной. Тогда с асимптотической вероятностью 1 для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$

$$N_{(G,H)}^{(K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \sim \mathbf{E}_{N,p} N_{(G,H)}^{(K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = \Theta(N^{v(G,H)-\alpha e(G,H)}).$$

3. Доказательство основных результатов

3.1. Лемма о композиции нейтральной и надежной пары

Лемма 1. Пусть пара (G, H) является α -надежной, T — подграф графа G , причем $T \cap H \neq T$; пара (K, T) является α -нейтральной, $K \cap G = T$, причем множество

Рис. 2.

$E((K \setminus T) \cup (G \setminus T)) \setminus (E(K \setminus T) \cup E(G \setminus T)) = \emptyset$. При сделанных предположениях пара $(K \cup H, H)$ является α -надежной.

Доказательство. Пусть граф S таков, что

$$H \subset S \subset K \cup H, \quad V(S) = V(H) \cup \{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n\},$$

именно, $x_1, \dots, x_m \in V(G) \setminus V(H)$ и $y_1, \dots, y_n \in V(K) \setminus V(G)$. Тогда в силу того, что (G, H) — α -надежная пара, суммарное число ребер между вершинами $x_1, \dots, x_m$ и ребер между вершинами $x_1, \dots, x_m$ и вершинами графа H меньше, чем m/α .

Далее, если $m \neq 0$, то ввиду α -нейтральности пары (K, T) суммарное число ребер между вершинами $x_1, \dots, x_m$ и вершинами $y_1, \dots, y_n$, ребер между вершинами $y_1, \dots, y_n$ и ребер между вершинами $y_1, \dots, y_n$ и вершинами графа H не больше, чем n/α . Если же $m = 0$, то суммарное число ребер между вершинами $y_1, \dots, y_n$ и ребер между вершинами $y_1, \dots, y_n$ и вершинами графа H меньше, чем n/α , так как по условию $T \cap H \neq T$, а следовательно, пара $(K \setminus (G \setminus H), T \cap H)$ α -надежная. Таким образом,

$$v(S, H) - \alpha e(S, H) = (n + m) - \alpha e(S, H) > (n + m) - \alpha n + m/\alpha = 0.$$

Поэтому пара $(K \cup H, H)$ является α -надежной. Лемма доказана.

Заметим, что в теореме 1 говорится не о точных расширениях. Для доказательства наших результатов придется рассмотреть точные расширения и оценить их число. Тем самым, потребуется усилить утверждение теоремы 1. Иными словами, мы покажем, что число расширений с дополнительным ребром бесконечно мало по сравнению с числом точных расширений. В работах [2] и [3] это доказано для случая иррационального α , мы же докажем это для всех $\alpha \in (0, 1]$.

3.2. Теорема о точных надежных расширениях

Рассмотрим случайный граф

$$G(N, p(N)) = (\Omega_N, \mathcal{F}_N, \mathbf{P}_{N,p})$$

и два графа H и G , $H \subset G$. Пусть $V(H) = \{x_1, \dots, x_k\}$, $V(G) = \{x_1, \dots, x_l\}$ и $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k \in \mathcal{V}$. Пусть $N_{(G,H)}^{\text{strict}}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$ — число точных (G, H) -расширений множества $\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}$, то есть случайная величина $N_{(G,H)}^{\text{strict}}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$ каждому графу $\mathcal{G}$ из Ω_N ставит в соответствие число точных (G, H) -расширений подграфа в $\mathcal{G}$, индуцированного на $\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}$ (мы не даем здесь более формального определения, поскольку оно аналогично определению случайной величины $N_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$).

Теорема 3. Пусть $p = N^{-\alpha}$, где $0 < \alpha \leq 1$, и (G, H) — α -надежная пара. Тогда с асимптотической вероятностью 1 для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ справедливо соотношение

$$N_{(G,H)}^{\text{strict}}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \sim N_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k).$$

Для доказательства этого результата нам потребуется ввести некоторые определения, а также доказать ряд лемм.

3.2.1. Жесткие и нейтральные цепи. Сбалансированные графы. Вспомогательные утверждения

Напомним определение жесткой цепи, введенное в [2, 3]). Рассмотрим графы H, G , $H \subset G$. Если существуют такие графы $S_0, S_1, \dots, S_r$, что $H = S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_r = G$, пары (S_i, S_{i-1}) являются α -жесткими и для некоторого t при любом $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ выполнено неравенство $|V(S_i) \setminus V(S_{i-1})| \leq t$, то пара (G, H) называется α -жесткой t -цепью. Если $X \subset Y \subset \Gamma$ и пара (Y, X) является α -жесткой t -цепью и для нее не существует такого графа $Z \subset \Gamma$, что пара (Z, Y) является α -жесткой, $|V(Z) \setminus V(Y)| \leq t$, то пара (Y, X) называется максимальной в Γ α -жесткой t -цепью, а граф Y обозначается $cl_t(X)$. У графа X существует только один такой граф Y в Γ , что пара (Y, X) является максимальной в Γ α -жесткой t -цепью. Действительно, если пары $(Y, X), (Z, X)$ являются α -жесткими t -цепями, то пара $(Y \cup Z, X)$ тоже является α -жесткой t -цепью.

Введем понятие нейтральной цепи. Будем говорить, что пара (G, H) является α -нейтральной цепью, если найдутся такие графы $K_1, \dots, K_r$ и $T_1, \dots, T_{r-1}$, что $H = K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_r = G$, для каждого $i \in \{1, \dots, r-1\}$ справедливо включение $T_i \subseteq K_i$, пара $((K_{i+1} \setminus K_i) \cup T_i, T_i)$ является α -нейтральной, и между графами $K_{i+1} \setminus K_i$ и $K_i \setminus T_i$ нет ребер.

Сформулируем теперь определения сбалансированных и строго сбалансированных графов, которые рассматривали П. Эрдеш и А. Реньи (см. [11]). Пусть G — граф с v вершинами и e ребрами. Отношение $\rho(G) = e/v$ называется плотностью графа G . Положим

$$\rho^{\max}(G) = \max\{\rho(H) : H \subseteq G\}.$$

Граф G называется сбалансированным, если для каждого его подграфа H выполнено неравенство $\rho(H) \leq \rho(G)$. Граф G называется строго сбалансированным, если для любого $H \subset G$ справедливо строгое неравенство $\rho(H) < \rho(G)$. Сформулируем теперь теорему о числе копий строго сбалансированного графа.

Теорема 4 ([2, 4]). Пусть $G(N, p)$ есть случайный граф, G есть произвольный граф, N_G есть число копий G в случайном графе. Тогда функция $p = N^{-1/\rho^{\max}(G)}$ является пороговой для свойства содержать копию графа G . Если граф G сбалансированный, то для любого $\beta > 0$ с асимптотической вероятностью 1 справедливо равенство $N_G = o(N^\beta)$. Если же граф G строго сбалансированный и $p = \omega(N^{-1/\rho(G)})$, то $N_G \sim \mathbf{E}_{N,p} N_G$ с асимптотической вероятностью 1.

Пусть S_1, S_2 — два графа, причем один из них является подграфом другого. Рассмотрим функцию f , определенную на парах вложенных друг в друга графов. Если $S_2 \subseteq S_1$, то определим значение функции f на паре (S_1, S_2) равенством $f(S_1, S_2) = v(S_1, S_2) - \alpha e(S_1, S_2)$. Если же $S_1 \subseteq S_2$, то $f(S_1, S_2) = -v(S_2, S_1) + \alpha e(S_2, S_1)$. Иными словами, если H — такой граф, что $H \subseteq S_1, H \subseteq S_2$, то

$$f(S_1, S_2) = (v(S_1, H) - v(S_2, H)) - \alpha(e(S_1, H) - e(S_2, H)).$$

Заметим, что справедливо равенство

$$f(S_1, S_2) - f(S_1, S_3) = f(S_3, S_2). \quad (1)$$

Докажем вспомогательную лемму об устройстве любой пары (G, H) .

Лемма 2. Пусть $H \subset G$, причем для любого такого графа S , $S \subseteq G \setminus H$, что множество ребер $E(G) \setminus (E(G \setminus S) \cup E(S))$ пусто, справедливо неравенство $f(G, G \setminus S) \neq 0$. Тогда выполнено одно из двух свойств:

- найдется такой граф X , что $H \subseteq X \subseteq G$ и пары (X, H) и (G, X) являются α -нейтральной цепью и α -надежной цепью соответственно;
- найдутся такие графы X, Y , что $H \subset Y \subseteq X \subseteq G$ и пары (Y, H) , (X, Y) и (G, X) являются α -жесткой, α -нейтральной и α -надежной цепью соответственно.

Доказательство. Если для любого такого S , что $H \subset S \subseteq G$, справедливо неравенство $f(S, H) \geq 0$, то выполнено первое свойство. Действительно, при наших предположениях найдутся такие графы $S_0, \dots, S_s$, что $H = S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_s = G$ и для любого $i \in \{1, 2, \dots, s-1\}$ справедливо равенство $f(S_i, H) = 0$, причем $E(S_i) \setminus (E(S_{i-1}) \cup E(S_i \setminus S_{i-1})) \neq \emptyset$, для любого такого S , что $S_{i-1} \subset S \subset S_i$, выполнено неравенство $f(S, H) > 0$, для любого такого S , что $S_{s-1} \subset S \subset S_s$, также выполнено неравенство $f(S, H) > 0$, при этом либо $f(S_s, H) > 0$, либо $f(S_s, H) = 0$ и $E(S_s) \setminus (E(S_{s-1}) \cup E(S_s \setminus S_{s-1})) \neq \emptyset$. Следовательно, в силу равенства (1) для любого $i \in \{1, 2, \dots, s-1\}$ справедливо равенство $f(S_i, S_{i-1}) = 0$; для любого такого S , что $S_{i-1} \subset S \subset S_i$, выполнено неравенство $f(S, S_{i-1}) > 0$; для любого такого S , что $S_{s-1} \subset S \subset S_s$, также выполнено неравенство $f(S, S_{s-1}) > 0$, при этом либо $f(S_s, S_{s-1}) > 0$, либо $f(S_s, S_{s-1}) = 0$. Если справедливо $f(S_s, S_{s-1}) > 0$, то пара (S_{s-1}, H) является α -нейтральной цепью, а пара (G, S_{s-1}) является α -надежной цепью. Действительно, для каждого $i \in \{1, 2, \dots, s-1\}$ мы можем выбрать в графе S_{i-1} непустой подграф T_{i-1} , каждая вершина которого соединена с некоторой вершиной графа $S_i \setminus S_{i-1}$ (так как $E(S_i) \setminus (E(S_{i-1}) \cup E(S_i \setminus S_{i-1})) \neq \emptyset$), тогда пара $(S_i \setminus (S_{i-1} \setminus T_{i-1}), T_{i-1})$ является α -нейтральной. Во втором случае (где $f(S_s, S_{s-1}) = 0$) пара (G, H) является α -нейтральной цепью. Итак, первая часть леммы верна.

Пусть теперь S — такой граф, что $H \subset S \subseteq G$ и $f(S, H) < 0$. Покажем, что найдется такой граф $\hat{S}_1$, что $H \subset \hat{S}_1 \subseteq S$ и пара $(\hat{S}_1, H)$ является α -жесткой.

Если для любого такого графа S_0 , что $H \subset S_0 \subset S$, верно неравенство $f(S, S_0) < 0$, то пара (S, H) является α -жесткой.

Предположим, что нашлось ровно r таких графов $S_1, \dots, S_r$, что $H \subset S_i \subset S$ и справедливо неравенство $f(S, S_i) \geq 0$. Тогда найдется такой граф S_j , что $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ и для любого $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, отличного от j , выполнено неравенство $S_j \cap S_i \neq S_j$. Значит, для любого такого графа $\tilde{T}$, что $H \subseteq \tilde{T} \subset S_j$, справедливо неравенство $f(S, \tilde{T}) < 0$, а следовательно, в силу тождества (1) выполнено неравенство $f(S_j, \tilde{T}) < 0$, то есть пара (S_j, H) является α -жесткой. Таким образом, мы нашли такой граф $\hat{S}_1$, что пара $(\hat{S}_1, H)$ является α -жесткой.

Рассмотрим теперь пару $(G, \hat{S}_1)$, применим для нее те же рассуждения, то есть найдем такой граф $\hat{S}_2$, что пара $(\hat{S}_2, \hat{S}_1)$ является α -жесткой, и так до тех пор, пока среди подграфов графа G , являющихся расширением графа $\hat{S}_s$, не найдется такого, что $f(\cdot, \hat{S}_s) < 0$. Заметим, что если пары (B, A) и (C, B) являются α -жесткими, то пара (C, A) также является α -жесткой. Таким образом, пара $(\hat{S}_s, H)$ является α -жесткой.

Лемма доказана.

Сформулируем теперь лемму о числе надежных расширений.

Лемма 3. Пусть $p = N^{-\alpha}$, $\alpha > 0$. Пусть, кроме того, пара (G, H) является α -надежной, $H \subset S \subset G$, и пара (G, S) является α -надежной. Если $|V(H)| = k$, $|V(S)| = s$, то существует такое число $\beta > 0$, что с асимптотической вероятностью 1 для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_s$ справедливо равенство

$$N_{(G,S)}(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_s) = \Theta(N_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)N^{-\beta}).$$

Доказательство. В силу того, что пара (G, H) является α -надежной, выполнено неравенство $f(S, H) > 0$. Поэтому, в силу тождества (1), справедливо неравенство $f(G, S) < f(G, H)$. Положим

$$\beta = f(G, H) - f(G, S).$$

Обратимся к теореме 1. Из нее, очевидно, следует, что с асимптотической вероятностью 1 для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_s$ справедливы соотношения

$$N_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = \Theta(N^{f(G,H)}),$$

$$N_{(G,S)}(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_s) = \Theta(N^{f(G,S)}).$$

Следовательно,

$$N_{(G,S)}(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_s) = \Theta(N_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)N^{-\beta}).$$

Лемма доказана.

В 1988 г. С. Шела и Дж. Спенсер доказали сформулированную ниже лемму о жестких цепях.

Лемма 4 ([2, 3]). Пусть $p = N^{-\alpha}$, $\alpha > 0$. Пусть, кроме того, t, r — произвольные натуральные числа. Тогда существует такое число $K(t, r)$, что с асимптотической вероятностью 1 для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_r$ выполнено неравенство

$$|V(cl_t(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_r))| \leq K(t, r).$$

Сформулируем, наконец, лемму о числе нейтральных расширений.

Лемма 5. Пусть

$$p = N^{-\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad \beta > 0.$$

Пусть, кроме того, пара (G, H) является α -нейтральной. Если $|V(H)| = k$, то с асимптотической вероятностью 1 для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ справедливы соотношения

$$N_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = o(N^\beta),$$

$$N_{(G,H)}^{\text{strict}}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = o(N^\beta).$$

Доказательство. Покажем, что если утверждение теоремы не выполнено, то в графе с асимптотической вероятностью 1 найдется огромное число копий строго сбалансированного графа, являющихся расширениями одного и того же подграфа. Это число окажется асимптотически бóльшим, чем то, которое возникает в теореме 4. Напомним, что мы

считаем справедливым равенство $|V(G)| = l$. Пусть $\xi \in \mathbb{N}$ таково, что справедливо неравенство

$$\xi > \max \left\{ \frac{2k^2(l-k)}{\alpha}, \frac{2k}{\beta} \right\}.$$

Рассмотрим $R_1, \dots, R_\xi$ — точные (G, H) -расширения графа H , каждые два из которых пересекаются в точности по H . Пусть между любыми двумя из этих расширений нет ребер, то есть для любых $i \neq j$ множество $E(R_i \cup R_j \setminus H) \setminus (E(R_i \setminus H) \cup E(R_j \setminus H))$ пусто. Положим $S = R_1 \cup \dots \cup R_\xi$. Будем считать, что $E(H) = \emptyset$. Справедливость всех дальнейших выводов от этого не изменится, потому что в графе H нам важен только порядок и число вершин. Докажем, что при сделанном предположении граф S является строго сбалансированным с плотностью

$$\rho(S) = \frac{\xi(l-k)}{\alpha(\xi(l-k) + k)}.$$

Рассмотрим некоторый подграф X в S и его пересечения с графами $R_1 \setminus H, R_2 \setminus H, \dots, R_\xi \setminus H$. Предположим, что он имеет ненулевое пересечение только с графами $R_{i_1} \setminus H, \dots, R_{i_v} \setminus H$. Пусть $X_0 = H \cap X$, $X_1 = (R_{i_1} \setminus H) \cap X$, $X_2 = (R_{i_2} \setminus H) \cap X, \dots, X_v = (R_{i_v} \setminus H) \cap X$. Пусть, кроме того, $v_0 = |V(X_0)|$, $v_1 = |V(X_1)|, \dots, v_v = |V(X_v)|$, $e_0 = |E(X_0)| = 0$, $e_1 = |E(X_1 \cup X_0) \setminus E(X_0)| = |E(X_1 \cup X_0)|$, $e_2 = |E(X_2 \cup X_0) \setminus E(X_0)| = |E(X_2 \cup X_0)|, \dots$, $e_v = |E(X_v \cup X_0) \setminus E(X_0)| = |E(X_v \cup X_0)|$.

Справедливо равенство

$$\rho(X) = \frac{\sum_{i=0}^v e_i}{\sum_{i=0}^v v_i}.$$

Рассмотрим два случая: первый — $X_0 = H$, второй — $X_0 \subset H$. Оценим $\rho(X)$ в обоих случаях. Обратимся к первому случаю. Справедливы соотношения

$$\rho(X) = \frac{\sum_{i=1}^v e_i}{\sum_{i=1}^v v_i + v_0} \leq \frac{\sum_{i=1}^v v_i}{\alpha \left(\sum_{i=1}^v v_i + k \right)}$$

Следовательно, $\rho(X) < \rho(S)$ при $\sum_{i=1}^v v_i < \xi(l-k)$ (в этом случае $X \subset S$). Если $\sum_{i=1}^v v_i = \xi(l-k)$, то $X = S$ и $\rho(X) = \rho(S)$.

Рассмотрим второй случай: $X_0 \subset H$. Разобьем множество $I = \{1, 2, \dots, v\}$ на два подмножества I_1, I_2 , $I = I_1 \sqcup I_2$ в соответствие со следующими условиями:

$$i \in I_1 \iff v_i = l - k, \quad i \in I_2 \iff v_i < l - k.$$

Если $i \in I_1$, то

$$e_i = e((G \setminus H) \cup X_0, X_0) \leq e(G, H) - (k - v_0) = \frac{v_i}{\alpha} - (k - v_0)$$

(неравенство в этой цепочке справедливо, так как по определению нейтральной пары каждая вершина из $H \setminus X_0$ соединена с некоторой вершиной из X_i). Если же $i \in I_2$, то

$$e_i < e(X_i \cup H, H) < \frac{v_i}{\alpha},$$

$$e_i \leq v_i/\alpha - \frac{1}{v(G, H)} = \frac{v_i}{\alpha} - \frac{1}{l-k}$$

(последнее неравенство выполнено, так как $\alpha = v(G, H)/e(G, H)$). В силу сделанных выводов

$$\rho(X) = \frac{\sum_{i \in I_1} e_i + \sum_{i \in I_2} e_i}{\sum_{i=1}^v v_i + v_0} \leq \frac{\sum_{i=1}^v v_i - \alpha \left(|I_1|(k - v_0) + \frac{|I_2|}{l-k} \right)}{\alpha \left(\sum_{i=1}^v v_i + v_0 \right)}.$$

Предположим, что

$$\sum_{i=1}^v v_i < \frac{v_0 \xi (l-k)}{k}.$$

При таком допущении

$$\rho(X) \leq \frac{\sum_{i=1}^v v_i}{\alpha \left(\sum_{i=1}^v v_i + v_0 \right)} < \frac{v_0 \xi (l-k)}{k \alpha (v_0 \xi (l-k)/k + v_0)} = \rho(S).$$

Предположим теперь, что

$$\sum_{i=1}^v v_i \geq \frac{v_0 \xi (l-k)}{k}, \quad v_0 \neq 0.$$

Тогда справедливо неравенство

$$|I| \geq \frac{v_0 \xi}{k},$$

а следовательно,

$$\max\{|I_1|, |I_2|\} \geq \frac{v_0 \xi}{2k}.$$

Поэтому выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \rho(X) &\leq \frac{\sum_{i=1}^v v_i - \frac{\alpha v_0 \xi}{2k} \min \left\{ k - v_0, \frac{1}{l-k} \right\}}{\alpha \left(\sum_{i=1}^v v_i + v_0 \right)} \\ &\leq \frac{1}{\alpha} - \frac{\xi}{2(l-k)(\xi(l-k) + k)k} < \rho(S). \end{aligned}$$

Последнее неравенство справедливо в силу выбора ξ .

Осталось рассмотреть случай $v_0 = 0$. Воспользовавшись неравенством

$$\max\{|I_1|, |I_2|\} \geq \frac{v}{2},$$

получим, что

$$\begin{aligned} \rho(X) &\leq \frac{\sum_{i=1}^v v_i - \frac{\alpha v}{2(l-k)}}{\alpha \sum_{i=1}^v v_i} \leq \frac{v(l-k) - \alpha v/(2(l-k))}{\alpha v(l-k)} \\ &= \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2(l-k)^2} < \rho(S), \end{aligned}$$

где последнее неравенство справедливо опять благодаря выбору ξ . Итак, S — строго сбалансированный граф с плотностью

$$\rho(S) = \frac{\xi(l-k)}{\alpha(\xi(l-k) + k)} < \frac{1}{\alpha}.$$

Рассмотрим событие $\mathcal{A}_\beta(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$, заключающееся в том, что у вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ найдется не менее $N^{\beta/2}$ точных (G, H) -расширений. Пусть $\mathcal{S}_0 \subseteq \Omega_N$ — множество графов, у которых существуют такие вершины $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$, что выполняется свойство $\mathcal{A}_\beta(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$. В дальнейшем нам потребуется несколько раз применять лемму о жестких цепях. Поэтому рассмотрим множество графов $\mathcal{S}_1 \subseteq \Omega_N$, для которых утверждение леммы о жестких цепях верно при $t = 2(l-k)$, $r \in \{k, k+1, \dots, l\}$. Иными словами, для каждого графа $\tilde{G}_1 \in \mathcal{S}_1$ и для любого $r \in \{k, k+1, \dots, l\}$ существует такая константа $K(2(l-k), r)$, что для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_r$ графа $\tilde{G}_1$ справедливо неравенство

$$|V(cl_{2(l-k)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_r))| \leq K(2(l-k), r).$$

Пусть $\mathcal{S}_2 \subseteq \Omega_N$ — множество графов, в которых число копий S ограничено сверху величиной $\Theta(N^{(\xi(l-k)+k)(1-\alpha\rho(S))}) = \Theta(N^{(\xi(l-k)+k)(1-\xi(l-k)(\xi(l-k)+k))}) = \Theta(N^k)$. Положим $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \cap \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$. Требуется доказать справедливость равенства

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{N,p}(\mathcal{S}_0) = 0.$$

В силу леммы о жестких цепях и теоремы 4, справедливо тождество

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{N,p}(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2) = 1.$$

Поэтому достаточно показать, что вероятность $\mathbf{P}_{N,p}(\mathcal{S})$ стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$.

Пусть $\tilde{G} \in \mathcal{S}$. Следовательно, $\tilde{G} \in \mathcal{S}_0$, иными словами, существуют вершины $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k \in V(\tilde{G})$, для которых граф $\tilde{G}$ обладает свойством $\mathcal{A}_\beta(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$. Зафиксируем $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$. Покажем, что в графе $\tilde{G}$ существуют точные (G, H) -расширения $\tilde{R}_1, \dots, \tilde{R}_m$ графа $\tilde{H} = \tilde{G}|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}}$, $m \geq \Theta(N^{\beta/2})$, каждые два из которых пересекаются в точности по $\tilde{H}$, обладающие следующим свойством: для любых $i \neq j$ множество $E(\tilde{R}_i \cup \tilde{R}_j \setminus \tilde{H}) \setminus (E(\tilde{R}_i \setminus \tilde{H}) \cup (E(\tilde{R}_j \setminus \tilde{H})))$ пусто, то есть каждая вершина графа $\tilde{R}_i \setminus \tilde{H}$

не соединена ни с одной вершиной графа $\tilde{R}_j \setminus \tilde{H}$. Для этого мы сначала докажем, что существует такая константа K_1 , что для каждого $\tilde{R}_i$ в $\tilde{G}$ существует не более чем K_1 точных (G, H) -расширений графа $\tilde{H}$, пересекающихся с $\tilde{R}_i$ более чем по $\tilde{H}$. После чего останется доказать, что в $\tilde{G}$ число пар точных (G, H) -расширений графа $\tilde{H}$, между которыми есть ребро (множество $E(\tilde{R}_i \cup \tilde{R}_j \setminus \tilde{H}) \setminus (E(\tilde{R}_i \setminus \tilde{H}) \cup (E(\tilde{R}_j \setminus \tilde{H})))$ не пусто) ограничено некоторой константой K_2 . Итак, оценим для некоторого графа $\tilde{R}_i$ число $\eta_1(\tilde{R}_i)$ таких графов $\tilde{R}_j$, что $\tilde{R}_i \cap \tilde{R}_j \supset \tilde{H}$. Пусть $\tilde{R}_j$ — такой граф. Тогда для любого графа X , $\tilde{R}_i \cap \tilde{R}_j \subseteq X \subset \tilde{R}_i$, выполнены соотношения $f(X, \tilde{H}) > 0$ и $f(\tilde{R}_i, \tilde{H}) = 0$. Поэтому в силу тождества (1) справедливо неравенство $f(\tilde{R}_i, X) < 0$ (если $\tilde{R}_i \cap \tilde{R}_j = \tilde{H}$ и $X = \tilde{R}_i \cap \tilde{R}_j$, то $f(\tilde{R}_i, X) = 0$). Следовательно, пара $(\tilde{R}_i, \tilde{R}_i \cap \tilde{R}_j)$ является жесткой. Заметим, что число подграфов в G , содержащих H , ограничено константой 2^{l-k} . С другой стороны, $\tilde{G} \in \mathcal{S}_1$. Поэтому

$$\eta_1(\tilde{R}_i) \leq 2^{l-k} \max\{K(2(l-k), k+1), K(2(l-k), k+2), \dots, K(2(l-k), l)\} = K_1.$$

Оценим теперь число $\eta_2(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j)$ таких пар графов $(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j)$, которые пересекаются в точности по $\tilde{H}$, что между графами $\tilde{R}_i \setminus \tilde{H}$ и $\tilde{R}_j \setminus \tilde{H}$ есть ребро из множества $E(\tilde{G})$. Итак, пусть $(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j)$ — такая пара. Докажем, что пара $(\tilde{R}_i \cup \tilde{R}_j, \tilde{H})$ является α -жесткой. Рассмотрим граф X , для которого $\tilde{H} \subseteq X \subset \tilde{R}_i \cup \tilde{R}_j$. Положим $X_i = X \cap \tilde{R}_i$, $X_j = X \cap \tilde{R}_j$. Если $\tilde{H} \subseteq X_i \subset \tilde{R}_i$, $\tilde{H} \subseteq X_j \subset \tilde{R}_j$ (при этом только в одном из двух нестрогих включений достигается равенство), то справедливы неравенства $f(\tilde{R}_i, X_i) \leq 0$, $f(\tilde{R}_j, X_j) \leq 0$ (опять же, только в одном из этих неравенств достигается равенство). Поэтому $f(\tilde{R}_i \cup \tilde{R}_j, X) < 0$. Если $X_i = \tilde{H}$ и $X_j = \tilde{H}$, то $X = \tilde{H}$, и в связи с наличием дополнительного ребра $f(\tilde{R}_i \cup \tilde{R}_j, X) < 0$. Если, скажем, граф X_i совпадает с графом $\tilde{R}_i$, при этом граф X_j отличен от $\tilde{H}$, то $f(\tilde{R}_i \cup \tilde{R}_j, X) \leq f(\tilde{R}_j, X_j) < 0$. Если же граф X_i совпадает с графом $\tilde{R}_i$, а граф X_j совпадает с $\tilde{H}$, то

$$f(\tilde{R}_i \cup \tilde{R}_j, X) \leq f(\tilde{R}_j, \tilde{H}) - \alpha = -\alpha < 0.$$

Таким образом, в каждом из случаев выполнено неравенство $f(\tilde{R}_i \cup \tilde{R}_j, X) < 0$, то есть пара $(\tilde{R}_i \cup \tilde{R}_j, \tilde{H})$ является α -жесткой. Вспомним теперь, что граф $\tilde{G}$ содержится в множестве $\mathcal{S}_1$. Следовательно, для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ графа $\tilde{G}$ мощность множества $|V(cl_{2(l-k)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k))|$ не превосходит $K(2(l-k), k)$. В силу сделанных выводов,

$$\eta_2(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j) \leq K(2(l-k), k) = K_2.$$

Таким образом, мы можем утверждать, что в графе $\tilde{G}$ найдется $\binom{m}{\xi} \geq \Theta(N^{\xi\beta/2})$ точных (S, H) -расширений графа $\tilde{H}$. Граф $\tilde{G}$ содержится в $\mathcal{S}_2$, поэтому число копий S в нем не более, чем $\Theta(N^k)$. Но $\xi > 2k/\beta$. Получили противоречие, а следовательно, $\mathcal{S} = \emptyset$.

Для завершения доказательства леммы осталось показать, что число (G, H) -расширений с дополнительным ребром ограничено константой. Но это так в силу леммы о жестких цепях. Действительно, если к нейтральной паре добавить ребро, то получится жесткая пара, а число соответствующих расширений ограничено константой. Лемма доказана.

Теперь мы можем обратиться непосредственно к доказательству того, что число с дополнительными ребрами бесконечно мало по сравнению с числом всех расширений.

3.2.2. Доказательство теоремы о точных надежных расширениях

Требуется доказать, что если (G, H) — α -надежная пара, то число всех (G, H) -расширений эквивалентно числу точных (G, H) -расширений.

Так как число различных способов добавить ребра в множество $E(G) \setminus E(H)$ является константой (не зависит от N), нам достаточно показать, что как бы мы ни добавляли ребра в это множество, число полученных расширений будет бесконечно мало по сравнению с числом точных расширений без добавленных ребер.

Итак, добавим в множество $E(G) \setminus E(H)$ ξ ребер. В результате граф G заменится на граф $\hat{G}$. Предположим, что в графе $\hat{G} \setminus H$ найдется такой подграф $\hat{S}$, что справедливо равенство $f(\hat{G}, \hat{G} \setminus \hat{S}) = 0$, при этом множество ребер $E(\hat{G}) \setminus (E(\hat{G} \setminus \hat{S}) \cup E(\hat{S}))$ пусто. Положим $S = G|_{V(\hat{S})}$, $s = |V(S \cup H)|$. Тогда либо пара $(G, G \setminus S)$ является α -надежной, либо $\rho(S) = 1/\alpha$. Во втором случае приходим к противоречию, так как если $f(S \cup H, H) = 0$, то пара (G, H) не является α -надежной. В первом случае в силу леммы 3 и теоремы 4 найдется такое $\beta > 0$, что с асимптотической вероятностью 1 для любых вершины $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_s$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} N_{(\hat{G}, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) &= N_{(\hat{S} \cup H, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) N_{(\hat{G}, \hat{S} \cup H)}(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_s) \\ &\leq N_{\hat{S}} N_{(G, S \cup H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \\ &= o(N^{\beta/2} N^{-\beta} N_{(G, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)) \\ &= o(N_{(G, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)) \end{aligned}$$

Будем теперь считать, что для любого такого графа $\hat{S}$, $\hat{S} \subseteq \hat{G} \setminus H$, что множество ребер $E(\hat{G}) \setminus (E(\hat{G} \setminus \hat{S}) \cup E(\hat{S}))$ пусто, справедливо неравенство $f(\hat{G}, \hat{G} \setminus \hat{S}) \neq 0$. Тогда в соответствии с леммой 2 нам нужно рассмотреть семь случаев:

- (1) пара $(\hat{G}, H)$ является α -надежной;
- (2) пара $(\hat{G}, H)$ является α -нейтральной цепью;
- (3) пара $(\hat{G}, H)$ является α -жесткой;
- (4) существует такой граф $\hat{X}$, $H \subset \hat{X} \subset \hat{G}$, что пара $(\hat{X}, H)$ является α -нейтральной цепью, пара $(\hat{G}, \hat{X})$ является α -надежной;
- (5) существует такой граф $\hat{X}$, $H \subset \hat{X} \subset \hat{G}$, что пара $(\hat{X}, H)$ является α -жесткой, пара $(\hat{G}, \hat{X})$ является α -надежной;
- (6) существует такой граф $\hat{X}$, $H \subset \hat{X} \subset \hat{G}$, что пара $(\hat{X}, H)$ является α -жесткой, пара $(\hat{G}, \hat{X})$ является α -нейтральной цепью;
- (7) существуют такие графы $\hat{X}, \hat{Y}$, $H \subset \hat{Y} \subset \hat{X} \subset \hat{G}$, что пара $(\hat{Y}, H)$ является α -жесткой, пара $(\hat{X}, \hat{Y})$ является α -нейтральной цепью, пара $(\hat{G}, \hat{X})$ является α -надежной.

В первом случае, в силу того, что число ребер увеличилось, величина $f(G, H)$ уменьшилась на $\alpha\xi$, то есть $f(\hat{G}, H) = f(G, H) - \alpha\xi$. Следовательно, по теореме 1 с асимптотической вероятностью 1 для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ справедливы равенства

$$N_{(\hat{G}, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = \Theta(N^{f(\hat{G}, H)}) = o(N^{f(G, H)}) = o(N_{(G, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)).$$

Во втором случае равенство

$$N_{(\hat{G}, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = o(N_{(G, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k))$$

справедливо в силу леммы о числе нейтральных расширений, в третьем случае — в силу леммы о жестких цепях.

Рассмотрим одновременно четвертый и пятый случай. Иными словами, либо пара $(\hat{X}, H)$ является α -нейтральной цепью, либо она α -жесткая. Положим $|V(\hat{X})| = s$. Рассмотрим граф $X = G|_{V(\hat{X})}$. Тогда $\hat{G}$ является (G, X) -расширением графа $\hat{X}$, где пара (G, X) является α -надежной (так как пара $(\hat{G}, \hat{X})$ является α -надежной, а множество $E(\hat{G}) \setminus E(\hat{X})$ содержит в себе множество $E(G) \setminus E(X)$). В силу леммы 3, найдется такое число $\beta > 0$, что с асимптотической вероятностью 1 для любых вершин $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_s$ и $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ справедливо равенство

$$N_{(\hat{G}, \hat{X})}(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_s) = O(N_{(G, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)N^{-\beta}).$$

С другой стороны, в силу леммы 5, в случае нейтральной цепи $(\hat{X}, H)$ (утверждение леммы 5, очевидно, выполнено и для нейтральных цепей) и леммы 4 в случае жесткой пары $(\hat{X}, H)$, с асимптотической вероятностью 1 для любых $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ справедливо равенство

$$N_{(\hat{X}, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = o(N^{\beta/2}).$$

Следовательно, с асимптотической вероятностью 1 для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ выполнены равенства

$$N_{(\hat{G}, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = o(N_{(G, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)N^{-\beta/2}) = o(N_{(G, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)).$$

В шестом случае для любого положительного $\beta \leq f(G, H)$ с асимптотической вероятностью 1 для любых $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ справедлива цепочка равенств

$$N_{(\hat{G}, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = o(N^\beta) = o(N^{f(G, H)}) = o(N_{(G, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)).$$

Пусть, наконец, существуют такие графы $\hat{X}, \hat{Y}, H \subset \hat{Y} \subset \hat{X} \subset \hat{G}$, что пара $(\hat{Y}, H)$ является α -жесткой, пара $(\hat{X}, \hat{Y})$ является α -нейтральной цепью, пара $(\hat{G}, \hat{X})$ является α -надежной. Вспомним доказательство леммы 2. Если для каждого графа $\hat{S}, H \subset \hat{S} \subseteq \hat{G}$, справедливо неравенство $f(\hat{S}, H) \geq 0$, то задачу можно свести к предыдущим случаям. Если же существует граф $\hat{S}, H \subset \hat{S} \subseteq \hat{G}$, для которого $f(\hat{S}, H) < 0$, то можно так подобрать подходящие под условие текущего случая графы $\hat{X}, \hat{Y}$, что для любого графа $\hat{R}, \hat{Y} \subset \hat{R} \subseteq \hat{G}$, справедливо неравенство $f(\hat{R}, \hat{Y}) \geq 0$. Пусть $\hat{X}, \hat{Y}$ — такие графы. Положим $X = G|_{V(\hat{X})}$, $Y = G|_{V(\hat{Y})}$. Так как $E(G) \subset E(\hat{G})$, неравенство $f(R, Y) \geq 0$ выполнено для каждого графа $R, Y \subset R \subseteq G$. Пусть $|V(Y)| = s$. Из четвертого случая следует, что с асимптотической вероятностью 1 для любых вершин $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_s$ справедливо равенство

$$N_{(\hat{G}, \hat{Y})}(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_s) = o(N_{(G, Y)}(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_s)).$$

Так как для любого графа $R, Y \subset R \subseteq G$, справедливо неравенство $f(R, Y) \geq 0$, вновь обращаясь к доказательству леммы 2, мы видим, что существуют такие графы $Z, W, Y \subseteq Z \subseteq W \subseteq G$, что пара (Z, Y) является α -нейтральной цепью, пара (W, Z) является α -надежной, $f(G, W) = 0$, и $E(G) \setminus (E(G \setminus W) \cup E(W)) = \emptyset$. Если $W \neq G$, то множество

$E((G \setminus W) \cup H) \setminus (E(G \setminus W) \cup E(H))$ должно быть пустым, иначе $f((G \setminus W) \cup H, H) < 0$ и пара (G, H) не является α -надежной. Но в этом случае $f((G \setminus W) \cup H, H) = 0$ и пара (G, H) снова не является α -надежной. Поэтому графы W и G совпадают. Тогда, в силу леммы о числе нейтральных расширений и леммы о числе надежных расширений, существует такое $\beta > 0$, что с асимптотической вероятностью 1 для любых вершин $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_s, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} N_{(G,H)}(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_s) &= O(N_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) N^{-\beta} N_{(Z,Y)}(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_s)) \\ &= o(N_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) N^{-\beta/2}) = o(N_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)). \end{aligned}$$

В силу леммы 4, существует такое число $K(s - k, k)$, что с асимптотической вероятностью 1 для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ выполнено неравенство

$$N_{(\hat{Y},H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \leq K(s - k, k).$$

Поэтому с асимптотической вероятностью 1 для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ выполнены равенства

$$N_{(\hat{G},H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = o(K(s - k, k) N_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)) = o(N_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)).$$

Теорема доказана.

Обратимся теперь непосредственно к доказательству теоремы 2. Используем индукцию, причем базой индукции будет служить предложение 1, доказываемое в следующем параграфе.

3.3. Доказательство предложения 1

Рассмотрим графы H, G, T, K , для которых выполнены следующие свойства: $H \subset G$, $T \subset K$, $|V(T)| \leq |V(G)|$; пара (G, H) является α -надежной; пара (K, T) является α -нейтральной.

Рассмотрим, кроме того, графы $\tilde{H}, \tilde{G}, \tilde{K}, \tilde{T}$. Пусть $|V(\tilde{H})| = |V(H)| = k$, $\tilde{T} \subseteq \tilde{G}$, $\tilde{K} \cap \tilde{G} = \tilde{T}$, $\tilde{H} \cap \tilde{T} \neq \tilde{T}$; $\tilde{G}$ есть точное (G, H) -расширение графа $\tilde{H}$, $\tilde{K}$ есть точное (K, T) -расширение графа $\tilde{T}$, множество $E((\tilde{K} \cup \tilde{G}) \setminus \tilde{T}) \setminus (E(\tilde{K} \setminus \tilde{T}) \cup E(\tilde{G} \setminus \tilde{T}))$ пусто. Набор таких графов $(\tilde{G}, \tilde{H}, \tilde{K}, \tilde{T})$ будем называть $(G, H, K, T, 1)$ -сетью.

Определим аналогичное понятие в случае, когда в построении участвует несколько (K, T) -расширений. Пусть $(\tilde{G}, \tilde{H}, \tilde{K}_1, \tilde{T}_1), \dots, (\tilde{G}, \tilde{H}, \tilde{K}_r, \tilde{T}_r)$ являются $(G, H, K, T, 1)$ -сетями. Пусть, кроме того, между любыми двумя графами из множества $\{\tilde{K}_i \setminus \tilde{T}_i\}_{i \in \{1, \dots, r\}}$ нет ребер, и для всех $i \neq j$ множества $V(\tilde{K}_i \setminus \tilde{T}_i)$ и $V(\tilde{K}_j \setminus \tilde{T}_j)$ не пересекаются. Тогда набор $(\tilde{G}, \tilde{H}, \tilde{K}_i, \tilde{T}_i, i \in \{1, \dots, r\})$ будем называть (G, H, K, T, r) -сетью.

Рассмотрим графы $\Gamma, \tilde{G}, \Gamma \supset \tilde{G}$. Пусть $\tilde{G}$ — точное (G, H) -расширение графа $\tilde{H}$. Рассмотрим все $(G, H, K, T, 1)$ -сети вида $(\tilde{G}, \tilde{H}, \tilde{K}_i, \tilde{T}_i)$, $i \in \{1, \dots, M\}$, где все графы $\tilde{K}_i, \tilde{T}_i$ содержатся в Γ . Определим максимальный отделимый подграф $U(\Gamma, \tilde{G}, \tilde{H}, K, T)$. Пусть $\mathcal{J} \subset 2^{\{1, \dots, M\}}$ — такое множество подмножеств в $\{1, \dots, M\}$, что для любого $I \in \mathcal{J}$ и любых $i, j \in I$, $i \neq j$, граф $(\tilde{G} \cup \tilde{K}_i) \cap (\tilde{G} \cup \tilde{K}_j)$ совпадает с графом $\tilde{G}$ и множество ребер $E((\tilde{K}_i \setminus \tilde{T}_i) \cup (\tilde{K}_j \setminus \tilde{T}_j)) \setminus (E(\tilde{K}_i \setminus \tilde{T}_i) \cup E(\tilde{K}_j \setminus \tilde{T}_j))$ пусто. Пусть $\hat{I} \in \mathcal{J}$ — любое множество, для которого $|\hat{I}| = \max\{|I| : I \in \mathcal{J}\}$. Тогда

$$U(\Gamma, \tilde{G}, \tilde{H}, K, T) = \left(\bigcup_{i \in \hat{I}} \tilde{K}_i \right) \cup \tilde{G}.$$

Если пара графов $\tilde{K}_1, \tilde{K}_2$ обладает свойствами пар графов, принадлежащих максимальному отделимому подграфу, то будем говорить, что эта пара обладает свойством отделимости (граф $(\tilde{G} \cup \tilde{K}_1) \cap (\tilde{G} \cup \tilde{K}_2)$ совпадает с графом $\tilde{G}$ и множество ребер $E((\tilde{K}_1 \setminus \tilde{T}_1) \cup (\tilde{K}_2 \setminus \tilde{T}_2)) \setminus (E(\tilde{K}_1 \setminus \tilde{T}_1) \cup E(\tilde{K}_2 \setminus \tilde{T}_2))$ пусто); про какие графы $\tilde{G}, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2$ идет речь, при этом будет ясно из контекста.

Обозначим через $d_r(\Gamma, \tilde{G}, \tilde{H}, K, T)$ есть число различных (G, H, K, T, r) -сетей вида $(\tilde{G}, \tilde{H}, \tilde{K}_i, \tilde{T}_i, i \in \{1, \dots, r\})$, где все графы $\tilde{K}_i$ есть подграфы графа $U(\Gamma, \tilde{G}, \tilde{H}, K, T)$. Если в графе $U(\Gamma, \tilde{G}, \tilde{H}, K, T)$ не содержится таких подграфов, образующих (G, H, K, T, r) -сеть описанного вида, то будем считать, что $d_r(\Gamma, \tilde{G}, \tilde{H}, K, T) = 0$. Конечно, максимальный отделимый подграф определяется неоднозначно, но однозначно определяется число вершин в нем и число образующих его графов $\tilde{K}_i$ (это число равно $|\hat{I}|$). Из этого следует, что величина $d_r(\Gamma, \tilde{G}, \tilde{H}, K, T)$ определена однозначно. Следующее рассуждение окончательно прояснит этот факт.

Пусть $d_1(\Gamma, \tilde{G}, \tilde{H}, K, T) \neq 0$, тогда

$$|\hat{I}| = \max\{r: d_r(\Gamma, \tilde{G}, \tilde{H}, K, T) \neq 0\},$$

то есть для каждого $r > |\hat{I}|$ справедливо равенство $d_r(\Gamma, \tilde{G}, \tilde{H}, K, T) = 0$. Тогда, очевидно, для каждого $r \in \{1, \dots, |\hat{I}|\}$ выполнено равенство $d_r(\Gamma, \tilde{G}, \tilde{H}, K, T) = \binom{|\hat{I}|}{r}$ (из этого следует, что величина $d_r(\Gamma, \tilde{G}, \tilde{H}, K, T)$ определена однозначно). Поэтому, если $d_1(\Gamma, \tilde{G}, \tilde{H}, K, T) \neq 0$, то справедливо тождество

$$\sum_{r \geq 1} (-1)^{r-1} d_r(\Gamma, \tilde{G}, \tilde{H}, K, T) = 1.$$

Пусть $D_{\tilde{H}}(\Gamma, G, H, K, T)$ — число точных (G, H) -расширений $\tilde{G}$ графа $\tilde{H}$ в графе Γ , для которых число $d_1(\Gamma, \tilde{G}, \tilde{H}, K, T)$ отлично от нуля. В силу сделанных выводов несложно видеть, что выполнено равенство

$$D_{\tilde{H}}(\Gamma, G, H, K, T) = \sum_{r \geq 1} \sum_{\tilde{G}} (-1)^{r-1} d_r(\Gamma, \tilde{G}, \tilde{H}, K, T), \quad (2)$$

где суммирование ведется по всем таким графам $\tilde{G}$, являющимся точными (G, H) -расширениями графа $\tilde{H}$, что $\tilde{H} \subset \tilde{G} \subset \Gamma$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Предложение 2. Для таких графов $\Gamma, \tilde{H}$, что $\tilde{H} \subset \Gamma$, $|V(\tilde{H})| = |V(H)|$, справедливо тождество (2).

Рассмотрим случайный граф $G(N, p)$, где $p = N^{-\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$, и α есть рациональное число. Пусть, как и раньше,

$$|V(G)| = l, \quad |V(H)| = k.$$

Положим также

$$|V(K \setminus T)| = t, \quad |V(T)| = m.$$

Обозначим через $N_{(G,H,K,T,r)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$ сумму по всем $\tilde{G}$ в случайном графе, являющимся точными (G, H) -расширениями подграфа, индуцированного на $\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}$, чисел (G, H, K, T, r) -сетей вида $(\tilde{G}, \mathcal{G}_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}}, \tilde{K}_i, \tilde{T}_i, i \in \{1, \dots, r\})$. Иными словами, пусть

$W_G, W_{T_1}, \dots, W_{T_r}, W_{K_1}, \dots, W_{K_r} \subset \mathcal{V}$ — множества, обладающие следующими свойствами:

$$\begin{aligned} W_G \cap \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\} &= \emptyset, & W_{T_i} \cap \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\} &\neq W_{T_i}, \\ W_{T_i} &\subseteq W_G \cup \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}, & W_{K_i} \cap (W_G \cup \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}) &= \emptyset, \\ W_{K_i} \cap W_{K_j} &= \emptyset, & |W_G| &= l - k, \quad |W_{T_i}| = m, \quad |W_{K_i}| = t. \end{aligned}$$

Пусть $\mathbf{W}$ — множество всех наборов из $2r + 1$ множеств, удовлетворяющих перечисленным свойствам. Если граф $\mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\} \cup W_G}$ является точным (G, H) -расширением графа $\mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}}$, графы $\mathcal{G}|_{W_{K_i} \cup W_{T_i}}$ являются точными (K, T) -расширениями графов $\mathcal{G}|_{W_{T_i}}$, и

$$\begin{aligned} E(\mathcal{G}|_{W_{K_i} \cup \mathcal{G}|_{W_{K_j}}}) \setminus (E(\mathcal{G}|_{W_{K_i}}) \cup E(\mathcal{G}|_{W_{K_j}})) &= \emptyset, \\ E(\mathcal{G}|_{W_{K_i} \cup \mathcal{G}|_{(W_G \cup \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}) \setminus W_{T_i}}}) \setminus (E(\mathcal{G}|_{W_{K_i}}) \cup E(\mathcal{G}|_{(W_G \cup \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}) \setminus W_{T_i}})) &= \emptyset, \end{aligned}$$

то положим

$$I_{W_G, W_{T_i}, W_{K_i}, i \in \{1, \dots, r\}}(\mathcal{G}) = 1.$$

В противном случае положим

$$I_{W_G, W_{T_i}, W_{K_i}, i \in \{1, \dots, r\}}(\mathcal{G}) = 0.$$

Тогда случайная величина $N_{(G, H, K, T, r)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$ определяется равенством

$$N_{(G, H, K, T, r)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = \sum_{(W_G, W_{T_1}, \dots, W_{T_r}, W_{K_1}, \dots, W_{K_r}) \in \mathbf{W}} I_{W_G, W_{T_i}, W_{K_i}, i \in \{1, \dots, r\}}.$$

Предложение 3. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $r_0 \in \mathbf{N}$, что для любых $r > r_0$ с асимптотической вероятностью 1 для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} N_{(G, H, K, T, r)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) &\sim \mathbf{E}_{N, p} N_{(G, H, K, T, r)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \\ &= \Theta(N^{f(G, H)}) \leq \varepsilon N^{f(G, H)}. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $S_r^1(G, H, K, T), \dots, S_r^j(G, H, K, T)$ есть всевозможные различные (G, H, K, T, r) -сети вида $(G, H, K_i, T_i, i \in \{1, \dots, r\})$. Пусть $g(S_r^h(G, H, K, T))$, где $S_r^h(G, H, K, T) = (G, H, K_i^h, T_i^h, i \in \{1, \dots, r\})$, есть число всевозможных точных (G, H) -расширений G_0 в $G \cup K_1^h \cup \dots \cup K_r^h$ графа H , для которых существуют такие графы $K_{0,i}^h, T_{0,i}^h, i \in \{1, \dots, r\}$, что набор $(G_0, H, K_{0,i}^h, T_{0,i}^h, i \in \{1, \dots, r\})$ есть (G, H, K, T, r) -сеть и справедливо равенство

$$G_0 \cup K_{0,1}^h \cup \dots \cup K_{0,r}^h = G \cup K_1^h \cup \dots \cup K_r^h.$$

Для каждой сети $S_r^h(G, H, K, T) = (G, H, K_i^h, T_i^h, i \in \{1, \dots, r\})$ положим

$$X_r^h(G, H, K, T) = G \cup K_1^h \cup \dots \cup K_r^h.$$

В силу леммы 1, для любой (G, H, K, T, r) -сети вида $(G, H, K_i^h, T_i^h, i \in \{1, \dots, r\})$ пара $(G \cup K_1^h \cup \dots \cup K_r^h, H)$ является α -надежной. При этом справедливо равенство

$$f(G \cup K_1^h \cup \dots \cup K_r^h, H) = f(X_r^h(G, H, K, T), H) = f(G, H).$$

С одной стороны, в силу теоремы 3 и теоремы 1, для любой α -надежной пары (X, H) с асимптотической вероятностью 1 для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ выполнено соотношение

$$N_{(X,H)}^{\text{strict}}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \sim \mathbf{E}_{N,p}(N_{(X,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)).$$

С другой стороны, для любой r -сети $S_r^h(G, H, K, T)$ справедливо неравенство

$$g(S_r^h(G, H, K, T)) \leq \binom{rt + (l-k)}{l-k} (l-k)!.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} N_{(G,H,K,T,r)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) &= \sum_{h=1}^j N_{(X_r^h(G,H,K,T),H)}^{\text{strict}}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) g(S_r^h(G, H, K, T)) \\ &\sim \sum_{h=1}^j \mathbf{E}_{N,p}(N_{(X_r^h(G,H,K,T),H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)) g(S_r^h(G, H, K, T)) \\ &\leq \binom{rt + (l-k)}{l-k} (l-k)! \sum_{h=1}^j \mathbf{E}_{N,p}(N_{(X_r^h(G,H,K,T),H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)). \end{aligned}$$

Из этой цепочки соотношений, в частности, следует, что

$$\begin{aligned} N_{(G,H,K,T,r)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) &\sim \mathbf{E}_{N,p} N_{(G,H,K,T,r)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \\ &= \Theta(N^{f(G,H)}). \end{aligned}$$

Для любых $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^j \mathbf{E}_{N,p}(N_{(X_r^h(G,H,K,T),H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)) &\leq \frac{(l-k)! (t!)^r}{(l-k+tr)!} \binom{l-k+tr}{l-k} \frac{(tr)!}{r! (t!)^r} \left(\frac{l}{m}\right)^r N^{f(G,H)}. \end{aligned}$$

Следовательно, при достаточно больших r для любых $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^j \mathbf{E}_{N,p}(N_{(X_r^h(G,H,K,T),H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)) g(S_r^h(G, H, K, T)) &\leq \frac{(l-k+tr)!}{r! (tr)!} \left(\frac{l}{m}\right)^r N^{f(G,H)} \leq \frac{1}{z!} 2^{l-k} (tr)^{l-k} \left(\frac{l}{m}\right)^r N^{f(G,H)} \end{aligned}$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $r_0 \in \mathbb{N}$, что для любых $r > r_0$ с асимптотической вероятностью 1 для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ справедливо неравенство

$$N_{(G,H,K,T,r)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \leq \varepsilon N^{f(G,H)}.$$

Утверждение доказано.

С помощью этого утверждения мы сможем оценить число (G, H) -расширений, не являющихся максимальными. Для этого определим новые случайные величины. Для каждого набора вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k \in \mathcal{V}$ обозначим $D_{(G,H,K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$ случайную величину, которая каждому графу $\mathcal{G} \in \Omega_N$ ставит в соответствие число $D_{\mathcal{G}|\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}}(\mathcal{G}, G, H, K, T)$. Случайная величина $d_{(G,H,K,T,r)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$ каждому графу $\mathcal{G} \in \Omega_N$ ставит в соответствие число $\sum_{\tilde{G}} d_r(\mathcal{G}, \tilde{G}, \tilde{H}, K, T)$, где сумма берется по всем $\tilde{G}, \mathcal{G}|\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\} \subset \tilde{G} \subset \mathcal{G}$, являющимся точными (G, H) -расширениями графа $\mathcal{G}|\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}$.

Покажем, что для любого $r > 1$ и любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2r-2} (-1)^{i-1} d_{(G,H,K,T,i)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) &\leq D_{(G,H,K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \\ &\leq \sum_{i=1}^{2r-1} (-1)^{i-1} d_{(G,H,K,T,i)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k). \end{aligned} \quad (3)$$

Неравенство здесь понимается в следующем смысле: случайная величина X_1 на вероятностном пространстве Ω больше величины X_2 , если для каждого $\omega \in \Omega$ выполнено неравенство $X_1(\omega) > X_2(\omega)$.

Пусть $\mathcal{G} \in \Omega_N$, $\tilde{G}$ — точное (G, H) -расширение в графе $\mathcal{G}$ графа $\tilde{H} = \mathcal{G}|\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}$. Положим

$$\xi(\tilde{G}) = \frac{1}{l} (|V(U(\mathcal{G}, \tilde{G}, \tilde{H}, K, T))| - l).$$

При $\xi(\tilde{G}) \geq 1$ и $r \leq (\xi(\tilde{G}) + 1)/2$ справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^{2r-2} (-1)^{i-1} \binom{\xi(\tilde{G})}{i} \leq \sum_{i=1}^{\xi(\tilde{G})} (-1)^{i-1} \binom{\xi(\tilde{G})}{i} \leq \sum_{i=1}^{2r-1} (-1)^{i-1} \binom{\xi(\tilde{G})}{i}$$

Так как

$$\binom{\xi(\tilde{G})}{i} = d_i(\mathcal{G}, \tilde{G}, \tilde{H}, K, T),$$

в силу предложения 1 для любого $r > 1$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{\tilde{G}} \sum_{i=1}^{2r-2} (-1)^{i-1} d_i(\mathcal{G}, \tilde{G}, \tilde{H}, K, T) &\leq D_{\tilde{H}}(\mathcal{G}, G, H, K, T) \\ &\leq \sum_{\tilde{G}} \sum_{i=1}^{2r-1} (-1)^{i-1} d_i(\mathcal{G}, \tilde{G}, \tilde{H}, K, T). \end{aligned}$$

Суммирование в обоих случаях ведется по графам $\tilde{G}, \tilde{H} \subset \tilde{G} \subset \mathcal{G}$, являющимся точными (G, H) -расширениями графа $\tilde{H}$. Это объясняет справедливость неравенств (3).

Возьмем математическое ожидание всех случайных величин в этом неравенстве:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2r-2} (-1)^{i-1} \mathbf{E}_{N,p} d_{(G,H,K,T,i)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) &\leq \mathbf{E}_{N,p} D_{(G,H,K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \\ &\leq \sum_{i=1}^{2r-1} (-1)^{i-1} \mathbf{E}_{N,p} d_{(G,H,K,T,i)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k). \end{aligned} \quad (4)$$

Если бы в неравенствах (3), (4) вместо случайных величин $d_{(G,H,K,T,r)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$ стояли $N_{(G,H,K,T,r)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$, то можно было бы рассмотреть разность $D_{(G,H,K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) - \mathbf{E}_{N,p} D_{(G,H,K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$ и воспользоваться предложением 2 для ее оценки. Поэтому требуется установить, что случайная величина $d_{(G,H,K,T,r)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$ эквивалентна своему математическому ожиданию для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$. Легко заметить, что для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ справедливо неравенство

$$d_{(G,H,K,T,r)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \leq N_{(G,H,K,T,r)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k).$$

Поэтому, в силу предложения 2, достаточно сформулировать и обосновать следующий факт.

Предложение 4. Для любого $r \in \mathbf{N}$ с асимптотической вероятностью 1 для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ справедливо соотношение

$$N_{(G,H,K,T,r)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \sim d_{(G,H,K,T,r)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k).$$

Доказательство. Заметим сперва, что пары точных (K, T) -расширений, не обладающие свойством отделимости, формируют жесткую пару. А именно, пусть $T_i \subset G$, $T_i \cap H \neq T_i$, $i \in \{1, 2\}$. Пусть, кроме того, K_i — точные (K, T) -расширения графов T_i , и множества $E((K_i \cup G) \setminus T_i) \setminus (E(K_i \setminus T_i) \cup E(G \setminus T_i))$ являются пустыми. Тогда, если пересечение графов $K_1 \setminus T_1$ и $K_2 \setminus T_2$ или множество $E((K_1 \setminus T_1) \cup (K_2 \setminus T_2)) \setminus (E(K_1 \setminus T_1) \cup E(K_2 \setminus T_2))$ непусто, то пара $(K_1 \cup K_2, T_1 \cup T_2)$ является α -жесткой. Этот факт обоснован при доказательстве леммы 5.

Пусть $S_r^h(G, H, K, T)$, $k \in \{1, \dots, j\}$, — сети из доказательства предложения 2. Положим $g = \max\{g(S_r^h(G, H, K, T))\}$, $h \in \{1, \dots, j\}$. В соответствии с тем же предложением 2, для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k \in \mathcal{V}$ выполнено равенство

$$\mathbf{E}_{N,p} N_{(G,H,K,T,r)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = \Theta(N^{f(G,H)}).$$

Поэтому существует такая константа c , что

$$\mathbf{E}_{N,p} N_{(G,H,K,T,r)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \geq c N^{f(G,H)}.$$

Рассмотрим произвольное $\varepsilon_0 > 0$. В силу предложения 2, найдется такое N_0 , что для любого $N > N_0$ в Ω_N существует такое подмножество $\mathcal{S}_0(N)$, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{N,p}(\mathcal{S}_0(N)) = 1$$

и для любого графа $\mathcal{G} \in \mathcal{S}_0(N)$ и любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k \in \mathcal{V}$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon_0) N_{(G,H,K,T,r)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) &\leq \mathbf{E}_{N,p} N_{(G,H,K,T,r)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \\ &\leq (1 + \varepsilon_0) N_{(G,H,K,T,r)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k). \end{aligned}$$

Пусть $\{Y_i, H\}$, $i \in \{1, \dots, \mu\}$ — множество, состоящее из всех возможных α -надежных пар, у которых $|V(Y_i)| \leq rt + l$, $f(Y_i, H) = f(G, H)$ для всех i . Определим, кроме того, для каждого i множество $\{X_j^i, T_j^i\}$, $j \in \{1, \dots, \nu\}$ α -жестких пар, для которых

$$|V(X_j^i) \setminus V(T_j^i)| \leq 2t, \quad |V(T_j^i)| \leq 2m, \quad X_j^i \cap Y_i = T_j^i.$$

В [2] (см. лемму 10.7.6) доказано, что для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое $N_1(\varepsilon_1)$, что для всех $N > N_1(\varepsilon_1)$ существует множество $\mathcal{S}_1(N) \subset \Omega_N$ такое, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{N,p}(\mathcal{S}_1(N)) = 1,$$

и обладающее следующим свойством: для каждого графа $\mathcal{G} \in \mathcal{S}_1(N)$ и для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k \in \mathcal{V}$ суммарное по $i \in \{1, \dots, \mu\}$ и $j \in \{1, \dots, \nu\}$ число точных $(Y_i \cup X_j^i, H)$ -расширений графа $\mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}}$ в $\mathcal{G}$ ограничено величиной $\varepsilon_1 N^{f(G, H)}$. Положим

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_0 c}{g(1 + \varepsilon_0)}.$$

Пусть $N > \max\{N_0, N_1(\varepsilon_1)\}$ и $\mathcal{G} \in \mathcal{S}_0(N) \cap \mathcal{S}_1(N)$, $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k \in \mathcal{V}$. Пусть, кроме того, $X_r^h(G, H, K, T)$ — графы из предложения 2. Для того, чтобы для некоторого точного (G, H) -расширения $\tilde{G}$ графа $\tilde{H} = \mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}}$ точное $(X_r^h(G, H, K, T), G)$ -расширение $\tilde{X}_r^h$ графа $\tilde{G}$ не содержалось в $U(\mathcal{G}, \tilde{G}, \tilde{H}, K, T)$, необходимо, чтобы существовали графы $\tilde{K}_0, \tilde{K}_1$, являющиеся точными (K, T) -расширениями графов $\tilde{T}_0, \tilde{T}_1$ в $\mathcal{G}$, не обладающие свойством отделимости, где графы $\tilde{K}_1, \tilde{T}_0, \tilde{T}_1$ являются подграфами графа $\tilde{X}_r^h$, граф $\tilde{K}_0 \setminus \tilde{T}_0$ не пересекается с графом $\tilde{X}_r^h$. Тогда пара $(\tilde{K}_0 \cup \tilde{K}_1, \tilde{T}_0 \cup \tilde{T}_1)$ является α -жесткой, а пара $(\tilde{X}_r^h \setminus (\tilde{K}_1 \setminus \tilde{T}_1), \tilde{H})$ — α -надежной, причем

$$f(\tilde{X}_r^h \setminus (\tilde{K}_1 \setminus \tilde{T}_1), \tilde{H}) = f(G, H).$$

Поэтому сумма по всем h и всем точным (G, H) -расширениям $\tilde{G}$ графа $\tilde{H}$ чисел точных $(X_r^h(G, H, K, T), G)$ -расширений графа $\tilde{G}$, не содержащихся в $U(\mathcal{G}, \tilde{G}, \tilde{H}, K, T)$, ограничена величиной $g\varepsilon_1 N^{f(G, H)}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} N_{(G, H, K, T, r)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) - d_{(G, H, K, T, r)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \\ \leq g\varepsilon_1 N^{f(G, H)} \leq \frac{g\varepsilon_0}{g(1 + \varepsilon_0)} c N^{f(G, H)} \\ \leq \frac{\varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0} \mathbf{E}_{N, p} N_{(G, H, K, T, r)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \\ \leq \varepsilon_0 N_{(G, H, K, T, r)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k). \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Из этого предложения и неравенств (3), (4) следует, что для любого $r > 1$ с асимптотической вероятностью 1 для любых $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} |D_{(G, H, K, T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) - \mathbf{E}_{N, p} D_{(G, H, K, T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)| \\ \leq \mathbf{E}_{N, p} d_{(G, H, K, T, 2r-1)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) + \delta_r(N), \end{aligned}$$

где

$$\delta_r(N) = o(N^{f(G, H)}).$$

Поэтому, в силу предложения 2, для любого $\varepsilon > 0$ с асимптотической вероятностью 1 для любых $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ справедливо неравенство

$$|D_{(G, H, K, T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) - \mathbf{E}_{N, p} D_{(G, H, K, T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)| \leq \varepsilon N^{f(G, H)}. \quad (5)$$

Такое же неравенство для случайной величины $N_{(G, H)}^{(K, T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$ будет напрямую следовать из предложения 5. Чтобы вывести из него утверждение теоремы, нужно доказать, что среднее $\mathbf{E}_{N, p} N_{(G, H)}^{(K, T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$ не есть $o(N^{f(G, H)})$.

Предложение 5. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{E}_{N,p} N_{(G,H)}^{(K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = \Theta(N^{f(G,H)}).$$

Доказательство. Для доказательства мы воспользуемся теоремой о монотонных свойствах (см. [2]), которая заключается в следующем. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}_N$ — возрастающие (убывающие) свойства. Напомним, что множество $\mathcal{A}$ называется возрастающим (соответственно убывающим) свойством, если из того, что $H \in \mathcal{A}$ и $E(G) \supseteq E(H)$ (соответственно $E(G) \subseteq E(H)$) следует, что $G \in \mathcal{A}$. Тогда справедливо неравенство

$$\mathbf{P}_{N,p}(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \geq \mathbf{P}_{N,p}(\mathcal{A})\mathbf{P}_{N,p}(\mathcal{B}).$$

Для каждого множества $\mathcal{B} \in \Omega_N$ обозначим $\overline{\mathcal{B}}$ дополнение к множеству $\mathcal{B}$, то есть множество $\Omega_N \setminus \mathcal{B}$.

Зафиксируем вершины $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k \in \mathcal{V}$. Определим некоторое множество индексов $I(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$. Пусть $I(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = \{1, \dots, \mu\}$, где μ — наибольшее число, при котором выполняется описанное ниже свойство. Каждому индексу $i \in I(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$ можно поставить в соответствие упорядоченный набор вершин $\tilde{x}_{k+1}^i, \dots, \tilde{x}_l^i \in \mathcal{V} \setminus \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}$ (разным индексам соответствуют разные наборы) с единственным следующим ограничением. Пусть $i, j \in I(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$, $i \neq j$, наборы $\tilde{x}_{k+1}^i, \dots, \tilde{x}_l^i$ и $\tilde{x}_{k+1}^j, \dots, \tilde{x}_l^j$ совпадают (в них входят одни и те же вершины) и для некоторых графов $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \in \Omega_N$ графы

$$\tilde{\mathcal{G}}_1 = \mathcal{G}_1|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k, \tilde{x}_{k+1}^i, \dots, \tilde{x}_l^i\}}, \quad \tilde{\mathcal{G}}_2 = \mathcal{G}_2|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k, \tilde{x}_{k+1}^j, \dots, \tilde{x}_l^j\}}$$

являются точными (G, H) -расширениями графов

$$\tilde{H}_1 = \mathcal{G}_1|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}}, \quad \tilde{H}_2 = \mathcal{G}_2|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}}$$

соответственно. Тогда при применении к вершинам $\tilde{x}_{k+1}^i, \dots, \tilde{x}_l^i$ перенумерации (которая оставляет на месте ребра), переводящей их в $\tilde{x}_{k+1}^j, \dots, \tilde{x}_l^j$, полученное из $E(\tilde{\mathcal{G}}_1) \setminus E(\tilde{H}_1)$ множество ребер не совпадает с множеством $E(\tilde{\mathcal{G}}_2) \setminus E(\tilde{H}_2)$. Понятно, что

$$\mu = \binom{N-k}{l-k} \frac{(l-k)!}{a(G, H)},$$

где $a(G, H)$ означает число автоморфизмов множества $E(G) \setminus E(H)$. Для каждого $i \in I(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$ набор $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k, \tilde{x}_{k+1}^i, \dots, \tilde{x}_l^i$ обозначим $\tilde{\mathbf{x}}^i$.

Зафиксируем вершины $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k, \tilde{x}_{k+1}, \dots, \tilde{x}_l \in \mathcal{V}$ и определим множество индексов $J(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k, \tilde{x}_{k+1}, \dots, \tilde{x}_l) = \{1, \dots, \nu\}$. Пусть $\tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_m} \in \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k, \tilde{x}_{k+1}, \dots, \tilde{x}_l\}$. Каждому индексу $j \in J(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l)$ можно поставить в соответствие упорядоченный набор вершин $\tilde{x}_{l+1}^j, \dots, \tilde{x}_{l+t}^j \in \mathcal{V} \setminus \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l\}$ с единственным следующим ограничением. Пусть $i, j \in J(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l)$, $i \neq j$, наборы $\tilde{x}_{l+1}^i, \dots, \tilde{x}_{l+t}^i$ и $\tilde{x}_{l+1}^j, \dots, \tilde{x}_{l+t}^j$ совпадают (в них входят одни и те же вершины), и для некоторых графов $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \in \Omega_N$ графы

$$\tilde{\mathcal{G}}_1 = \mathcal{G}_1|_{\{\tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_m}, \tilde{x}_{l+1}^i, \dots, \tilde{x}_l^i\}}, \quad \tilde{\mathcal{G}}_2 = \mathcal{G}_2|_{\{\tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_m}, \tilde{x}_{l+1}^j, \dots, \tilde{x}_l^j\}}$$

являются точными (K, T) -расширениями графов

$$\tilde{T}_1 = \mathcal{G}_1|_{\{\tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_m}\}}, \quad \tilde{T}_2 = \mathcal{G}_2|_{\{\tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_m}\}}$$

соответственно. Тогда при применении к вершинам $\tilde{x}_{l+1}^i, \dots, \tilde{x}_{l+t}^i$ перенумерации (которая оставляет на месте ребра), переводящей их в $\tilde{x}_{l+1}^j, \dots, \tilde{x}_{l+t}^j$, полученное из $E(\tilde{G}_1) \setminus E(\tilde{H}_1)$ множество ребер не совпадает с множеством $E(\tilde{G}_2) \setminus E(\tilde{H}_2)$. Мощность $J(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l)$, опять же, является максимальной при описанном условии. Понятно, что

$$v = \binom{N-l}{t} \frac{t!}{a(K, T)}.$$

Пусть $\mathcal{A}_i(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \subset \Omega_N$, где $i \in I(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$, есть множества графов, подграфы которых, индуцированные на множества $\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k, \tilde{x}_{k+1}^i, \dots, \tilde{x}_l^i\}$, являются точными (G, H) -расширениями подграфов, индуцированных на множество $\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}$; пусть $\mathcal{B}_j(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{i_m}) \subset \Omega_N$, где $j \in J(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l)$, есть множества графов, подграфы которых, индуцированные на множества $\{\tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_m}, \tilde{x}_{l+1}^j, \dots, \tilde{x}_{l+t}^j\}$, являются точными (K, T) -расширениями подграфов, индуцированных на множество $\{\tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_m}\}$; и пусть $\mathcal{C}_j(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{i_m}) \subset \Omega_N$, где $j \in J(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l)$, есть множества графов, подграфы которых, индуцированные на множества $\{\tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_m}, \tilde{x}_{l+1}^j, \dots, \tilde{x}_{l+t}^j\}$, являются (K, T) -расширениями подграфов, индуцированных на множество $\{\tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_m}\}$.

Для каждого $j \in J(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l)$ введем множество $\hat{\mathcal{B}}_j(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k, \tilde{x}_{k+1}, \dots, \tilde{x}_l) \subset \Omega_N$ (множество $\hat{\mathcal{C}}_j(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k, \tilde{x}_{k+1}, \dots, \tilde{x}_l) \subset \Omega_N$), равное объединению по всем упорядоченным наборам вершин $\tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_m} \in \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k, \tilde{x}_{k+1}, \dots, \tilde{x}_l\}$, удовлетворяющим условию $\{\tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_m}\} \cap \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\} \neq \{\tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_m}\}$, множеств $\mathcal{B}_j(\tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_m})$ (множеств $\mathcal{C}_j(\tilde{x}_{i_1}, \dots, \tilde{x}_{i_m})$). Тогда множества $\hat{\mathcal{C}}_j(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k, \tilde{x}_{k+1}, \dots, \tilde{x}_l)$ являются убывающими свойствами. Легко заметить, что пересечения монотонных свойств являются монотонными свойствами, то есть каждое из множеств $\bigwedge_{j \in J} \hat{\mathcal{C}}_j(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k, \tilde{x}_{k+1}, \dots, \tilde{x}_l)$, $J \subseteq J(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l)$, является убывающим свойством. Поэтому, в силу теоремы о монотонных свойствах, существуют положительные константы C_1, C_2, C_3, C_4 , для которых при достаточно больших N справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{N,p} N_{(G,H)}^{(K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) &= \sum_{i \in I(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)} \mathbf{P}_{N,p}(\mathcal{A}_i(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)) \mathbf{P}_{N,p} \left(\bigwedge_{j \in J(\tilde{x}^i)} \overline{\hat{\mathcal{B}}_j(\tilde{x}^i)} \right) \\ &\sim \sum_{i \in I(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)} p^{e(G,H)} \mathbf{P}_{N,p} \left(\bigwedge_{j \in J(\tilde{x}^i)} \overline{\hat{\mathcal{B}}_j(\tilde{x}^i)} \right) \\ &\geq \sum_{i \in I(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)} p^{e(G,H)} \mathbf{P}_{N,p} \left(\bigwedge_{j \in J(\tilde{x}^i)} \overline{\hat{\mathcal{C}}_j(\tilde{x}^i)} \right) \\ &\geq \sum_{i \in I(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)} p^{e(G,H)} \prod_{j \in J(\tilde{x}^i)} \mathbf{P}_{N,p}(\overline{\hat{\mathcal{C}}_j(\tilde{x}^i)}) \\ &\geq C_1 N^{f(G,H)} (1 - C_2 p^{t/\alpha})^{\binom{N}{t}} \\ &\geq C_1 N^{f(G,H)} \exp(-C_3 N^t p^{t/\alpha}) = C_4 N^{f(G,H)}. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Итак, для обоснования неравенства

$$|N_{(G,H)}^{(K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) - \mathbf{E}_{N,p} N_{(G,H)}^{(K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)| \leq \varepsilon N^{f(G,H)},$$

которое, в силу предложения 4, завершит доказательство теоремы, осталось сформулировать и доказать следующий результат.

Предложение 6. Для любого $r \in \mathbb{N}$ с асимптотической вероятностью 1 для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ справедливо соотношение

$$N_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) - N_{(G,H)}^{(K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \sim D_{(G,H,K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k).$$

Доказательство. Подобное рассуждение мы уже проводили несколько раз — в доказательстве леммы 5, теоремы 3, предложения 4. Заключается оно в том, что графы, образующие нейтральные пары и не обладающие свойством делимости, формируют жесткую пару.

Случайная величина $N_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) - N_{(G,H)}^{(K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) - D_{(G,H,K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$ для каждого графа $\mathcal{G} \in \Omega_N$ равна сумме двух слагаемых. Первое — это число таких не точных (с дополнительными ребрами) (G, H) -расширений $\tilde{G}$ графа $\tilde{H} = \mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}}$, что пара $(\tilde{G}, \tilde{H})$ не является (K, T) -максимальной в $\mathcal{G}$. В силу теоремы 4, это второе слагаемое есть $o(N^{f(G,H)})$ для подмножества в Ω_N , мера $\mathbf{P}_{N,p}$ которого стремится к 1. Второе слагаемое — это число точных (G, H) -расширений $\tilde{G}$ графа $\tilde{H}$, для которых существуют такие подграфы $\tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2$ графа $\mathcal{G}$, что

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1 &\subset \tilde{G}, & \tilde{T}_2 &\subset \tilde{G}, \\ \tilde{T}_1 \cap \tilde{H} &\neq \tilde{T}_1, & \tilde{T}_2 \cap \tilde{H} &\neq \tilde{T}_2, \\ \tilde{K}_1 \cap \tilde{G} &= \tilde{T}_1, & \tilde{K}_2 \cap \tilde{G} &= \tilde{T}_2, \end{aligned}$$

граф $\tilde{K}_1$ — точное (K, T) -расширение графа $\tilde{T}_1$, граф $\tilde{K}_2$ — точное (K, T) -расширение графа $\tilde{T}_2$, графы $\tilde{K}_1, \tilde{K}_2$ не обладают свойством делимости. Пусть $\tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2$ — такие графы. Тогда пара $(\tilde{K}_1 \cup \tilde{K}_2, \tilde{T}_1 \cup \tilde{T}_2)$ является α -жесткой, и по лемме 10.7.6 в [2] (см. также доказательство предложения 3) с асимптотической вероятностью 1 для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$ справедливо равенство

$$N_{(G,H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) - N_{(G,H)}^{(K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) - D_{(G,H,K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) = o(N^{f(G,H)}).$$

Предложение доказано.

3.4. Доказательство теоремы 2

Как отмечалось выше, доказательство теоремы 2 мы будем проводить индукцией по числу различных α -нейтральных пар (K_i, T_i) . Мы доказали предложение 1 и тем самым обосновали базу индукции.

Итак, $s \in \mathbb{N}$ и с асимптотической вероятностью 1 для любых вершин $x_1, \dots, x_k$

$$N_{(G,H)}^{(K_1,T_1), \dots, (K_s,T_s)}(x_1, \dots, x_k) \sim \mathbf{E}_{N,p} N_{(G,H)}^{(K_1,T_1), \dots, (K_s,T_s)}(x_1, \dots, x_k).$$

Мы хотим доказать, что с асимптотической вероятностью 1 для любых вершин $x_1, \dots, x_k$

$$N_{(G,H)}^{(K_1,T_1), \dots, (K_s,T_s), (K_{s+1}, T_{s+1})}(x_1, \dots, x_k) \sim \mathbf{E}_{N,p} N_{(G,H)}^{(K_1,T_1), \dots, (K_s,T_s), (K_{s+1}, T_{s+1})}(x_1, \dots, x_k).$$

Дадим определение $\{(K_1, T_1), \dots, (K_s, T_s)\}$ -максимальной $(G, H, K_{s+1}, T_{s+1}, r)$ -сети в графе Γ .

Пусть графы $H, G, K_1, T_1, \dots, K_{s+1}, T_{s+1}$ обладают следующими свойствами:

– $H \subset G$, $T_i \subset K_i$, $|V(T_i)| \leq |V(G)|$;

– пара (G, H) является α -надежной; пары (K_i, T_i) являются α -нейтральными.

Рассмотрим графы $\tilde{H}$, $\tilde{G}$, $\tilde{K}$, $\tilde{T}$, а также содержащий их граф Γ .

Пусть

$$|V(\tilde{H})| = |V(H)| = k, \quad \tilde{T} \subseteq \tilde{G}, \quad \tilde{K} \cap \tilde{G} = \tilde{T}, \quad \tilde{H} \cap \tilde{T} \neq \tilde{T};$$

$\tilde{G}$ — точное (G, H) -расширение графа $\tilde{H}$, $\tilde{K}$ — точное (K_{r+1}, T_{r+1}) -расширение графа $\tilde{T}$;

$$E((\tilde{K} \cup \tilde{G}) \setminus \tilde{T}) \setminus (E(\tilde{K} \setminus \tilde{T}) \cup E(\tilde{G} \setminus \tilde{T})) = \emptyset;$$

пара $(\tilde{G}, \tilde{H})$ является (K_1, T_1) -максимальной, $\dots$, (K_s, T_s) -максимальной в Γ .

Набор таких графов $(\Gamma, \tilde{G}, \tilde{H}, \tilde{K}, \tilde{T})$ будем называть $\{(K_1, T_1), \dots, (K_s, T_s)\}$ -максимальной $(G, H, K_{s+1}, T_{s+1}, 1)$ -сетью в Γ .

Если $(\Gamma, \tilde{G}, \tilde{H}, \tilde{K}_1, \tilde{T}_1), \dots, (\Gamma, \tilde{G}, \tilde{H}, \tilde{K}_r, \tilde{T}_r)$ есть $\{(K_1, T_1), \dots, (K_s, T_s)\}$ -максимальные $(G, H, K_{s+1}, T_{s+1}, 1)$ -сети в Γ , между любыми двумя графами из множества $\{\tilde{K}_i \setminus \tilde{T}_i\}_{i \in \{1, \dots, r\}}$ нет ребер, и для всех $i \neq j$ множества $V(\tilde{K}_i \setminus \tilde{T}_i)$ и $V(\tilde{K}_j \setminus \tilde{T}_j)$ не пересекаются, то набор $(\Gamma, \tilde{G}, \tilde{H}, \tilde{K}_i, \tilde{T}_i, i \in \{1, \dots, r\})$ называют $\{(K_1, T_1), \dots, (K_s, T_s)\}$ -максимальной $(G, H, K_{s+1}, T_{s+1}, r)$ -сетью в Γ .

Дальнейшее доказательство практически дословно повторяет доказательство теоремы 2, если заменить в рассуждении (G, H, K, T, r) -сети на $\{(K_1, T_1), \dots, (K_s, T_s)\}$ -максимальные $(G, H, K_{s+1}, T_{s+1}, r)$ -сети в Γ . Так, в предложении 1 после такой замены, как и в доказательстве, больше ничего менять не придется. В доказательстве предложения 2 вместо теоремы 4 будет применяться индуктивное предположение (причем для точных (G, H) -расширений (см. теорему 6 в разделе 4); такая теорема тоже будет верна, это видно из доказательства теоремы 2), вычислительная часть доказательства вообще пропадет, потому что оценка будет вытекать из самого предложения 2 для (G, H, K, T, r) -сетей. Предложение 3 не придется менять, так же, как предложение 1. В предложениях 4 и 5 останется заменить случайные величины $N_{(G, H)}^{(K, T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$ на величины $N_{(G, H)}^{(K_1, T_1), \dots, (K_s, T_s), (K_{s+1}, T_{s+1})}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$. Кроме того, в предложении 5 нужно заменить $N_{(G, H)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$ на $N_{(G, H)}^{(K_1, T_1), \dots, (K_s, T_s)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$.

Теорема доказана.

4. Обобщения

Для различных пар $(K_1, T_1), \dots, (K_s, T_s), (G, H)$, наряду с уже рассмотренными случайными величинами $N_{(G, H)}^{(K_1, T_1), \dots, (K_s, T_s)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$, равными числу некоторых (G, H) -расширений, естественно рассмотреть величины $\hat{N}_{(G, H)}^{(K_1, T_1), \dots, (K_s, T_s)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$, равные числу некоторых точных (G, H) -расширений, а именно, пусть, как и раньше, для графов H и G , $H \subset G$, справедливы равенства $V(H) = \{x_1, \dots, x_k\}$, $V(G) = \{x_1, \dots, x_l\}$. Рассмотрим случайный граф $G(N, p)$ и зафиксируем вершины $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k \in \mathcal{V}$. Пусть случайная величина $\hat{R}_{(G, H)}^{(K_1, T_1), \dots, (K_s, T_s)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$ ставит в соответствие каждому графу $\mathcal{G} \in \Omega_N$ число таких точных (G, H) -расширений $\tilde{G}$ графа $\tilde{H} = \mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}}$, что пара $(\tilde{G}, \tilde{H})$ является $\{(K_1, T_1), \dots, (K_s, T_s)\}$ -максимальной в $\mathcal{G}$. Случайная величина $N_{(G, H)}^{(K_1, T_1), \dots, (K_s, T_s)}$ отличается от нее тем, что равна числу всех (G, H) -расширений, не только точных. Для

такой случайной величины справедлив результат, аналогичный теореме 2 (число не точных расширений бесконечно мало по сравнению с числом всех расширений, а число максимальных расширений имеет тот же порядок, что и число всех расширений).

Пусть $\mathcal{N}(r)$ — множество всех α -нейтральных пар вида (K_i, T_i) , где $|V(T_i)| \leq |V(G)|$, $|V(K_i) \setminus V(T_i)| \leq r$. Пусть случайная величина $N_{(G,H)}^r(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$ (соответственно величина $\hat{N}_{(G,H)}^r(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$) ставит в соответствие каждому графу $\mathcal{G} \in \Omega_N$ число таких (G, H) -расширений $\tilde{G}$ графа $\tilde{H} = \mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}}$ (соответственно таких точных (G, H) -расширений $\tilde{G}$ графа $\tilde{H} = \mathcal{G}|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}}$), что для каждой пары $(K_i, T_i) \in \mathcal{N}(r)$ пара $(\tilde{G}, \tilde{H})$ является (K_i, T_i) -максимальной в $\mathcal{G}$. Для этих случайных величин также справедлив результат, аналогичный теореме 2 (число всех α -нейтральных пар, состоящих из графов с ограниченным заранее числом вершин, конечно, поэтому этот результат напрямую следует из теоремы 3 и ее аналога для точных (G, H) -расширений).

Теорема 5. Пусть $0 < \alpha \leq 1$; пара (G, H) является α -надежной, и пары $(K, T), (K_1, T_1), \dots, (K_s, T_s)$ являются α -нейтральными. Пусть, кроме того, $p = N^{-\alpha}$. Тогда с асимптотической вероятностью 1 для любых вершин $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k$

$$\begin{aligned} \hat{N}_{(G,H)}^{(K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) &\sim \mathbf{E}_{N,p} N_{(G,H)}^{(K,T)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \\ &= \Theta(N^{f(G,H)}), \\ \hat{N}_{(G,H)}^{(K_1,T_1),(K_2,T_2),\dots,(K_s,T_s)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) &\sim \mathbf{E}_{N,p} N_{(G,H)}^{(K_1,T_1),(K_2,T_2),\dots,(K_s,T_s)}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \\ &= \Theta(N^{f(G,H)}), \\ N_{(G,H)}^r(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) &\sim \mathbf{E}_{N,p} N_{(G,H)}^r(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \\ &= \Theta(N^{f(G,H)}), \\ \hat{N}_{(G,H)}^r(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) &\sim \mathbf{E}_{N,p} N_{(G,H)}^r(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k) \\ &= \Theta(N^{f(G,H)}). \end{aligned}$$

Сделаем заключительное замечание, объясняющее, что нашими результатами исчерпываются все виды максимальных α -надежных пар. Действительно, в соответствии с леммой 2, для любой пары (K, T) существуют такие графы X, Y , что $T \subseteq Y \subseteq X \subseteq K$ и пары $(Y, T), (X, Y)$ и (K, X) являются α -жесткой, α -нейтральной цепью и α -надежной соответственно. Поэтому, если $T \neq Y$, то внутренняя пара является α -жесткой и число таких (K, T) -расширений $\tilde{G}$ подграфа в случайном графе, индуцированного на множество вершин $\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}$, что пара $(\tilde{G}, \tilde{G}|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}})$ является (K, T) -максимальной, больше чем число таких (G, H) -расширений $\tilde{G}$, что пара $(\tilde{G}, \tilde{G}|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}})$ является (Y, T) -максимальной. Поэтому, в соответствии с леммой 10.7.6 в [2], число (K, T) -максимальных пар с асимптотической вероятностью 1 эквивалентно числу всех (G, H) -расширений. Если же $Y = T$, то внутренняя пара является α -нейтральной цепью, поэтому существует такой граф S , что $T \subset S \subseteq X$ и пара $(S \setminus T \cup Z, Z)$ является α -нейтральной для некоторого графа $Z \subseteq T$, причем ни одна вершина графа $T \setminus Z$ не соединена ребром ни с одной вершиной графа $S \setminus T$. Следовательно, число таких (K, T) -расширений $\tilde{G}$ подграфа в случайном графе, индуцированного на множество вершин $\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}$, что пара $(\tilde{G}, \tilde{G}|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}})$ является (K, T) -максимальной, больше чем число таких (G, H) -расширений $\tilde{G}$, что пара $(\tilde{G}, \tilde{G}|_{\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k\}})$ является (S, T) -максимальной. Поэтому, в соответствии с теоремой 2, число (K, T) -максимальных пар с асимптотической вероятностью 1 равно $\Theta(N^{f(G,H)})$. Эти же рассуждения можно провести и для точных (G, H) -расширений.

Список литературы

1. Spencer J. H., Counting extensions. *J. Combinatorial Theory* (1990) **A55**, 247–255.
2. Alon N., Spencer J., *Probabilistic method*. Wiley, New York, 1992.
3. Shelah S., Spencer J. H., Zero–one laws for sparse random graphs. *J. American Math. Soc.* (1988) **1**, 97–115.
4. McArthur M., The asymptotic behavior of $L_{\infty, \omega}^k$ on sparse random graphs. *DIMACS* (1997) **33**, 53–63.
5. Janson S., Luczak T., Rucinski A., *Random Graphs*. Wiley, New York, 2000.
6. Жуковский М. Е., Ослабленный закон нуля или единицы для случайных дистанционных графов. *Доклады РАН* (2010) **430**, №3, 314–317.
7. Успенский В. А., Верещагин Н. К., Плиско В. Е., *Вводный курс математической логики*. Физматлит, Москва, 1997.
8. Верещагин Н. К., Шень А., *Языки и исчисления*. МЦНМО, Москва, 2000.
9. Diestel R., *Graph theory*. Springer, Berlin, 2000.
10. Harary F., *Graph theory*. Addison–Wesley, Reading, Mass., 1969.
11. Erdős P., Rényi A., On the evolution of random graphs. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* (1960) **5**, 17–61.
12. Bollobás B., *Random graphs*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
13. Колчин В. Ф., *Случайные графы*. Физматлит, Москва, 2004.

Статья поступила 13.10.2010.