Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

З. И. Бежаева, В. И. Оселедец, Вычисление энтропии для некоторой скрытой цепи Маркова, *Дискрет. матем.*, 2012, том 24, выпуск 1, 108–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1175>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 07:44:19

Вычисление энтропии для некоторой скрытой цепи Маркова

© 2012 г. З. И. Бежаева, В. И. Оселедец

В статье изучается один из вариантов задачи Эрдеша о распределении случайной величины

$$\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i \rho^i,$$

причем

$$\mathbf{P}(\zeta_i = 0) = q < 1, \quad \mathbf{P}(\zeta_i = 1) = p, \quad \rho \in [0, 1], \quad \rho + \rho^2 + \rho^3 = 1.$$

Определяются инвариантная мера Эрдеша на некотором компакте и соответствующая ей скрытая цепь Маркова, получена формула для вычисления энтропии инвариантной меры Эрдеша.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 07-01-92215-НЦНИЛ.

1. Введение

В [1] Эрдеш поставил задачу изучения функции распределения случайной величины

$$\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i \rho^i.$$

Здесь $0 < \rho < 1$, и $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные величины, принимающие значения 0, 1, причем

$$\mathbf{P}(\zeta_i = 0) = \mathbf{P}(\zeta_i = 1) = \frac{1}{2}.$$

Задаче Эрдеша посвящено много статей. В [2] авторы дали определение меры Эрдеша на единичном интервале $[0, 1]$, на компакте Фибоначчи, и инвариантной меры Эрдеша на компакте Фибоначчи для случая $\rho = (\sqrt{5} - 1)/2$.

В [2] было доказано, что мера Эрдеша эквивалентна инвариантной мере Эрдеша на компакте Фибоначчи. Кроме того, в этой же работе была поставлена и решена задача об эргодических свойствах инвариантной меры Эрдеша на компакте Фибоначчи.

В настоящей работе мы будем изучать распределение ζ , когда

$$\mathbf{P}(\zeta_i = 0) = q < 1, \quad \mathbf{P}(\zeta_i = 1) = p,$$

и $\rho \in [0, 1]$ удовлетворяет уравнению

$$\rho + \rho^2 + \rho^3 = 1.$$

Меру, задаваемую $F(x)$ — функцией распределения случайной величины ζ — будем называть мерой Эрдеша на прямой.

По аналогии с компактом Фибоначчи, определим марковский компакт X с алфавитом $\{0, 1, 2\}$ и набором допустимых слов $00, 01, 02, 21$. Определим инвариантную меру Эрдеша на компакте X . Эта мера совпадает с распределением некоторой скрытой цепи Маркова. Будет получена формула для энтропии этой скрытой цепи Маркова. Таким образом, будет получена формула для вычисления энтропии инвариантной меры Эрдеша.

Отношение энтропии инвариантной меры Эрдеша и $\ln(\beta)$, $\beta = 1/\rho$, есть хаусдорфова размерность инвариантной меры Эрдеша на компакте X с метрикой

$$d(x, y) = \rho^{n(x, y)},$$

где $n(x, y)$ — длина наибольшего общего префикса слов x и y . Эта размерность равна также хаусдорфовой размерности меры Эрдеша на прямой (см. [3, 4]).

Для нашего случая при $q = 1/2$ полученная формула для хаусдорфовой размерности совпадает с формулой из [5] (см. также [6]).

Прямое вычисление энтропии по полученной нами формуле невозможно, так как ряды, входящие в формулу сходятся слишком медленно для эффективного вычисления. Поэтому в вычислениях использовалась процедура ускорения сходимости ряда. Для ускорения сходимости использовался метод, аналогичный методу из [7].

2. Инвариантная мера Эрдеша на марковском компакте X

Рассмотрим разбиение интервала $[0, 1)$ на интервалы $\Delta_0 = [0, \rho)$, $\Delta_1 = [\rho, \rho + \rho^2)$, $\Delta_2 = [\rho + \rho^2, 1)$. Относительно отображения $V: x \mapsto \{\beta x\}$ это разбиение является марковским. Действительно, интервал Δ_0 под действием отображения V переходит в отрезок $[0, 1)$, интервал Δ_1 переходит в Δ_0 , а Δ_2 в Δ_1 , то есть возможные переходы интервалов задаются матрицей инцидентности

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь каждой точке $x \in [0, 1)$ сопоставим слово $x_1 x_2 \dots$, где $x_n(x) = j$, если $V^{n-1}x \in \Delta_j$, $j = 0, 1, 2$.

Пусть X есть марковское множество бесконечных допустимых слов с алфавитом $\{0, 1, 2\}$. Мы называем слово допустимым, если все подслова длины 2 бесконечного допустимого слова задаются списком $\{00, 01, 02, 10, 21\}$. Множество X образует компакт с метрикой $d(x, y) = \rho^{n(x, y)}$, где $n(x, y)$ есть длина наибольшего общего префикса слов x и y .

Инвариантная мера Эрдеша на интервале $[0, 1)$ (ее определение аналогично определению из [8]) переходит в инвариантную меру Эрдеша на X .

Аналогично [8] доказывается, что мера Эрдеша $dF(x)$ на прямой удовлетворяет уравнению

$$d\tilde{F}(x) = M(x_1) d\tilde{F}(Vx),$$

где

$$d\tilde{F}(x) = (dF(x), dF(x + \rho), dF(x + \rho + \rho^2), dF(x + 1))^T,$$

а матрицы $M(0) = M_0$, $M(j) = M_1$, $j = 1, 2$, где

$$M_0 = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & q \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & q \\ p & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Введем квадратную матрицу 12-го порядка

$$M = \begin{pmatrix} M(00) & M(01) & M(02) \\ M(10) & M(11) & M(12) \\ M(20) & M(21) & M(22) \end{pmatrix},$$

$$M(00) = M(10) = M_0, \quad M(01) = M(02) = M(21) = M_1.$$

Все остальные блоки матрицы M нулевые. Спектральный радиус этой матрицы равен 1.

На пространстве бесконечных слов $x = x_1 x_2 \dots \in X$ определим меру следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu(\{x \in X : x_1 \dots x_n = a_1 \dots a_n\}) &= L(a_1)M(a_1, a_2) \dots M(a_{n-1}, a_n)R(a_n)/(LR), \quad n \geq 2, \\ \mu(x_1) &= L(x_1)R(x_1)/(LR), \end{aligned}$$

$L = (L(0), L(1), L(2))$ — левый собственный вектор, $R^T = (R(0)^T, R(1)^T, R(2)^T)$ — правый собственный вектор матрицы M с собственным значением, равным 1.

Заметим, что мера μ инвариантна относительно сдвига T в пространстве бесконечных допустимых слов с алфавитом $\{0, 1, 2\}$. Эту меру мы будем называть инвариантной мерой Эрдеша. Эта мера (см. [8]) совпадает с распределением скрытой марковской цепи, порождаемой матрицей M и функцией склейки

$$\begin{aligned} g(i) &= 0, & i \in \{1, 2, 3, 4\}, \\ g(i) &= 1, & i \in \{5, 6, 7, 8\}, \\ g(i) &= 2, & i \in \{9, 10, 11, 12\}. \end{aligned}$$

Вернемся к определенной выше мере μ . Вектор L имеет нулевые координаты с номерами 6, 7, 10, 11. У вектора R две последние координаты нулевые. Поэтому инвариантная мера Эрдеша может быть получена при вычеркивании из матрицы M и векторов L , R столбцов и строк, соответствующих состояниям 6, 7, 10, 11, 12. После вычеркивания из матрицы M столбцов и строк с номерами 6, 7 и 10, 11, 12 получим матрицу

$$N = (n(ij), i, j = 1, \dots, 7) = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 & p & q & p \\ p & 0 & 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p & q & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим семь состояний, занумерованных числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Спектральный радиус матрицы N равен 1. Через $L = (L_i, i = 1, \dots, 7)$, $R = (R_i, i = 1, \dots, 7)$ будем,

как и раньше, обозначать, соответственно, правый и левый собственный вектор матрицы N с собственным значением 1.

Определим функцию f от состояний $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, полагая

$$\begin{aligned} f(i) &= 0, & i &= 1, 2, 3, 4; \\ f(i) &= 1, & i &= 5, 6; \\ f(7) &= 2. \end{aligned}$$

Эта функция и матрица N определяют скрытую марковскую цепь (см. [8]).

Инвариантная мера Эрдеша μ — мера, порожденная этой скрытой марковской цепью на пространстве бесконечных допустимых слов X .

Матрицу N представим в блочном виде

$$N = \begin{pmatrix} N(00) & N(01) & N(02) \\ N(10) & N(11) & N(12) \\ N(20) & N(21) & N(22) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} N(00) &= \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & q \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \end{pmatrix}, & N(01) &= \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & p \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ N(02) &= \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & N(10) &= \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \end{pmatrix}, \\ N(21) &= (p \quad q). \end{aligned}$$

Все остальные матрицы $N(ij)$ нулевые.

Теперь мера μ можно задать с помощью блочной матрицы N и векторов

$$\begin{aligned} L &= (L(0), L(1), L(2)), \\ L(0) &= (L_1, L_2, L_3, L_4) = ((1, (1-q)^2, (1-q), (1-q)^2q), \\ L(1) &= (L_5, L_6) = ((2-q)(1-q), 1-q+2q^2-q^3), \\ L(2) &= L_7 = 1-q, \\ R^\top &= (R(0)^\top, R(1)^\top, R(2)^\top), \\ R(0) &= (R_1, R_2, R_3, R_4)^\top = ((2-q)q, (1-q), (1-q)^2, (1-q)^3)^\top, \\ R(1) &= (R_5, R_6)^\top = ((2-q)q^2, (1-q)^3)^\top, \\ R(2) &= R_7 = q(1-q). \end{aligned}$$

Наша основная цель состоит в вычислении энтропии h инвариантной меры Эрдеша μ .

3. Вспомогательные обозначения и определения

Рассмотрим граф с тремя вершинами 0, 1, 2 и ребрами 00, 01, 02, 10, 21. Спектральный радиус матрицы инцидентности этого графа равен β .

Сопоставим ребру ij матрицу $qp(ij)$, где $0 < q < 1$, $\alpha = p/q$,

$$\begin{aligned} p(00) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}, & p(01) &= \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ p(02) &= \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & p(10) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}, \\ p(21) &= (\alpha \quad 1). \end{aligned}$$

Любой конечный путь графа есть конечное слово с буквами из алфавита $\{0, 1, 2\}$. Каждому пути в графе отвечает произведение матриц $qp(ij)$ вдоль этого пути. Для простых циклов с базовой вершиной 2 это произведение есть число, так как матрица $p(21)$ — это строка, а матрица $p(02)$ — столбец.

Каждое бесконечное слово, после первого попадания в 2, имеет вид $b_1 2 b_2 \dots$. Все слова b_j устроены так: $1(0)^{k_1+1} \dots 1(0)^{k_s+1}$, $k_j \geq 0$.

Рассмотрим простые циклы $1(0)^{k+1}1$. Произведение матриц $qp(ij)$ вдоль такого цикла равно $q^{k+2} p(10) p(00)^k p(01)$. Назовем простой цикл распадным, если определитель матрицы этого цикла равен 0 и нераспадным в противном случае.

Для нераспадного цикла $k = 3n + 1$, $n = 0, 1, \dots$, и произведение матриц $qp(ij)$ вдоль такого цикла равно $q^{k+2} A(n)$, где

$$A(n) = p(10) p(00)^k p(01) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha^4 [n]_{\alpha^2} & \alpha^3 [n+1]_{\alpha^2} \end{pmatrix}.$$

В этом выражении

$$[n]_{\alpha^2} = \frac{\alpha^{2n} - 1}{\alpha^2 - 1}.$$

Простейший распадный цикл получается при $k = 0$. Ему отвечает матрица $q^2(1, 0)^\top(\alpha, 1)$. При $k = 3n + 2$, $k = 3n + 3$ матрица распадного цикла равна

$$q^{k+2}(1, \alpha^3 [n+1]_{\alpha^2})^\top(\alpha, 1) = q^{k+2} A(n)(0, 1)^\top(\alpha, 1).$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} p_1(n_1 n_2 \dots n_s) &= (\alpha, 1) A(n_1) \dots A(n_s) (1, 0)^\top, \\ p_2(n_1 n_2 \dots n_s) &= (\alpha, 1) A(n_1) \dots A(n_s) (0, 1)^\top. \end{aligned}$$

Обозначим через b^ε путь из 1 в 1 с ровно одним распадным циклом на конце:

$$b^\varepsilon = 1(0)^{k_1+1} 1(0)^{k_2+1} \dots 1(0)^{k_{s-1}+1} 1(0)^{k_s+1},$$

где $k_j = 3n_j + 1$, $j = 1, \dots, s-1$, $k_s \neq 3n_s + 1$, $s \geq 1$.

Обозначим теперь через b^* путь из 1 в 2 без распадных циклов:

$$b^* = 1(0)^{k_1+1} 1(0)^{k_2+1} \dots 1(0)^{k_{s-1}+1} 1(0)^{k_s+1} 2.$$

Здесь также $k_j = 3n_j + 1, j = 1, \dots, s-1$.

Все простые циклы из 2 можно представить в виде $b = b^+b^*$. При этом b^+ либо пустое слово, либо $b^+ = b_1^\varepsilon \dots b_t^\varepsilon, t \geq 1$.

Определим α -вес $p_\alpha(b^\varepsilon)$ пути b^ε как

$$p_\alpha(b^\varepsilon) = (\alpha, 1)A(n_1) \dots A(n_s)(0, 1)^\top = p_2(n_1 \dots n_s),$$

если для распадного цикла $k_s = 3n_s + 2, k = 3n_s + 3, n_s \geq 0$.

Если для последнего распадного цикла $k_s = 0$, то

$$p_\alpha(b^\varepsilon) = (\alpha, 1)A(n_1) \dots A(n_{s-1})(1, 0)^\top = p_1(n_1 \dots n_{s-1}), \quad s > 1.$$

Если же $s = 1, k_1 = 0$, то

$$p_\alpha(b^\varepsilon) = (\alpha, 1)(1, 0)^\top = \alpha.$$

Для пути b^* также определим α -вес $p_\alpha(b^*)$. Тогда для $k_s = 3n_s + 1, k_s = 3n_s$

$$p_\alpha(b^*) = p_1(n_1 \dots n_s) = (\alpha, 1)A(n_1) \dots A(n_s)(1, 0)^\top, \quad n_1 \geq 0, \dots, n_s \geq 0.$$

При $k_s = 3n_s - 1$

$$p_\alpha(b^*) = p_1(n_1 \dots n_s) = (\alpha, 1)A(n_1) \dots A(n_s)(1, 0)^\top, \quad n_1 \geq 0, \dots, n_s \geq 1.$$

Пусть $\varphi(b)$ есть длина пути b , то есть число ребер пути b . Множитель $q^{\varphi(b)}$ назовем q -весом пути b . Этот вес мультипликативен относительно умножения путей.

Веса путей b^ε, b^* определим как

$$p(b^\varepsilon) = q^{\varphi(b^\varepsilon)} p_\alpha(b^\varepsilon),$$

$$p(b^*) = q^{\varphi(b^*)} p_\alpha(b^*).$$

Вес пустого пути полагаем равным 1.

Из всех определений вытекает следующее утверждение.

Предложение 1. Условная мера Эрдеши простого цикла из 2 в 2 при условии, что траектории начинаются в 2, равна

$$p(b) = qp(b^+)p(b^*).$$

Введем обозначения

$$\Phi_1(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n_1 \geq 0, \dots, n_s \geq 0} (zq)^{3(n_1 + \dots + n_s + s)} p_1(n_1 \dots n_s),$$

$$\Phi_2(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n_1 \geq 0, \dots, n_s \geq 0} (zq)^{3(n_1 + \dots + n_s + s)} p_2(n_1 \dots n_s).$$

Введем матрицу

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим

$$A_0(n) = CA(n)C.$$

Тогда

$$A_0(n) = \begin{pmatrix} \alpha^3[n+1]_{\alpha^2} & \alpha^4[n]_{\alpha^2} \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Теперь введем матрицы $M(0)$, $M(1)$, полагая

$$M(0) = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha^3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(1) = \begin{pmatrix} \alpha^3 & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Справедливо равенство

$$A_0(n) = M(0)^n M(1).$$

Именно это представление приводит к представлению произведения $A_0(n_1) \dots A_0(n_s)$ как произведения матриц $M(0)$, $M(1)$ вдоль пути в бинарном дереве. Действительно,

$$\begin{aligned} p_1(n_1 \dots n_s) &= (\alpha, 1)CA_0(n_1) \dots A_0(n_s)C(1, 0)^\top \\ &= \alpha(1, \alpha)M(0)^{n_1}M(1) \dots M(0)^{n_s}(0, 1)^\top. \end{aligned}$$

Каждое слово $(0)^{n_1}1(0)^{n_2}1 \dots (0)^{n_s} = d_{n-1} = (i_1 \dots i_{n-1})$ есть двоичное слово длины $n_1 + \dots + n_s + s - 1 = n - 1$. Поэтому можно считать, что $p_1(n_1 \dots n_s) = p_1(d_{n-1})$. Если $n = 1$, то $s = 1$, $n_1 = 0$, и $p_1(0) = \alpha^2 = \alpha(1, \alpha)(0, 1)^\top$.

Пусть $M = M(0) + M(1)$, D_{n-1} есть множество двоичных слов длины $n - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) &= \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n_1 \geq 0, \dots, n_s \geq 0} (zq)^{3(n_1 + \dots + n_s + s)} p_1(n_1 \dots n_s) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d \in D_{n-1}} (zq)^{3n} p_1(d) = \alpha(1, \alpha) \sum_{n=1}^{\infty} (zq)^{3n} M^{n-1}(0, 1)^\top \\ &= \alpha(1, \alpha)(zq)^3 (Id - (zq)^3 M)^{-1}(0, 1)^\top. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} p_2(n_1 \dots n_s) &= (\alpha, 1)CA_0(n_1) \dots A_0(n_s)C(0, 1)^\top \\ &= (1, \alpha)M(0)^{n_1}M(1) \dots M(0)^{n_s}(\alpha^3, 1)^\top \\ &= p_2(n_1 \dots n_s) = p_2(d_{n-1}), \quad n > 1. \end{aligned}$$

При $n = 1$

$$p_2(0) = \alpha^3 + \alpha = (1, \alpha)(\alpha^3, 1)^\top.$$

Отсюда следует, что

$$\Phi_2(z) = (1, \alpha)(zq)^3 (Id - (zq)^3 M)^{-1}(\alpha^3, 1)^\top.$$

4. Производящая функция $\varphi(b)$

Производящая функция длины пути $\varphi(b)$, $b = b^+b^*$, равна

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \sum_b z^{\varphi(b)} p(b) = q \sum_{b^+, b^*} (zq)^{\varphi(b^+b^*)} p_\alpha(b^+) p_\alpha(b^*) \\ &= q \sum_{b^+} (zq)^{\varphi(b^+)} p_\alpha(b^+) \sum_{b^*} (zq)^{\varphi(b^*)} p_\alpha(b^*).\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}\Phi^+(z) &= \sum_{b^+} (zq)^{\varphi(b^+)} p_\alpha(b^+) = \sum_{b^+} (zq)^{\varphi(b^+)} p_\alpha(b^+) \\ &= 1 + \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{b_1^\varepsilon} \dots \sum_{b_t^\varepsilon} (zq)^{\varphi(b_1^\varepsilon)} p(b_1^\varepsilon) \dots (zq)^{\varphi(b_t^\varepsilon)} p(b_t^\varepsilon) \\ &= 1 + \sum_{t=1}^{\infty} (\Phi^\varepsilon(z))^t = \frac{1}{1 - \Phi^\varepsilon(z)}.\end{aligned}$$

В этой формуле

$$\Phi^\varepsilon(z) = \sum_{b_t^\varepsilon} (zq)^{\varphi(b_t^\varepsilon)} p(b_t^\varepsilon).$$

Для того, чтобы получить $\Phi^+(z)$, вычислим сначала $\Phi^\varepsilon(z)$. По определению,

$$b^\varepsilon = 1(0)^{k_1+1} 1(0)^{k_2+1} \dots 1(0)^{k_{s-1}+1} 1(0)^{k_s},$$

где $k_j = 3n_j + 1$, $j = 1, \dots, s-1$, $k_s \neq 3n_s + 1$, $s \geq 1$.

При этом множество путей b^ε можно разбить на три группы:

- (1) $k_s = 0$;
- (2) $k_s = 3n_s + 2$;
- (3) $k_s = 3n_s + 3$, $n_s \geq 0$.

Для двух последних случаев α -вес b^ε один и тот же и равен

$$p_\alpha(b^\varepsilon) = p_2(n_1 \dots n_s), \quad n_1 \geq 0, \dots, n_s \geq 0.$$

Если $k_s = 0$, то при $s > 1$ α -вес соответствующего пути равен

$$p_\alpha(b^\varepsilon) = p_1(n_1 \dots n_{s-1}), \quad n_1 \geq 0, \dots, n_{s-1} \geq 0.$$

При $s = 1$, $k_s = 0$ мы получаем, что

$$p_\alpha(b^\varepsilon) = \alpha.$$

Поэтому

$$\sum_{b^\varepsilon} z^{\varphi(b^\varepsilon)} p(b^\varepsilon) = S_0 + S_2 + S_3,$$

где S_0, S_2, S_3 соответствуют трем различным типам путей b^ε , где $k_s = 0, k_s = 3n_s + 2, k_s = 3n_s + 3$ соответственно.

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} S_0(z) &= \alpha(zq)^2 + \sum_{s=2}^{\infty} \sum_{n_1 \geq 0, \dots, n_{s-1} \geq 0} (zq)^{k_1 + \dots + k_{s-1} + 2s} p_1(n_1 \dots n_{s-1}) \\ &= \alpha(zq)^2 + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n_1 \geq 0, \dots, n_s \geq 0} (zq)^{3(n_1 + \dots + n_s + s) + 2} p_1(n_1 \dots n_s) \\ &= \alpha(zq)^2 + (zq)^2 \Phi_1(z). \end{aligned}$$

Далее,

$$S_2(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n_1 \geq 0, \dots, n_s \geq 0} (zq)^{3(n_1 + \dots + n_s + s) + 1} p_2(n_1, \dots, n_s) = (zq) \Phi_2(z).$$

Наконец,

$$S_3(z) = (zq)^2 \Phi_2(z).$$

Проводя все вычисления, получаем, что

$$\begin{aligned} \Phi^\varepsilon(z) &= S_0(z) + S_2(z) + S_3(z) \\ &= \alpha(zq)^2 + (zq)^2 \Phi_1(z) + (zq)(1 + (zq)) \Phi_2(z). \end{aligned}$$

Теперь вычислим

$$\Phi^*(z) = \sum_{b^*} z^{\varphi(b^*)} p(b^*) = V_1 + V_0 + V_{-1},$$

также соответствующую трем типам путей b^* , где $k_s = 3n_s + 1, k_s = 3n_s, n_s \geq 0$, и $k_s = 3n_s - 1, n_s \geq 1$. Тогда

$$V_1(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n_1 \geq 0, \dots, n_s \geq 0} (zq)^{k_1 + k_2 + \dots + k_s + 2s} p_1(n_1, \dots, n_s) = \Phi_1(z).$$

Далее,

$$V_0(z) = (zq)^{-1} \Phi_1(z).$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} V_{-1}(z) &= (zq)^{-2} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n_1 \geq 0, \dots, n_{s-1} \geq 0, n_s \geq 1} (zq)^{3(n_1 + \dots + n_s + s)} p_1(n_1 \dots n_s) \\ &= (zq)^{-2} \left(\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n_1 \geq 0, \dots, n_s \geq 0} (zq)^{3(n_1 + \dots + n_s + s)} p_1(n_1 \dots n_s) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n_1 \geq 0, \dots, n_{s-1} \geq 0} (zq)^{3(n_1 + \dots + n_s + s)} p_1(n_1 \dots 0) \right). \end{aligned}$$

Можно показать, что

$$p_1(n_1, \dots, n_{s-1}, 0) = \alpha p_1(n_1 \dots n_{s-1}), \quad s \geq 2.$$

При $s = 1$

$$p_1(0) = \alpha^2.$$

Поэтому

$$V_{-1}(z) = [(zq)^{-2} - \alpha(zq)]\Phi_1(z) - \alpha^2(zq).$$

Отсюда получаем, что производящая функция для $\varphi(b^*)$ есть

$$\Phi^*(z) = [1 + (zq)^{-1} + (zq)^{-2} - \alpha(zq)]\Phi_1(z) - \alpha^2(zq).$$

Производящая функция $\Phi(z)$ равна

$$\Phi(z) = q \frac{\Phi^*(z)}{1 - \Phi^e(z)} = \frac{q G_1(x)}{G_2(x)},$$

где

$$\begin{aligned} G_1(x) &= (1 - q)^2 q z^2 (1 + (1 - q)^2 z^2 - (1 - q)^2 z^3), \\ G_2(x) &= 1 - z^3 - q^3 (2 - 3z) z^4 + q^4 (1 - z) z^4 \\ &\quad + q^2 z^2 (1 - z + z^2 - 3z^3) - q(z + z^2 - 2z^3 - z^5). \end{aligned}$$

Легко убедиться в том, что

$$\Phi(1) = \sum_b p(b) = 1.$$

Теперь нетрудно убедиться в том, что

$$\mathbf{E}\varphi(b) = \Phi'(1) = \frac{3 - 7q + 12q^2 - 11q^3 + 5q^4 - q^5}{(1 - q)^2 q}.$$

Заметим, что $\mathbf{E}\varphi(b) + 1$ есть среднее время первого возвращения из состояния 2 в 2, и для инвариантной меры Эрдеша μ справедливо равенство

$$\mu(2) = \frac{L(2)R(2)}{LR} = \frac{(1 - q)^2 q}{3 - 6q + 10q^2 - 10q^3 + 5q^4 - q^5} = \frac{1}{\mathbf{E}\varphi(b) + 1}.$$

Теперь вычисление энтропии инвариантной меры Эрдеша h сводится к вычислению энтропии H условного распределения на пространстве простых циклов с базовой вершиной 2, так как

$$h = \mu(2)H = \frac{H}{\mathbf{E}\varphi(b) + 1}.$$

5. Вычисление энтропии распределения на пространстве простых циклов с базовой вершиной 2

Наша ближайшая цель состоит в получении удобной формулы для энтропии H распределения на пространстве простых циклов с базовой вершиной 2.

По определению,

$$\begin{aligned}
 H &= - \sum_b \log(qp(b))qp(b) \\
 &= -\log q \sum_b (1 + \varphi(b))qp(b) - q \sum_b \log(p_\alpha(b))p(b) \\
 &= -(1 + E\varphi(b)) \log q - q \sum_b (\log(p_\alpha(b^+)) + \log(p_\alpha(b^*))) p_\alpha(b^+) q^{\varphi(b^+)} p_\alpha(b^*) q^{\varphi(b^*)}.
 \end{aligned}$$

Вычислим отдельно последнюю сумму:

$$\begin{aligned}
 W &= \sum_b (\log(p_\alpha(b^+)) + \log(p_\alpha(b^*))) p_\alpha(b^+) q^{\varphi(b^+)} p_\alpha(b^*) q^{\varphi(b^*)} \\
 &= W^+ P^* + W^* P^+,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 W^+ &= \sum_b \log(p_\alpha(b^+)) p_\alpha(b^+) q^{\varphi(b^+)}, & P^+ &= \sum_{b^+} p(b^+) q^{\varphi(b^+)} = \Phi^+(1), \\
 W^* &= \sum_b \log(p_\alpha(b^*)) p_\alpha(b^*) q^{\varphi(b^*)}, & P^* &= \sum_{b^*} p(b^*) q^{\varphi(b^*)} = \Phi^*(1).
 \end{aligned}$$

При этом

$$P^+ P^* = \Phi^+(1) \Phi^*(1) = \frac{1}{q} \Phi(1) = \frac{1}{q}.$$

Теперь

$$W^+ = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{j=1}^t \left(\sum_{b_j^\varepsilon} \log(p_\alpha(b_j^\varepsilon)) q^{\varphi(b_j^\varepsilon)} p_\alpha(b_j^\varepsilon) \right) (P^\varepsilon)^{t-1} = \frac{W^\varepsilon}{(1 - P^\varepsilon)^2},$$

где

$$W^\varepsilon = \sum_{b^\varepsilon} \log(p_\alpha(b^\varepsilon)) p_\alpha(b^\varepsilon) q^{\varphi(b^\varepsilon)}, \quad P^\varepsilon = \sum_{b^\varepsilon} p_\alpha(b^\varepsilon) q^{\varphi(b^\varepsilon)}.$$

Кроме того, было показано, что

$$P^+ = \frac{1}{1 - P^\varepsilon} = \Phi^+(1).$$

Поэтому

$$W^+ = W^\varepsilon (P^+)^2.$$

Отсюда

$$W = P^+ (W^\varepsilon P^+ P^* + W^*) = P^+ \left(\frac{1}{q} W^\varepsilon + W^* \right).$$

Мы воспользовались здесь тем, что $P^+ P^* = 1/q$. Поэтому

$$H = -(1 + \mathbf{E}\varphi(b)) \log q - qW = -(1 + \mathbf{E}\varphi(b)) \log q - P^+ (W^\varepsilon + qW^*).$$

Положим

$$\sigma_1 = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n_1 \geq 0, \dots, n_s \geq 0} \log(p_1(n_1, \dots, n_s)) p_1(n_1, \dots, n_s) q^{3(n_1 + \dots + n_s + s)},$$

$$\sigma_2 = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n_1 \geq 0, \dots, n_s \geq 0} \log(p_2(n_1, \dots, n_s)) p_2(n_1, \dots, n_s) q^{3(n_1 + \dots + n_s + s)}.$$

По определению, α -вес пути b^ε равен

$$p_\alpha(b^\varepsilon) = p_2(n_1, \dots, n_s), \quad k_s = 3n_s + 2, \quad k_s = 3n_s + 3, \quad n_s \geq 0,$$

$$p_\alpha(b^\varepsilon) = p_1(n_1, \dots, n_{s-1}), \quad k_s = 0, \quad s > 1.$$

Если же $s = 1, k_s = 0$, то

$$p_\alpha(b^\varepsilon) = \alpha.$$

Поэтому, разбивая, как и раньше, выражение для W^ε на три слагаемых, получаем, что

$$W^\varepsilon = q^2 \alpha \log(\alpha) + q^2 \sigma_1 + (q + q^2) \sigma_2.$$

Теперь рассмотрим пути из 1 в 2 без распадных циклов. Такой путь имеет вид

$$b^* = 1(0)^{k_1+1} 1(0)^{k_2+1} \dots 1(0)^{k_s+1} 2,$$

и для таких путей α -вес, соответственно, равен

$$p_\alpha(b^*) = p_1(n_1, \dots, n_s), \quad n_1 \geq 0, \dots, n_s \geq 0, \quad k_s = 3n_s + 1, \quad k_s = 3n_s,$$

$$p_\alpha(b^*) = p_1(n_1, \dots, n_s), \quad n_1 \geq 0, \dots, n_s \geq 1, \quad k_s = 3n_s - 1.$$

Аналогично, формула для W^* переписывается в виде

$$W^* = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n_1 \geq 0, \dots, n_s \geq 0} \log(p_1(n_1, \dots, n_s)) p_1(n_1, \dots, n_s) q^{3(n_1 + \dots + n_s + s)}$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n_1 \geq 0, \dots, n_s \geq 0} \log(p_1(n_1, \dots, n_s)) p_1(n_1, \dots, n_s) q^{3(n_1 + \dots + n_s + s) - 1}$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n_1 \geq 0, \dots, n_s \geq 1} \log(p_1(n_1, \dots, n_s)) p_1(n_1, \dots, n_s) q^{3(n_1 + \dots + n_s + s) - 2}.$$

Справедливо равенство

$$W^* = \sigma_1 + \frac{1}{q} \sigma_1 + \frac{1}{q^2} (\sigma_1 - \sigma_1^0),$$

где

$$\sigma_1^0 = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n_1 \geq 0, \dots, n_{s-1} \geq 0} \log(p_1(n_1, \dots, n_{s-1}, 0)) p_1(n_1, \dots, n_{s-1}, 0) q^{3(n_1 + \dots + n_{s-1} + s)}.$$

Напомним, что

$$p_1(n_1, \dots, n_{s-1}, 0) = \alpha p_1(n_1, \dots, n_{s-1}), \quad s \geq 2.$$

При $s = 1$

$$p_1(0) = (\alpha, 1)A(0)(1, 0)^\top = \alpha^2.$$

Поэтому

$$\sigma_1^0 = 2\alpha^2 q^3 \log \alpha + q^3 \alpha (\log \alpha) \Phi_1(1) + \alpha q^3 \sigma_1.$$

Отсюда получаем, что

$$H = c_1 \sigma_1 + c_2 \sigma_2 + c,$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{2 + 3q - q^2 + 4q^3 + 3q^4 - 5q^5 + 4q^6 - 2q^7}{q - q^4}, \\ c_2 &= -\frac{q(2 + 3q - q^2 + q^4 - q^5)}{1 - q^3}, \\ c &= \frac{a \log(1 - q) - b \log q}{(1 - q)^2 q(1 + q + q^2)}. \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned} a &= 4q - 12q^2 + 8q^3 + 8q^4 - 16q^5 + 14q^6 - 8q^7 + 2q^8, \\ b &= -3 - q + 5q^2 - 2q^3 - 13q^4 + 22q^5 - 18q^6 + 9q^7 - 2q^8. \end{aligned}$$

При $q = 1/2$ эти константы равны

$$c = \frac{49}{4}, \quad c_1 = -\frac{35}{4}, \quad c_2 = -\frac{15}{8}.$$

6. Процедура ускорения сходимости рядов

Итак, для вычисления энтропии необходимо вычислять ряды

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n_1 \geq 0, \dots, n_s \geq 0} \log(p_1(n_1, \dots, n_s)) p_1(n_1, \dots, n_s) q^{3(n_1 + \dots + n_s + s)} \\ &= 2\alpha^2 \log \alpha + q^3 \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{d_{n-1} \in D_{n-1}} \log(p_1(d_{n-1})) p_1(d_{n-1}) q^{3n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} k_n^{(1)} q^{3(n+1)}, \\ \sigma_2 &= \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n_1 \geq 0, \dots, n_s \geq 0} \log(p_2(n_1, \dots, n_s)) p_2(n_1, \dots, n_s) q^{3(n_1 + \dots + n_s + s)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} k_n^{(2)} q^{3(n+1)}. \end{aligned}$$

Таблица 1.

q	h_d	q	h_d
0,5	0,9804093195347986, $n = 15$	0,25	0,8574481002105665, $n = 15$
	0,9804093195347315, $n = 20$		0,8574481002105663, $n = 20$
0,45	0,9771520623050443, $n = 15$	0,2	0,7800100418650452, $n = 15$
	0,9771520623047869, $n = 20$		0,7800100418650452, $n = 20$
0,4	0,9664343579215019, $n = 15$	0,15	0,6721849172201769, $n = 15$
	0,9664343579213361, $n = 20$		0,6721849172201769, $n = 20$
0,35	0,9456243417042867, $n = 15$	0,1	0,5254251828886658, $n = 15$
	0,9456243417042505, $n = 20$		0,5254251828886658, $n = 20$
0,3	0,9108593564128254, $n = 15$	0,05	0,32442148594240267, $n = 15$
	0,9108593564128222, $n = 20$		0,32442148594240294, $n = 20$

В этих формулах

$$k_n^{(i)} = \sum_{d \in D_n} \log(p_i(d)) p_i(d), \quad i = 1, 2,$$

$$k_0^{(1)} = 2\alpha^2 \log \alpha,$$

$$k_0^{(2)} = (\alpha^3 + \alpha) \log(\alpha^3 + \alpha).$$

Основная трудность при вычислении H состоит в том, что ряды $\sum_{i=1}^{\infty} k_n^{(i)} q^{3n}$ сходятся так медленно, что непригодны для численного счета. Следуя подходу Александра-Цагира (см. [7]), преобразуем этот ряд для ускорения сходимости.

Пусть имеется ряд $\sum_{n=1}^{\infty} k_n x^n$. Рассмотрим $s(\alpha)$ — максимальное по модулю собственное значение матрицы $M = M(0) + M(1)$. Тогда

$$s(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \sqrt{1 + 2\alpha - \alpha^2 - \alpha^4 + 2\alpha^5 + \alpha^6}).$$

Введем величину

$$\mu_n = k_n - s(\alpha)k_{n-1}.$$

Тогда

$$(1 - s(\alpha)x) \left(\sum_{n=1}^{\infty} k_n x^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n x^n.$$

Рассмотрим

$$\lambda_n = 2\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2} + \mu_n - s(\alpha)\mu_{n-1}.$$

Справедливы следующие соотношения между рядами:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} k_n x^n &= \frac{1}{1 - s(\alpha)x} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n x^n, \\ (1 - x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x^n &= (1 - s(\alpha)x) \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n x^n, \\ \sum_{n=1}^{\infty} k_n x^n &= \frac{(1 - x)^2}{(1 - s(\alpha)x)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x^n. \end{aligned}$$

Вычисление рядов

$$k_n^{(i)} = \sum_{d \in D_n} \log(p_i(d)) p_i(d), \quad i = 1, 2,$$

по этой схеме было сведено к вычислению рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x^n$, $i = 1, 2$. Последние ряды сходятся намного быстрее.

В табл. 1 приведены значения

$$h_d = \frac{h}{\log \beta} = \frac{H}{(\mathbf{E}\varphi(b) + 1) \log \beta}$$

хаусдорфовой размерности инвариантной меры Эрдеша.

Список литературы

1. Erdős P., On a family of symmetric Bernoulli convolutions. *Amer. J. Math.* (1939) **61**, 974–975.
2. Sidorov N., Vershik A., Ergodic properties of the Erdős measures, the entropy of the goldenshift, and related problems. *Monatsh. Math.* (1998) **126**, 215–261.
3. Lalley S. P., Random series in powers of algebraic integers: Hausdorff dimension of the limit distribution. *J. London Math. Soc.* (1998) **57**, 628–654.
4. Бежаева З. И., Оселедец В. И., Задача Эрдеша–Вершика для золотого сечения. *Функциональный анализ и его приложения* (2010) **44**, №1, 3–13.
5. Grabner P. J., Kirschenhofer P., Tichy R. F., Combinatorial and arithmetical properties of linear numeration systems. *Combinatorica* (2002) **22**, 245–267.
6. Feng De-Jun, The limited Rademacher function and Bernoulli convolutions associated with Pisot numbers. *Adv. Math.* (2005) **195**, 24–101.
7. Alexander I. C., Zagier D., The entropy of a certain infinitely convolved Bernoulli measure. *J. London Math. Soc.* (1991) **44**, 121–134.
8. Бежаева З. И., Оселедец В. И., Меры Эрдеша, софические меры и марковские цепи. *Записки научных семинаров ПОМИ* (2005) **326**, 28–47.

Статья поступила 21.01.2011.