Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Чупрунов, И. Фазекаш, Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для числа ячеек заданного объема, *Дискрет. матем.*, 2012, том 24, выпуск 1, 140–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1178>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 09:18:03

Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для числа ячеек заданного объема

© 2012 г. А. Н. Чупрунов, И. Фазекаш

Рассматривается аналог обобщенной схемы размещения, в котором вместо условия “число частиц равно n ” используется условие “число частиц не больше, чем n ”. Получены законы больших чисел и локальные предельные теоремы для числа ячеек, содержащих r частиц.

1. Введение

Пусть $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ — независимые одинаково распределенные невырожденные случайные величины, принимающие значения в множестве неотрицательных целых чисел $\mathbf{N}_0$. Пусть $M \subset \mathbf{N}_0$. Предполагаем, что случайная величина ξ_0 имеет распределение

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi_0 = k\}, \quad k \in \mathbf{N}_0, \quad (1)$$

и $\mathbf{E}\xi_0 = a < \infty$. Рассмотрим случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_N$ с совместным распределением

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \mathbf{P}\left\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \sum_{i=1}^N \xi_i \in M\right\}. \quad (2)$$

где M есть непустое подмножество $\mathbf{N}_0$. Предполагаем, что $\mathbf{P}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N \in M) > 0$. Рассмотрим

$$\mu_{MN} = \sum_{i=1}^N \mathbf{I}_{\{\eta_i=r\}}, \quad (3)$$

где $\mathbf{I}_{\{\eta_i=r\}}$ есть индикатор события $\{\eta_i = r\}$. Здесь r есть фиксированное целое неотрицательное число.

Прежде всего заметим, что закон больших чисел колмогоровского типа справедлив в частном случае нашей модели. Если $M = \mathbf{N}_0$, то совместное распределение случайных величин $\eta_1, \dots, \eta_N$ совпадает с совместным распределением случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_N$. Поэтому индикаторы $\mathbf{I}_{\{\eta_i=r\}}$, $i = 1, \dots, N$, — независимые одинаково распределенные случайные величины, и справедлива следующая теорема.

Теорема А. Пусть $M = N_0$. Тогда

$$p_r = \mathbf{P}\{\xi_i = r\} = \mathbf{P}\{\eta_i = r\}$$

и почти наверное

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mu_{MN}}{N} = p_r.$$

Обобщенная схема размещения есть другой частный случай нашей модели. Рассмотрим случай, когда $M = M'_n = \{n\}$, $n \in N_0$. Тогда мы получаем обобщенную схему размещения, введенную в [9], где случайные величины $\eta'_1, \dots, \eta'_N$ имеют совместное распределение

$$\mathbf{P}\{\eta'_1 = k_1, \dots, \eta'_N = k_N\} = \mathbf{P}\left\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \sum_{i=1}^N \xi_i = n\right\}. \quad (4)$$

В случае $M = M'_n = \{n\}$ мы будем обозначать η_i , μ_{MN} через η'_i , μ'_{nN} , соответственно. Заметим, что

$$\mu'_{nN} = \sum_{i=1}^N \mathbf{I}_{\{\eta'_i = r\}}$$

можно интерпретировать как число ячеек, содержащих r частиц при размещении n частиц по N ячейкам; подробное описание обобщенной схемы размещения можно найти, например, в [10, 11].

Пусть $b_0, b_1, b_2, \dots$ есть последовательность неотрицательных чисел такая, что радиус сходимости R ряда

$$B(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k \theta^k}{k!}$$

строго положителен. В следующей теореме мы будем рассматривать случайную величину $\xi_0 = \xi_0(\theta)$ с распределением

$$p_k = p_k(\theta) = \mathbf{P}\{\xi_0(\theta) = k\} = \frac{b_k \theta^k}{k! B(\theta)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Мы будем предполагать, что распределение случайной величины $\xi_0(\theta)$ удовлетворяет условию

$$b_0 > 0, \quad b_1 > 0. \quad (6)$$

Свойство (6) и случайная величина $\xi_0(\theta)$ были введены в [6]. В [6, 7, 8] были получены предельные теоремы для сумм случайных величин $\eta_i(\theta), \dots, \eta_N(\theta)$.

Отметим, что

$$\tilde{m}(\theta) = \mathbf{E}\xi_0(\theta) = \frac{\theta B'(\theta)}{B(\theta)}.$$

В [2] показано, что функция $\tilde{m}(\theta)$, $0 < \theta < R$, обратима.

В [1] изучался усиленный закон больших чисел для схемы размещения различных частиц по ячейкам. Усиленный закон больших чисел для обобщенной схемы размещения изучался в [2]. В частности, в [2] (следствие 4.1) было доказано следующее утверждение.

Теорема В. Предположим, что случайная величина $\xi_0 = \xi_0(\theta)$ имеет распределение (5) со свойством (6). Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что $\alpha_{nN} \rightarrow \alpha$, где $0 < \alpha < \infty$. Пусть $0 < \theta < R$, где $\theta = \tilde{m}^{-1}(\alpha)$. Тогда

$$\lim_{n, N \rightarrow \infty} \frac{\mu'_{nN}}{N} = p_r(\theta)$$

почти наверное.

Здесь мы рассматриваем случай $M = M_n = \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbf{N}_0$, то есть мы изучаем случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_N$ с совместным распределением

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \mathbf{P}\left\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \sum_{i=1}^N \xi_i \leq n\right\}. \quad (7)$$

В случае (7) мы будем использовать обозначение μ_{nN} для случайной величины μ_{MN} . Этот аналог обобщенной схемы размещения имеет следующую интерпретацию. Мы размещаем не более n частиц по N ячейкам. Тогда событие $\{\eta_i = r\}$ состоит в том, что в i -ой ячейке находится r частиц, случайная величина

$$\mu_{nN} = \sum_{i=1}^N \mathbf{I}_{\{\eta_i=r\}}$$

есть число ячеек, содержащих r частиц.

Вначале мы будем изучать законы больших чисел, то есть сходимости μ_{nN}/N при $n, N \rightarrow \infty$ (теоремы 1–2). Мы покажем, что если $n/N > \mathbf{E}\xi_j$, то поведение случайных величин $\eta_1, \dots, \eta_N$ такое же, как поведение независимых одинаково распределенных случайных величин, а если $n/N < d < \mathbf{E}\xi_j$, то поведение случайных величин $\eta_1, \dots, \eta_N$ такое же, как в обобщенной схеме размещения. Затем мы докажем локальные предельные теоремы, то есть мы будем изучать асимптотическое поведение вероятностей $\mathbf{P}\{\mu_{nN} = k\}$ (теоремы 3–9). Мы получим результаты о нормальной и пуассоновской аппроксимации этих вероятностей. Эти результаты являются аналогами теорем 1.5.1 и 1.5.2 в [10].

Везде в работе мы будем считать, что рассматриваемые случайные величины определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Мы будем предполагать, что $\mathbf{E}\xi_0 = a < \infty$, $\alpha_{nN} = n/N$, и Φ есть функция распределения стандартной гауссовской случайной величины.

2. Законы больших чисел и локальные предельные теоремы

Введем обозначения

$$S_N = \sum_{i=1}^N \xi_i, \quad S_N^c = \sum_{i=1}^N (\xi_i - a).$$

Справедлив следующий аналог теоремы А.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{E}\xi_0 = a < \infty$. Предположим, что существует числовая последовательность B_N , $N = 1, 2, \dots$, такая, что $N \geq B_N > 0$ для всех $N = 1, 2, \dots$, $B_N \rightarrow \infty$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{B_{N-1}}{B_N} = 1, \quad (8)$$

и

$$\frac{S_N^c}{B_N} \rightarrow \xi' \quad (9)$$

по распределению, где ξ' есть почти наверное конечная случайная величина. Обозначим через F функцию распределения случайной величины ξ' . Пусть C есть точка непрерывности функции распределения F такая, что

$$F(C) = \mathbf{P}\{\xi' < C\} = q_0 > 0.$$

Пусть $C < d_1 < \infty$. Тогда

$$\lim_{\substack{n, N \rightarrow \infty \\ a + C B_N / N < \alpha_{nN} < d_1}} \frac{\mu_{nN}}{N} = p_r \quad \text{почти наверное.} \quad (10)$$

В доказательстве теоремы 2 будем использовать следующие следствия.

Следствие 1. Пусть $\mathbf{E}\xi_0 = a < \infty$. Пусть $a < d < d_1 < \infty$. Тогда

$$\lim_{\substack{n, N \rightarrow \infty \\ d < \alpha_{nN} < d_1}} \frac{\mu_{nN}}{N} = p_r \quad \text{почти наверное.}$$

Следствие 2. Предположим, что $\mathbf{E}\xi_0^2 < \infty$ и $\mathbf{E}\xi_0 = a$. Пусть $C > 0$, $a < d_1 < \infty$. Тогда

$$\lim_{\substack{n, N \rightarrow \infty \\ a - C/\sqrt{N} < \alpha_{nN} < d_1}} \frac{\mu_{nN}}{N} = p_r \quad \text{почти наверное.}$$

Основным результатом этой работы является следующая теорема. Мы изучаем сходимость μ_{nN}/N при условии, что $n, N \rightarrow \infty$ так, что $n/N = \alpha_{nN} \rightarrow \alpha$. Мы покажем, что аналог теоремы А справедлив, если α велико, и аналог теоремы В справедлив, если α мало.

Напомним, что случайная величина ξ удовлетворяет условию Крамера, если существует такая положительная константа H , что $\mathbf{E}e^{\lambda\xi} < \infty$ для всех $|\lambda| < H$. Следовательно, положительная случайная величина ξ удовлетворяет условию Крамера тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}e^{\lambda\xi} < \infty$ для некоторого $\lambda > 0$.

Отметим, что в теореме 1 и частях 1, 2 теоремы 2 используется общая модель (7); условие (5) используется только в части 3 теоремы 2.

Теорема 2. Пусть $\mathbf{E}\xi_0 = a < \infty$.

(1) Пусть $\alpha > a$. Тогда

$$\lim_{\substack{n, N \rightarrow \infty \\ \alpha_{nN} \rightarrow \alpha}} \frac{\mu_{nN}}{N} = p_r \quad \text{почти наверное.}$$

(2) Предположим, что случайная величина ξ_0 удовлетворяет условию Крамера. Тогда

$$\lim_{\substack{n, N \rightarrow \infty \\ \alpha_{nN} \rightarrow a}} \frac{\mu_{nN}}{N} = p_r \quad \text{почти наверное.} \quad (11)$$

(3) Пусть $0 < \alpha < a$. Предположим, что случайная величина $\xi_0 = \xi_0(\theta)$ имеет распределение (5) и условие (6) выполнено. Пусть $\theta = \tilde{m}^{-1}(\alpha)$ и $0 < \theta < R$. Тогда

$$\lim_{\substack{n, N \rightarrow \infty \\ \alpha_{nN} \rightarrow \alpha}} \frac{\mu_{nN}}{N} = p_r(\theta) \quad \text{по вероятности.} \quad (12)$$

Замечание 1. Рассмотрим случайную величину $\xi(\theta)$ с распределением (5). Так как $\theta < R$, мы видим, что $\theta e^\lambda < R$ для некоторого $\lambda > 0$. Поэтому

$$\mathbf{E} e^{\lambda \xi} = \frac{B(\theta e^\lambda)}{B(\theta)} < \infty.$$

Таким образом, случайная величина $\xi(\theta)$ удовлетворяет условию Крамера. Следовательно, если случайная величина $\xi_0(\theta)$ имеет распределение (5) и условие (6) выполнено, то верны все три утверждения теоремы 2.

Замечание 2. Так как $0 \leq \mu_{nN}/N \leq 1$, по теореме Лебега из условия первой или второй части теоремы 2 при $\alpha \geq a$ следует, что

$$\lim_{\substack{n, N \rightarrow \infty \\ \alpha_{nN} \rightarrow \alpha}} \frac{\mathbf{E} \mu_{nN}}{N} = p_r.$$

Заметим, что

$$\frac{\mathbf{E} \mu_{nN}}{N} = p_r \frac{\mathbf{P} \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} \xi_i \leq n-r \right\}}{\mathbf{P} \left\{ \sum_{i=1}^N \xi_i \leq n \right\}}. \quad (13)$$

Поэтому, если $p_r \neq 0$, то из условия первой или второй части теоремы 2 при $\alpha > a$ или $\alpha = a$, соответственно, следует, что

$$\lim_{\substack{n, N \rightarrow \infty \\ \alpha_{nN} \rightarrow \alpha}} \frac{\mathbf{P} \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} \xi_i \leq n-r \right\}}{\mathbf{P} \left\{ \sum_{i=1}^N \xi_i \leq n \right\}} = 1. \quad (14)$$

Из доказательств следует, что в условиях первой или второй части теоремы 2 верно (14) и без предположения $p_r \neq 0$. Если $\mathbf{E} \xi_0 = a < \infty$ и $\alpha > a$, то по закону больших чисел Колмогорова

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{n, N \rightarrow \infty \\ \alpha_{nN} \rightarrow \alpha}} \mathbf{P} \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} \xi_i \leq n-r \right\} &= 1, \\ \lim_{\substack{n, N \rightarrow \infty \\ \alpha_{nN} \rightarrow \alpha}} \mathbf{P} \left\{ \sum_{i=1}^N \xi_i \leq n \right\} &= 1, \end{aligned} \quad (15)$$

и (15) влечет (14). Но по центральной предельной теореме, если $\sigma^2 = \mathbf{D}^2(\xi_0) < \infty$, то

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^N \xi_i \leq n\right\} = \Phi\left(\frac{\sqrt{N}(\alpha_{nN} - a)}{\sigma}\right) + o(1), \quad (16)$$

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{N-1} \xi_i \leq n - r\right\} = \Phi\left(\frac{\sqrt{N}(\alpha_{nN} - a)}{\sigma}\right) + o(1), \quad (17)$$

при $n, N \rightarrow \infty$. Поэтому последовательности $\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^N \xi_i \leq n\right\}$ и $\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{N-1} \xi_i \leq n - r\right\}$ сходятся тогда и только тогда, когда сходится последовательность $\sqrt{N}(\alpha_{nN} - a)$. Однако условие, что $n, N \rightarrow \infty$ так, что $\alpha_{nN} \rightarrow \alpha$ не влечет этого. Поэтому может случиться так, что последовательности $\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^N \xi_i \leq n\right\}$ и $\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^{N-1} \xi_i \leq n - r\right\}$ не сходятся, в то время как (14) выполнено.

Теперь перейдем к локальным предельным теоремам. В теоремах 4, 5 и 7 получена нормальная аппроксимация, в теоремах 8 и 9 получена пуассоновская аппроксимация. Случайные величины с распределением (5) используются только в теоремах 7, 8 и 9. Обозначим через $\xi_0^{(r)}$ случайную величину с распределением

$$\mathbf{P}\{\xi_0^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_0 = k \mid \xi_0 \neq r\}.$$

Заметим, что так как случайная величина ξ_0 невырожденная, $\mathbf{P}\{\xi_0 \neq r\} \neq 0$. Пусть $\mathbf{E}\xi_0^{(r)} = a_r$ и пусть $\xi_1^{(r)}, \dots, \xi_N^{(r)}$ — независимые копии случайной величины $\xi_0^{(r)}$. Введем обозначение

$$S_N^{(r)} = \sum_{i=1}^N \xi_i^{(r)}.$$

Для модели (4) известно (см., например, лемму 1.2.1 в [10]), что для всех $k = 0, 1, 2, \dots, N$ справедлива формула

$$\mathbf{P}\{\mu'_{nN} = k\} = \binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-k} \frac{\mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{S_N = n\}} \quad (18)$$

Теорема 3. Для всех $k = 0, 1, 2, \dots, N$

$$\mathbf{P}\{\mu_{nN} = k\} = \binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-k} \frac{\mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} \leq n - kr\}}{\mathbf{P}\{S_N \leq n\}}. \quad (19)$$

Доказательство теоремы 3 повторяет доказательство леммы 1.2.1 из [10].

Применяя обычные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин к числителю и знаменателю дроби в формуле (19), получаем локальные предельные теоремы для μ_{nN} .

Теорема 4. (1) Пусть $d > \max(a, a_r)$. Пусть $s_r^2 = p_r(1 - p_r)$. Тогда равномерно по $\alpha_{nN} > d$

$$\mathbf{P}\{\mu_{nN} = k\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N s_r}} e^{-u^2/2} (1 + o(1)) \quad (20)$$

при $n, N \rightarrow \infty$ и $u = (k - N p_r)/(s_r N^{1/2})$, принадлежащем произвольному ограниченному интервалу.

(2) Пусть $a < a_r$ и $a < d < d_1 < a_r$. Тогда равномерно по $d < \alpha_{nN} < d_1$

$$\mathbf{P}\{\mu_{nN} = k\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N s_r}} e^{-u^2/2} o(1) \quad (21)$$

при $n, N \rightarrow \infty$ и $u = (k - Np_r)/(s_r N^{1/2})$, принадлежащему произвольному ограниченному интервалу.

Теорема 5. Предположим, что $\mathbf{E}\xi_0^2 < \infty$. Обозначим через σ^2 , σ_r^2 дисперсии случайных величин ξ_0 , $\xi_0^{(r)}$, соответственно. Пусть $-\infty < C \leq \infty$. Тогда, если $n, N \rightarrow \infty$ так, что $\sqrt{N}(\alpha_{nN} - a) \rightarrow C$,

$$\mathbf{P}\{\mu_{nN} = k\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N s_r}} e^{-u^2/2} \left(\left(\frac{1}{\Phi(C/\sigma)} \right) + o(1) \right), \quad a_r < a, \quad (22)$$

$$\mathbf{P}\{\mu_{nN} = k\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N s_r}} e^{-u^2/2} \left(\left(\frac{\Phi(C/\sigma_r)}{\Phi(C/\sigma)} \right) + o(1) \right), \quad a_r = a, \quad (23)$$

$$\mathbf{P}\{\mu_{nN} = k\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N s_r}} e^{-u^2/2} o(1), \quad a_r > a, \quad (24)$$

при $u = (k - Np_r)/(s_r N^{1/2})$, принадлежащем произвольному ограниченному интервалу.

Замечание 3. Заметим, что $a < a_r$, $a > a_r$, $a = a_r$ тогда и только тогда, когда $a > r$, $a < r$, $a = r$, соответственно.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= e^{a\lambda} \mathbf{E} e^{-\lambda \xi_0}, & m(\lambda) &= (\ln(L(\lambda)))', & \sigma^2(\lambda) &= m'(\lambda), \\ L_r(\lambda) &= e^{a_r \lambda} \mathbf{E} e^{-\lambda \xi_0^{(r)}}, & m_r(\lambda) &= (\ln(L_r(\lambda)))', & \sigma_r^2(\lambda) &= m'_r(\lambda), \quad \lambda \geq 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Легко видеть, что $m(\cdot)$ и $\sigma(\cdot)$ существуют и конечны. Так как ξ_0 невырождена, то $m(\cdot)$ строго возрастает. Если $\mathbf{P}(\xi_0 = 0) > 0$, $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} m(\lambda) = a$. Поэтому при введенных выше предположениях $m(\lambda)$ есть строго возрастающая непрерывная функция такая, что

$$m(0) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} m(\lambda) = a.$$

Более того, если мы в дополнение предположим, что $r \neq 0$ и $\mathbf{P}(\xi_0 = 0) + \mathbf{P}(\xi_0 = r) < 1$, то аналогичные свойства верны для функции $m_r(\cdot)$. Пусть $0 < \alpha_{nN} < \min\{a, a_r\}$. Пусть

$$h = m^{-1}(a - \alpha_{nN}), \quad h_r = m_r^{-1}(a_r - \alpha_{nN}), \quad \beta(\alpha_{nN}) = \frac{(1 - e^{-h})}{(1 - e^{-h_r})}.$$

Теорема 6. Предположим, что $r > 0$, $\mathbf{P}(\xi_0 = 0) > 0$, и

$$\mathbf{P}(\xi_0 = 0) + \mathbf{P}(\xi_0 = r) < 1.$$

Пусть $0 < d < d_1 < \min(a, a_r)$. Тогда при $n, N \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\mu_{nN} = k\} = \mathbf{P}\{\mu'_{nN} = k\} \beta(\alpha_{nN}) (1 + o(1))$$

равномерно по $d < \alpha_{nN} < d_1$.

Используя теорему 6, получаем следующее утверждение.

Теорема 7. Пусть $r \geq 3$. Пусть $0 < d < d_1 < \min(a, a_r)$. Предположим, что случайная величина $\xi_0 = \xi_0(\theta)$ имеет распределение (5) и условие (6) выполнено. Тогда равномерно по $d < \alpha_{nN} < d_1$

$$\mathbf{P}\{\mu_{nN} = k\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}\sigma_{rr}} e^{-u^2/2} \beta(\alpha_{nN})(1 + o(1)) \quad (26)$$

при $n, N \rightarrow \infty$ и $u = (k - Np_r(\theta_{nN})) / (\sigma_{rr} N^{1/2})$, принадлежащем произвольному фиксированному ограниченному интервалу. Здесь

$$\sigma_{rr}^2 = p_r(\theta_{nN}) \left(1 - p_r(\theta_{nN}) - \frac{(\alpha_{nN} - r)^2}{\sigma^2(\theta_{nN})} \right),$$

где

$$\theta_{nN} = \tilde{m}^{-1}(\alpha_{nN}).$$

Теорема 8. Предположим, что случайная величина $\xi_0 = \xi_0(\theta)$ имеет распределение (5) и условие (6) выполнено. Предположим, что $r = 1$ и $n \geq 1$ фиксировано. Пусть $N \rightarrow \infty$ так, что $Np_r(\theta) \rightarrow \lambda$ для некоторого $0 < \lambda < \infty$. Тогда для всех $k \in \mathbf{N}_0$

$$\mathbf{P}\{\mu_{nN} = k\} = \left(\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \right) / \left(\sum_{l=0}^n \frac{\lambda^l e^{-\lambda}}{l!} \right) (1 + o(1)), \quad 0 \leq k \leq n, \quad (27)$$

и $\mathbf{P}\{\mu_{nN} = k\} = 0$, если $n < k$.

Следствие 3. Предположим, что случайная величина $\xi_0 = \xi_0(\theta)$ имеет распределение (5) и условие (6) выполнено; предположим, что $r = 1$. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что $Np_r(\theta) \rightarrow \lambda$ для некоторого $0 < \lambda < \infty$. Тогда для всех $k \in \mathbf{N}_0$

$$\mathbf{P}\{\mu_{nN} = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} (1 + o(1)).$$

Как видно из следующей теоремы, при более сильных условиях следствие 3 остается верным при $r > 1$.

Теорема 9. Предположим, что случайная величина $\xi_0 = \xi_0(\theta)$ имеет распределение (5) и условие (6) выполнено. Пусть $r > 1$ и $n/N^{1-1/r} \rightarrow \infty$. Пусть $N \rightarrow \infty$ так, что $Np_r(\theta) \rightarrow \lambda$ для некоторого $0 < \lambda < \infty$. Тогда для любого $k \in \mathbf{N}_0$

$$\mathbf{P}\{\mu_{nN} = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} (1 + o(1)). \quad (28)$$

Заметим, что теоремы 7, 8 и 9 являются аналогами теорем 1.5.1 и 1.5.2 в [10]. Однако теорема 1.5.2 была получена только для $r \geq 3$.

3. Доказательства

При доказательстве теоремы 1 нам потребуется следующая лемма. Мы рассматриваем модель (7) и используем обозначение

$$A = A_{nN} = \left\{ \sum_{i=1}^N \xi_i \leq n \right\}.$$

Лемма 1. Пусть

$$s_r^2 = p_r(1 - p_r), \quad \varepsilon \geq \frac{8s_r}{\sqrt{N}}.$$

Тогда

$$\mathbf{P}\{|\mu_{nN} - \mathbf{E}\mu_{nN}| \geq \varepsilon N\} \leq \frac{C_1}{\mathbf{P}\{A_{nN}\}} e^{-(\varepsilon^2 N / (16s_r^2))}, \quad (29)$$

где константа C_1 зависит только от ε , N и s_r , и ограничена, если ограничена величина $\varepsilon^2 \sqrt{N} / s_r^4$.

Доказательство. Пусть

$$\tau_i = \mathbf{I}\{\xi_i = r\}, \quad v_{nN} = \sum_{i=1}^N \tau_i.$$

Дисперсия τ_i есть $s_r^2 = p_r(1 - p_r)$, где $p_r = \mathbf{P}\{\xi_0 = r\}$. Пусть $\mathbf{P}^A$ и $\mathbf{E}^A$ обозначают условную вероятность и условное ожидание, соответственно. В теореме 2.1 из [3] доказано, что для $\varepsilon' \geq 8s_r$

$$\mathbf{P}^A \left\{ \frac{|v_{nN} - \mathbf{E}^A v_{nN}|}{\sqrt{N}} \geq \varepsilon' \right\} \leq \frac{C_1}{\mathbf{P}\{A\}} e^{-(\varepsilon'^2 / (16s_r^2))}, \quad (30)$$

причем константа C_1 зависит только от N , ε' и s_r , и ограничена, если ограничена величина $(\varepsilon')^2 / (s_r^4 \sqrt{N})$. В силу (2), используя (30) с $\varepsilon' = \sqrt{N}\varepsilon$, получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \frac{|\mu_{nN} - \mathbf{E}\mu_{nN}|}{N} \geq \varepsilon \right\} &= \mathbf{P}^A \left\{ \frac{|v_{nN} - \mathbf{E}^A v_{nN}|}{N} \geq \varepsilon \right\} \\ &\leq \frac{C_1}{\mathbf{P}\{A\}} e^{-(\varepsilon^2 N / (16s_r^2))}. \end{aligned}$$

Теперь напомним теорему Петрова о больших отклонениях (см. теорему 5.23 в [13]). Пусть случайная величина ξ_0 удовлетворяет условию Крамера и σ^2 есть ее дисперсия. Тогда

$$\frac{\mathbf{P}\{S_N^c < y\sqrt{N}\sigma\}}{\Phi(y)} = \exp \left\{ \frac{y^3}{\sqrt{N}} \lambda \left(\frac{y}{\sqrt{N}} \right) \right\} \left(1 + O \left(\frac{-y+1}{\sqrt{N}} \right) \right) \quad (31)$$

при $y \rightarrow -\infty$ и $y = o(\sqrt{N})$. Здесь

$$\lambda(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$$

есть степенной ряд с коэффициентами, зависящими от кумулянтов случайной величины $\xi_0 - a$ и имеющий радиус сходимости $R_1 > 0$.

Лемма 2. Пусть случайная величина ξ_0 удовлетворяет условию Крамера.

(1) Тогда

$$\lim_{\substack{n, N \rightarrow \infty \\ \alpha_{nN} \rightarrow a \\ \sqrt{N}(\alpha_{nN} - a) \rightarrow -\infty}} \frac{\mathbf{P} \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} \xi_i \leq n - r \right\}}{\mathbf{P} \left\{ \sum_{i=1}^N \xi_i \leq n \right\}} = 1. \quad (32)$$

(2) Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что $\alpha_{nN} \rightarrow a$ и $\sqrt{N}(\alpha_{nN} - a) \rightarrow -\infty$. Тогда

$$\mathbf{P}\{A_{nN}\} = -\exp \left(-N \left(\frac{(\alpha_{nN} - a)^2}{2\sigma^2} - \frac{(\alpha_{nN} - a)^3}{\sigma^3} \lambda \left(\frac{\alpha_{nN} - a}{\sigma} \right) \right) \right) \times \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi N}(\alpha_{nN} - a)} (1 + o(1)). \quad (33)$$

Доказательство. Пусть $x = \alpha_{nN} - a$. По теореме о больших уклонениях

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} \xi_i \leq n - r \right\} / \mathbf{P} \left\{ \sum_{i=1}^N \xi_i \leq n \right\} \\ &= \frac{\mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\sigma \sqrt{N-1}} \sum_{i=1}^{N-1} (\xi_i - a) \leq \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{N}{N-1}} \sqrt{N} \left(x + \frac{a-r}{N} \right) \right\}}{\mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\sigma \sqrt{N}} \sum_{i=1}^N (\xi_i - a) \leq \frac{1}{\sigma} x \sqrt{N} \right\}} \\ &= \frac{\Phi \left(\frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{N}{N-1}} \sqrt{N} \left(x + \frac{a-r}{N} \right) \right)}{\Phi \left(\frac{1}{\sigma} x \sqrt{N} \right)} \\ & \quad \times \frac{\exp \left(N \left(\frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{N}{N-1}} \left(x + \frac{a-r}{N} \right) \right)^3 \lambda \left(\frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{N}{N-1}} \left(x + \frac{a-r}{N} \right) \right) \right)}{\exp \left(N \left(\frac{1}{\sigma} x \right)^3 \lambda \left(\frac{1}{\sigma} x \right) \right)} (1 + o(1)) \\ &= A_1 A_2 (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (34)$$

Используя аппроксимацию (см. [13], (5.63)) при $x \rightarrow -\infty$

$$\Phi(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-x^2/2} \left(1 + O \left(\frac{1}{x^2} \right) \right), \quad (35)$$

получаем, что

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi} \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{N}{N-1}}} \sqrt{N} \left(x + \frac{a-r}{N}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{\sigma} \sqrt{N} x\right)} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma} \sqrt{N} x\right)^2\right) (1+o(1))} \\
 &\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{N}{N-1}} \sqrt{N} \left(x + \frac{a-r}{N}\right)\right)^2\right) (1+o(1)) \\
 &= \exp\left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma} \sqrt{N} x\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{N}{N-1}} \sqrt{N} \left(x + \frac{a-r}{N}\right)\right)^2\right) (1+o(1)) \\
 &= \exp\left(\frac{N}{2\sigma^2} \left(x^2 - \left(x + \frac{a-r}{N}\right)^2\right)\right) (1+o(1)) \\
 &= \exp\left(\frac{1}{2\sigma^2} (a-r) \left(2x + \frac{a-r}{N}\right)\right) (1+o(1)) = 1 + o(1). \tag{36}
 \end{aligned}$$

По определению $\lambda(\cdot)$,

$$\begin{aligned}
 \ln(A_2) &= N \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\left(\frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{N}{N-1}} \left(x + \frac{a-r}{N}\right) \right)^{k+3} - \left(\frac{1}{\sigma} x \right)^{k+3} \right) \\
 &= \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\frac{N}{N-1}}{\sqrt{\frac{N}{N-1}} + 1} x + \sqrt{\frac{N}{N-1}} (a-r) \right) \\
 &\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{i=0}^{k+2} \left(\frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{N}{N-1}} \left(x + \frac{a-r}{N}\right) \right)^{k+2-i} \left(\frac{1}{\sigma} x \right)^i.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 |\ln(A_2)| &\leq \frac{1}{\sigma} \left| \frac{\frac{N}{N-1}}{\sqrt{\frac{N}{N-1}} + 1} x + \sqrt{\frac{N}{N-1}} (a-r) \right| \\
 &\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| (k+3) \left(\frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{N}{N-1}} \left(|x| + \frac{|a-r|}{N}\right) \right)^{k+2}.
 \end{aligned}$$

Радиус сходимости ряда

$$\lambda_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| (k+3) t^{k+2}$$

есть $R_1 > 0$. Таким образом,

$$|\ln(A_2)| = o(1), \quad A_2 = \exp(o(1)) = 1 + o(1). \tag{37}$$

Используя в (34) оценки (36) и (37), получаем (32).

Используя (35), вычисления в (34), и (31) с $y = \sqrt{N}(\alpha_{nN} - a)/\sigma$, получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{A_{nN}\} &= -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi N}(\alpha_{nN} - a)} \exp\left(-\frac{N(\alpha_{nN} - a)^2}{2\sigma^2}\right) \\ &\quad \times \exp\left(N\left(\frac{1}{\sigma}(\alpha_{nN} - a)\right)^3 \lambda\left(\frac{\alpha_{nN} - a}{\sigma}\right)\right) (1 + o(1)) \\ &= -\exp\left(-N\left(\frac{(\alpha_{nN} - a)^2}{2\sigma^2} - \frac{(\alpha_{nN} - a)^3}{\sigma^3} \lambda\left(\frac{\alpha_{nN} - a}{\sigma}\right)\right)\right) \\ &\quad \times \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi N}(\alpha_{nN} - a)} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Рассмотрим функции L , m , σ^2 , определенные в (25). Если $\mathbf{P}(\xi_0 = 0) > 0$, то $m(\lambda)$ есть непрерывная строго возрастающая функция такая, что

$$m(0) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} m(\lambda) = a.$$

Пусть

$$\alpha_{nN} < a, \quad h = m^{-1}(a - \alpha_{nN}).$$

Лемма 3. Предположим, что $\mathbf{P}(\xi_0 = 0) > 0$. Пусть $0 < \varepsilon < \infty$. Тогда при $n, N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_N = n\} &= \frac{1}{\sigma(h)\sqrt{2\pi N}} L^N(h) e^{-hN(a - \alpha_{nN})} (1 + O(1/N)), \\ \mathbf{P}\{S_N \leq n\} &= \frac{1}{\sigma(h)\sqrt{2\pi N}} L^N(h) e^{-hN(a - \alpha_{nN})} (1 - e^{-h})^{-1} (1 + O(1/N)) \end{aligned}$$

равномерно относительно $\alpha_{nN} \in [\varepsilon, a - \varepsilon]$. В частности,

$$\frac{\mathbf{P}\{S_N \leq n\}}{\mathbf{P}\{S_N = n\}} = (1 - e^{-h})^{-1} (1 + o(1)). \quad (38)$$

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{aligned} \{\omega \in \Omega: S_N(\omega) \leq n\} &= \left\{ \omega \in \Omega: N(a - \alpha_{nN}) \leq \sum_{i=1}^N (a - \xi_i(\omega)) \right\}, \\ \{\omega \in \Omega: S_N(\omega) = n\} &= \left\{ \omega \in \Omega: N(a - \alpha_{nN}) = \sum_{i=1}^N (a - \xi_i(\omega)) \right\}. \end{aligned}$$

Поэтому лемма 3 следует из результатов работы [14] (см. также [12]).

Доказательство теоремы 1. Из (9) следует, что либо ξ' есть (невырожденная) p -устойчивая случайная величина, либо ξ' есть константа. Если ξ' является p -устойчивой случайной величиной, то ее функция распределения F произвольное число раз дифференцируема (см. [5]). Следовательно, она равномерно непрерывна. Если ξ' есть константа, то $F(x) = 1$ при $x \geq C - \delta$ для некоторого $0 < \delta < \infty$. Поэтому в обоих случаях существует

$0 < \delta < \infty$ такое, что $F(x)$, $x \in [C - \delta, \infty)$ есть равномерно непрерывная функция, причем $F(C - \delta) > 0$. Пусть $\alpha_{nN} \in [a + C B_N / N, \infty)$. Тогда в силу (8)

$$C - \delta < \frac{N-1}{B_{N-1}} \left(\alpha_{n(N-1)} - a - \frac{r}{N-1} \right),$$

$$C - \delta < \frac{N}{B_N} (\alpha_{nN} - a)$$

для достаточно больших n и N . Пусть

$$Q_{nN} = \frac{\mathbf{P} \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} \xi_i \leq n - r \right\}}{\mathbf{P} \left\{ \sum_{i=1}^N \xi_i \leq n \right\}}.$$

Поэтому, если ξ' есть константа, то

$$Q_{nN} = \frac{\mathbf{P} \left\{ \frac{1}{B_{N-1}} \sum_{i=1}^{N-1} (\xi_i - a) \leq \frac{N-1}{B_{N-1}} \left(\alpha_{n(N-1)} - a - \frac{r}{N-1} \right) \right\}}{\mathbf{P} \left\{ \frac{1}{B_N} \sum_{i=1}^N (\xi_i - a) \leq \frac{N}{B_N} (\alpha_{nN} - a) \right\}} = \frac{1 + o(1)}{1 + o(1)}. \quad (39)$$

Теперь рассмотрим случай, когда ξ' есть p -устойчивая случайная величина. В силу (9),

$$Q_{nN} = \frac{\mathbf{P} \left\{ \frac{1}{B_N} \sum_{i=1}^{N-1} (\xi_i - a) \leq \frac{N}{B_N} \left(\alpha_{nN} - a - \frac{r-a}{N} \right) \right\}}{\mathbf{P} \left\{ \frac{1}{B_N} \sum_{i=1}^N (\xi_i - a) \leq \frac{N}{B_N} (\alpha_{nN} - a) \right\}}$$

$$= \frac{F \left(\frac{N}{B_N} (\alpha_{nN} - a - \frac{r-a}{N}) \right) + o(1)}{F \left(\frac{N}{B_N} (\alpha_{nN} - a) \right) + o(1)}.$$

Следовательно,

$$|1 - Q_{nN}| \leq \frac{\left| F \left(\frac{N}{B_N} (\alpha_{nN} - a - \frac{r-a}{N}) \right) - F \left(\frac{N}{B_N} (\alpha_{nN} - a) \right) \right| + o(1)}{F(C - \delta) + o(1)}. \quad (40)$$

Используя либо (39), либо (40) и равномерную непрерывность F , получаем, что $Q_{nN} \rightarrow 1$, если $n, N \rightarrow \infty$ так, что $a + C B_N / N \leq \alpha_{nN}$. Поэтому

$$\lim_{\substack{n, N \rightarrow \infty \\ a + C B_N / N \leq \alpha_{nN}}} \frac{1}{N} \mathbf{E} \mu_{nN} = \lim_{\substack{n, N \rightarrow \infty \\ a + C B_N / N \leq \alpha_{nN}}} p_r \frac{\mathbf{P} \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} \xi_i \leq n - r \right\}}{\mathbf{P} \left\{ \sum_{i=1}^N \xi_i \leq n \right\}} = p_r. \quad (41)$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Из (9), в силу непрерывности F , следует, что существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $\mathbf{P}\{A_{nN}\} > F(C)/2$ для $n, N > n_0$, $a + CB_N/N \leq \alpha_{nN}$.

Используя эти неравенства и лемму 1, получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n, N > n_0 \\ a + CB_N/N < \alpha_{nN} < d_1}} \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{1}{N} \mu_{nN} - \mathbf{E} \frac{1}{N} \mu_{nN} \right| > \varepsilon \right\} &\leq \sum_{\substack{n, N > n_0 \\ a + CB_N/N < \alpha_{nN} < d_1}} \frac{C_1}{\mathbf{P}(A_{nN})} e^{-\varepsilon^2 N / (16s_r^2)} \\ &\leq \sum_{\substack{n, N > n_0 \\ aN + CB_N < n < d_1 N}} \frac{2C_1}{F(C)} e^{-\varepsilon^2 N / (16s_r^2)} \\ &\leq \sum_{N > n_0} \frac{2C_1}{F(C)} (d_1 - a + |C|) N e^{-\varepsilon^2 N / (16s_r^2)} < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, по лемме Бореля–Кантелли,

$$\frac{\mu_{nN}}{N} - \frac{\mathbf{E} \mu_{nN}}{N} \rightarrow 0 \quad \text{почти наверное,} \quad (42)$$

при $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$a + C \frac{B_N}{N} < \alpha_{nN} < d_1.$$

Из (41) и (42) следует, что $\mu_{nN}/N \rightarrow p_r$ почти наверное при $n, N \rightarrow \infty$ так, что $a + CB_N/N < \alpha_{nN} < d_1$.

Доказательство следствия 1. По закону больших чисел Колмогорова, (9) выполнено при $B_N = N$ и $\xi' = 0$. Поэтому мы можем применить теорему 1.

Доказательство следствия 2. Заметим, что по центральной предельной теореме соотношение (9) выполнено с $B_N = \sqrt{N}$ и гауссовской случайной величиной ξ' с ожиданием 0 и дисперсией σ^2 . Поэтому, применяя теорему 1, получаем утверждение следствия.

Доказательство теоремы 2. Следствие 1 влечет справедливость первой части.

Докажем вторую часть. Пусть $n, N \rightarrow \infty$ так, что $\alpha_{nN} \rightarrow a$, $\sqrt{N}(\alpha_{nN} - a) \rightarrow -\infty$. Тогда, в силу первой части леммы 2,

$$\lim_{\substack{n, N \rightarrow \infty \\ \alpha_{nN} \rightarrow a \\ \sqrt{N}(\alpha_{nN} - a) \rightarrow -\infty}} \frac{1}{N} \mathbf{E} \mu_{nN} = \lim_{\substack{n, N \rightarrow \infty \\ \alpha_{nN} \rightarrow a \\ \sqrt{N}(\alpha_{nN} - a) \rightarrow -\infty}} p_r \frac{\mathbf{P} \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} \xi_i \leq n - r \right\}}{\mathbf{P} \left\{ \sum_{i=1}^N \xi_i \leq n \right\}} = p_r. \quad (43)$$

Пусть $1 > \varepsilon > 0$. Так как $n, N \rightarrow \infty$ так, что $\alpha_{nN} \rightarrow a$, $\sqrt{N}(\alpha_{nN} - a) \rightarrow -\infty$, то существует $n_0 \in \mathbb{N}$ со свойствами:

- (1) $|\alpha_{nN} - a| < \varepsilon$ для всех $n, N > n_0$;
- (2) $\sqrt{N}(\alpha_{nN} - a) < -1$ для всех $n, N > n_0$;
- (3) $\frac{(\alpha_{nN} - a)^2}{2\sigma^2} + \frac{(\alpha_{nN} - a)^3}{\sigma^3} \lambda \left(\frac{\alpha_{nN} - a}{\sigma} \right) < \frac{\varepsilon^2}{32s_r^2}$ для всех $n, N > n_0$.

Тогда, в силу леммы 1 и второй части леммы 2, для $n, N > n_0$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n, N > n_0} \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{\mu_{nN}}{N} - \frac{\mathbf{E} \mu_{nN}}{N} \right| \geq \varepsilon \right\} \\
 & \leq \sum_{\substack{n, N > n_0 \\ |\alpha_{nN} - a| < \varepsilon}} \frac{C \sqrt{2\pi N} (\alpha_{nN} - a) e^{-\varepsilon^2 N / (16s_f^2)}}{-\exp \left(-N \left(\frac{(\alpha_{nN} - a)^2}{2\sigma^2} + \frac{(\alpha_{nN} - a)^3}{\sigma^3} \lambda \left(\frac{\alpha_{nN} - a}{\sigma} \right) \right) \right) \sigma} \\
 & \leq \sum_{\substack{n, N > n_0 \\ N(a - \varepsilon) < n < (a + \varepsilon)N}} \frac{C_1 \sqrt{2\pi N}}{\sigma} e^{-\varepsilon^2 N / (32s_f^2)} (1 + o(1)) \\
 & \leq \frac{C_1 \sqrt{2\pi}}{\sigma} \sum_{N=n_0}^{\infty} 2\varepsilon N^{3/2} e^{-\varepsilon^2 N / (32s_f^2)} < \infty.
 \end{aligned}$$

Следовательно, по лемме Бореля–Кантелли

$$\frac{1}{N} \mu_{nN} - \mathbf{E} \frac{1}{N} \mu_{nN} \rightarrow 0$$

почти наверное, если $n, N \rightarrow \infty$ так, что $\alpha_{nN} \rightarrow a$, $\sqrt{N}(\alpha_{nN} - a) \rightarrow -\infty$. Поэтому, в силу (43),

$$\frac{\mu_{nN}}{N} = \frac{\mu_{nN}}{N} - \mathbf{E} \frac{\mu_{nN}}{N} + \mathbf{E} \frac{\mu_{nN}}{N} \rightarrow p_r \quad \text{почти наверное,} \quad (44)$$

если $n, N \rightarrow \infty$ так, что $\alpha_{nN} \rightarrow a$, $\sqrt{N}(\alpha_{nN} - a) \rightarrow -\infty$. В силу (44), существует $\Omega_1 \subset \Omega$ такое, что $\mathbf{P}\{\Omega_1\} = 1$ и для всех $\omega \in \Omega_1$ $\mu_{nN}(\omega)/N \rightarrow p_r$, если $n, N \rightarrow \infty$ так, что $\alpha_{nN} \rightarrow a$, $\sqrt{N}(\alpha_{nN} - a) \rightarrow -\infty$.

По следствию 2, существует такое $\Omega_2 \subset \Omega$, что $\mathbf{P}\{\Omega_2\} = 1$ и для всех $\omega \in \Omega_2$

$$\frac{\mu_{nN}(\omega)}{N} \rightarrow p_r \quad (45)$$

если $n, N \rightarrow \infty$ так, что $\alpha_{nN} \rightarrow a$, $\sqrt{N}(\alpha_{nN} - a) \geq -m$ для произвольного фиксированного $m \in \mathbf{N}$. Пусть $\Omega_3 = \Omega_1 \cap \Omega_2$. Тогда $\mathbf{P}\{\Omega_3\} = 1$. Предположим, что $\omega \in \Omega_3$ и $\alpha_{nN} \rightarrow a$ при $n, N \rightarrow \infty$. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $\omega \in \Omega_1$, существуют $m, n_1 \in \mathbf{N}$ и $\delta_1 > 0$, зависящие от ω (то есть $m = m(\omega)$, $n_1 = n_1(\omega)$ и $\delta_1 = \delta_1(\omega)$) такие, что, если $\sqrt{N}(\alpha_{nN} - a) < -m$, $n, N > n_1$, и $|\alpha_{nN} - a| < \delta_1$, то $|\mu_{nN}(\omega)/N - p_r| < \varepsilon$. Так как $\omega \in \Omega_2$, существуют $n_2 \in \mathbf{N}$ и $\delta_2 > 0$, зависящие от ω и m (то есть $n_2 = n_2(\omega, m)$ и $\delta_2 = \delta_2(\omega, m)$) такие, что, если $\sqrt{N}(\alpha_{nN} - a) \geq -m$, $n, N > n_2$, и $|\alpha_{nN} - a| < \delta_2$, то

$$\left| \frac{1}{N} \mu_{nN}(\omega) - p_r \right| < \varepsilon.$$

Введем обозначения

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2), \quad n_0 = \max(n_1, n_2).$$

Следовательно, если $n, N > n_0$ и $|\alpha_{nN} - a| < \delta$, то

$$\left| \frac{1}{N} \mu_{nN}(\omega) - p_r \right| < \varepsilon.$$

Таким образом, (11) выполнено.

Докажем третью часть. Пусть

$$0 < \varepsilon < \min\{\alpha, a - \alpha\}.$$

По лемме 3, при $n, N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\frac{1}{N} \mu_{nN} \right) &= p_r \frac{\mathbf{P}\{S_{N-1} \leq n - r\}}{\mathbf{P}\{S_N \leq n\}} \\ &= p_r \frac{\mathbf{P}\{S_{N-1} = n - r\}}{\mathbf{P}\{S_N = n\}} (1 + o(1)) \\ &= \mathbf{E} \left(\frac{1}{N} \mu'_{nN} \right) (1 + o(1)) \end{aligned} \quad (46)$$

равномерно по $\alpha_{nN} \in [\varepsilon, a - \varepsilon]$. Согласно теореме 4.4 из [7],

$$\lim_{n, N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbf{E} \mu'_{nN} = p_r(\theta),$$

где $\tilde{m}^{-1}(\alpha) = \theta < R$. Поэтому

$$\lim_{n, N \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E} \mu_{nN}}{N} = p_r(\theta). \quad (47)$$

Заметим, что μ_{nN}/N имеет дисперсию

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^2 \left(\frac{1}{N} \mu_{nN} \right) &= \frac{1}{N} p_r \frac{\mathbf{P}\{S_{N-1} \leq n - r\}}{\mathbf{P}\{S_N \leq n\}} + \frac{N(N-1)}{N^2} (p_r)^2 \frac{\mathbf{P}\{S_{N-2} \leq n - 2r\}}{\mathbf{P}\{S_N \leq n\}} \\ &\quad - \left(p_r \frac{\mathbf{P}\{S_{N-1} \leq n - r\}}{\mathbf{P}\{S_N \leq n\}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{N} \mathbf{E} \left(\frac{1}{N} \mu_{nN} \right) + \left(1 - \frac{1}{N} \right) \mathbf{E} \left(\frac{1}{N} \mu_{nN} \right) \mathbf{E} \left(\frac{1}{N} \mu_{(n-r)(N-1)} \right) \\ &\quad - \left(\mathbf{E} \left(\frac{1}{N} \mu_{nN} \right) \right)^2. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу (47),

$$\lim_{\substack{n, N \rightarrow \infty \\ \alpha_{nN} \rightarrow \alpha}} \mathbf{D}^2 (\mu_{nN}/N) = (p_r(\theta))^2 - (p_r(\theta))^2 = 0. \quad (48)$$

Из (47) и (48) следует (12).

По теореме Муавра–Лапласа

$$\binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N s_r}} e^{-u^2/2} (1 + o(1)), \quad (49)$$

при $N \rightarrow \infty$ и $u = (k - N p_r)/(s_r N^{1/2})$, принадлежащим ограниченному фиксированному интервалу, где

$$s_r^2 = p_r(1 - p_r).$$

Доказательство теоремы 4. Можно получить (20) из (19), если применить (49) и (15) к случайным величинам ξ_i и $\xi_i^{(r)}$.

По закону больших чисел Колмогорова, $\mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} \leq n - kr\} \rightarrow 0$ при $n, N \rightarrow \infty$ равномерно по $d < \alpha_{nN} < d_1$. Используя это соотношение, (15) и (49), получим (21) из (19).

Доказательство теоремы 5. Утверждение теоремы получается из (19), если применить (49) и (16) к случайным величинам ξ_i и $\xi_i^{(r)}$.

Доказательство теоремы 6. Утверждение теоремы получается из (19) и (18), если применить (38) к случайным величинам ξ_i и $\xi_i^{(r)}$.

Доказательство теоремы 7. В силу теоремы 5, достаточно доказать, что равномерно по $d < \alpha_{nN} < d_1$ при $n, N \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\mu'_{nN} = k\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}\sigma_{rr}} e^{-u^2/2} (1 + o(1)),$$

где

$$u = \frac{k - Np_r(\theta_{nN})}{\sigma_{rr} N^{1/2}}$$

принадлежит фиксированному ограниченному интервалу. Но распределение μ'_{nN} не зависит от θ (см. теорему 1.3.1 в [10]). Поэтому мы можем взять $\theta = \theta_{nN}$ таким, что $\tilde{m}(\theta_{nN}) = \alpha_{nN}$. Далее достаточно повторить доказательство теоремы 1.3.1.

Доказательство теоремы 8. Пусть $k \in \mathbf{N}_0$. В силу пуассоновской предельной теоремы,

$$\binom{N}{k} p_r^k (1 - p_r)^{N-k} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} (1 + o(1)). \quad (50)$$

Из условия $Np_1(\theta) \rightarrow \lambda$ следует, что $\theta \rightarrow 0$. Поэтому

$$B(\theta) = b_0 + o(1), \quad \theta = \frac{b_0 \lambda + o(1)}{Nb_1}.$$

Следовательно, по теореме 2 в [7]

$$\mathbf{P}\{S_N \leq n\} = \left(\sum_{l=0}^n \frac{\lambda^l e^{-\lambda}}{l!} \right) (1 + o(1)). \quad (51)$$

Так как $\mathbf{P}\{\xi_0^{(1)} = 1\} = 0$, мы заключаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_{N-k}^{(1)} > n - k\} &\leq \mathbf{E}S_{N-k}^{(1)} \leq N\mathbf{E}\xi_0^{(1)} \\ &= N \frac{\frac{b_2}{b_0} \left(\frac{b_0 \lambda + o(1)}{Nb_1} \right)^2}{1 - \frac{b_1}{b_0} \frac{b_0 \lambda + o(1)}{Nb_1}} (1 + o(1)) = o(1), \quad 0 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\mathbf{P}\{S_{N-k}^{(1)} \leq n - k\} = 1 + o(1), \quad 0 \leq k \leq n.$$

Используя это соотношение, (50) и (51) в (19), получаем (27). С другой стороны,

$$\mathbf{P}\{S_{N-k}^{(1)} \leq n - k\} = 0, \quad n < k.$$

Доказательство теоремы 9. Так как

$$B(\theta) = b_0 + o(1), \quad \theta = \left(\frac{r!(b_0\lambda + o(1))}{Nb_r} \right)^{1/r},$$

справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_N > n\} &\leq \frac{1}{n} \mathbf{E}S_N = \frac{N}{n} \mathbf{E}\xi_0 \\ &= \frac{N}{n} \frac{b_1}{b_0} \left(\frac{r!(b_0\lambda + o(1))}{Nb_r} \right)^{1/r} (1 + o(1)) = o(1), \\ \mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} > n - kr\} &\leq \frac{1}{n - kr} \mathbf{E}S_{N-k}^{(r)} \leq \frac{N - k}{n - kr} \mathbf{E}\xi_5^{(r)} \\ &= \frac{N - k}{n - kr} \frac{\frac{b_1}{b_0} \left(\frac{r!(b_0\lambda + o(1))}{Nb_r} \right)^{1/r} (1 + o(1))}{1 - \frac{1}{b_0} \frac{b_0\lambda + o(1)}{N}} = o(1). \end{aligned} \quad (52)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_N \leq n\} &= 1 + o(1), \\ \mathbf{P}\{S_{N-k}^{(r)} \leq n - kr\} &= 1 + o(1). \end{aligned}$$

Используя эти оценки и (50) в (19), получаем (28).

Список литературы

1. Chuprunov A. N., Fazekas I., Inequalities and strong laws of large numbers for random allocations. *Acta Math. Hungar.* (2005) **109**, 163–182.
2. Chuprunov A. N., Fazekas I., An inequality for moments and its applications to the generalized allocation scheme. *Publ. Math. Debrecen* (2010) **76**, 271–286.
3. Chuprunov A. N., Fazekas I., An exponential inequality and strong limit theorems for conditional expectations. *Period. Math. Hungar.* (2010) **61**, 103–120.
4. Erdős P., Rényi A., On the evolution of random graphs. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* (1960) **5**, 17–61.
5. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин*. Гостехиздат, Ленинград–Москва, 1949.
6. Колчин А. В., Предельные теоремы для обобщенной схемы размещения. *Дискретная математика* (2003) **15**, №4, 143–157.

7. Колчин А. В., Колчин В. Ф., О переходе распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с одной решетки на другую в обобщенной схеме размещения. *Дискретная математика* (2006) **18**, №4, 113–127.
8. Колчин А. В., Колчин В. Ф., Переход с одной решетки на другую распределений сумм случайных величин, встречающихся в обобщенной схеме размещения. *Дискретная математика* (2007) **19**, №3, 15–21.
9. Колчин В. Ф., Один класс предельных теорем для условных распределений. *Литовский матем. сб.* (1968) **8**, №1, 53–63.
10. Колчин В. Ф., *Случайные графы*. Физматлит, Москва, 2004.
11. Павлов Ю. Л., *Случайные леса*. Карельский НЦ РАН, Петрозаводск, 1996.
12. Петров В. В., О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин. *Теория вероятностей и ее применения* (1965) **10**, №2, 310–322.
13. Петров В. В., *Суммы независимых случайных величин*. Наука, Москва, 1972.
14. Розовский Л. В., Вероятности больших уклонений для некоторых классов распределений, удовлетворяющих условию Крамера. *Записки научных семинаров ПОМИ* (2003) **298**, 161–185.

Статья поступила 18.05.2011.