Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Куракин, Функция переноса в первый разряд в кольце
Галуа, *Дискрет. матем.*, 2012, том 24, выпуск 2, 21–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1181>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 16:24:55

Функция переноса в первый разряд в кольце Галуа

© 2012 г. В. Л. Куракин

В кольце Галуа $R = GR(q^n, p^n)$ вводится общее понятие координатного множества по аналогии с координатным множеством $\{0, \dots, p-1\}$ примарного кольца вычетов $\mathbf{Z}_{p^n}$. Любое такое множество B позволяет однозначно представить каждый элемент $a \in R$ в виде

$$a = \sum_{s \in \{0, \dots, n-1\}} b_s p^s, \quad b_s \in B,$$

и каждую функцию $U: R^k \rightarrow R$ в виде функции $F: B^m \rightarrow R$, $m = kn$. Последняя, в свою очередь, представляется в виде

$$F(b_1, \dots, b_m) = \sum_{s \in \{0, \dots, n-1\}} F_s(b_1, \dots, b_m) p^s,$$

где $F_s: B^m \rightarrow B$ — функция, называемая функцией переноса функции U в s -й разряд. Каждая из этих функций представляется многочленом над полем $GF(q)$. В данной работе изучаются свойства многочлена F_1 в зависимости от способа выбора координатного множества B . Наиболее подробно рассматривается случай, когда U — аффинная функция $R = \mathbf{Z}_{p^n}$ и $B = \{0, \dots, p-1\}$. При этом обнаруживается интересная зависимость вида функции переноса от свойства числа p быть регулярным.

1. Координатные множества колец Галуа

Кольцом Галуа называется конечное коммутативное локальное кольцо R , максимальный идеал которого равен pR для некоторого простого числа p (см. [7–11]). Кольцо Галуа однозначно, с точностью до изоморфизма, определяется своей характеристикой p^n и числом элементов q^n , где $q = p^r$, и обозначается $GR(q^n, p^n)$. Примерами колец Галуа являются примарные кольца вычетов $\mathbf{Z}_{p^n} = GR(p^n, p^n)$ и конечные поля $GF(q) = GR(q, p)$.

Множество обратимых элементов кольца R имеет вид $R^* = R \setminus pR$, и поле вычетов $\bar{R} = R/pR$ является полем из q элементов: $\bar{R} = GF(q)$. Образ элемента $a \in R$ при действии естественного эпиморфизма $R \rightarrow \bar{R}$ будем обозначать через $\bar{a}$, и образ многочлена $F(x) \in R[x]$ при действии естественного эпиморфизма $R[x] \rightarrow \bar{R}[x]$ будем обозначать $\bar{F}(x)$. Будем писать, что $a \equiv b \pmod{p^s}$, если $a - b \in p^s R$. Очевидно, что $a \equiv b \pmod{p}$ тогда и только тогда, когда $\bar{a} = \bar{b}$. Кольцо Галуа $R = GR(q^n, p^n)$, $q = p^r$, изоморфно факторкольцу $\mathbf{Z}_{p^n}[x]/G(x)$, где $G(x)$ — произвольный унитарный многочлен степени r над $\mathbf{Z}_{p^n}$ такой, что многочлен $\bar{G}(x)$ неприводим над полем $\mathbf{Z}_{p^n}/p\mathbf{Z}_{p^n} = GF(p)$.

Известно, что каждый элемент c кольца $\mathbf{Z}_{p^n}$ может быть однозначно представлен в виде суммы

$$c = c_0 + pc_1 + \dots + p^{n-1}c_{n-1}, \quad 0 \leq c_s \leq p-1, \quad s \in \{0, 1, \dots, n-1\}. \quad (1)$$

Это разложение называется p -ичным разложением элемента c . Элементы произвольного кольца Галуа R имеют аналогичное разложение, в котором множество $\{0, 1, \dots, p-1\}$ заменяется координатным множеством кольца Галуа.

Подмножество $B \subset R$ называется координатным множеством кольца Галуа R , если $0 \in B$ и элементы множества B образуют полную систему вычетов по модулю идеала pR , то есть, $\bar{B} = \bar{R}$. Аналогично утверждению 1 в [8], доказывается, что каждый элемент $c \in R$ однозначно представляется в виде

$$c = c_0 + pc_1 + \dots + p^{n-1}c_{n-1}, \quad c_s \in B, \quad s \in \{0, 1, \dots, n-1\},$$

называемом разложением элемента c в координатном множестве B . Отображение

$$\gamma_s^B: R \rightarrow B, \quad \gamma_s^B(c) = c_s, \quad s \in \{0, 1, \dots, n-1\},$$

называется s -й координатной функцией множества B в координатном множестве B , а элементы $c_s = \gamma_s^B(c) \in B$ называются координатами элемента c в координатном множестве B .

Введем на множестве B операции

$$a \oplus b = \gamma_0^B(a + b), \quad a \otimes b = \gamma_0^B(ab), \quad a, b \in B. \quad (2)$$

Тогда $(B, \oplus, \otimes) = GF(q)$ — поле, изоморфное $\bar{R}$, причем изоморфизм задается соотношениями

$$\varphi: B \rightarrow \bar{R}, \quad \varphi(\alpha) = \bar{\alpha}, \quad \alpha \in B.$$

Двумя важными примерами координатных множеств являются p -адическое и p -ичное координатные множества. В силу леммы 3 в [8], множество

$$\Gamma(R) = \{c \in R: c^q = c\}$$

является координатным множеством кольца Галуа R , которое называется p -адическим координатным множеством. Из определения следует, что множество $\Gamma(R)$ замкнуто относительно умножения. Поэтому операция умножения $\otimes$ на $\Gamma(R)$, определенная в (2), совпадает с операцией умножения в кольце R . Координатные функции в p -адическом координатном множестве обозначаются через γ_s , то есть

$$\gamma_s^{\Gamma(R)} = \gamma_s.$$

Если $R = \mathbf{Z}_{p^n}$, то множество

$$B_p = \{0, 1, 2, \dots, p-1\} \subset \mathbf{Z}_{p^n}$$

называется p -ичным координатным множеством кольца $\mathbf{Z}_{p^n}$. Разложение элемента в p -ичном координатном множестве совпадает с p -ичным разложением 1.

Пусть $U: R^k \rightarrow R$ — произвольное отображение и $\vec{a} = (a_1, \dots, a_k) \in R^k$. Тогда элемент $U(a_1, \dots, a_k) \in R$ представляется в виде

$$U(\vec{a}) = U_0(\vec{a}) + pU_1(\vec{a}) + \dots + p^{n-1}U_{n-1}(\vec{a}), \quad U_s(\vec{a}) \in B, \quad s \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Отображение $U_s = \gamma_s^B(U): R^k \rightarrow B$ называется s -й координатной функцией отображения U в координатном множестве B . Отображение $F_s: B^k \rightarrow B$, $F_s = U|B^k$, являющееся ограничением отображения $U_s: R^k \rightarrow B$ на множество B^k , будем называть функцией переноса в s -й разряд для отображения U в координатном множестве B . Таким образом, для любых $b_1, \dots, b_r \in B$

$$U(b_1, \dots, b_k) = F(b_1, \dots, b_k) = F_0(b_1, \dots, b_k) + \dots + p^{n-1} F_{n-1}(b_1, \dots, b_k),$$

где $F_s(b_1, \dots, b_k) \in B_s$, $s \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Например, пусть B есть p -ичное координатное множество кольца $\mathbb{Z}_{p^n}$, $F(a, b) = a + b$ — сумма элементов кольца. Тогда функции переноса

$$F_s(a, b) = \gamma_s^B(a + b)$$

задаются соотношениями

$$\begin{aligned} \gamma_0^B(a + b) &= a \oplus b, \\ \gamma_1^B(a + b) &= \begin{cases} 0, & \text{если } a + b < p, \\ 1, & \text{если } a + b \geq p, \end{cases} \\ \gamma_s^B(a + b) &= 0, \quad s \geq 2. \end{aligned}$$

Функция переноса в первый разряд при сложении изучалась в [4] (см. лемму 2.2).

Отметим, что изучение координатных функций отображения U в определенном смысле сводится к изучению функций переноса. Именно, пусть $U: R^k \rightarrow R$ и $(a_1, \dots, a_k) \in R^k$. Каждый элемент $a_i \in R$ запишем в виде

$$a_i = a_{i0} + pa_{i1} + \dots + p^{n-1}a_{i,n-1},$$

где $a_{ij} \in B$. Тогда

$$U(a_1, \dots, a_k) = F(a_{10}, \dots, a_{1,n-1}, \dots, a_{k0}, \dots, a_{k,n-1}),$$

и U можно рассматривать как отображение $F: B^{kn} \rightarrow R$. В таком случае координатную функцию $U_s(a_1, \dots, a_k)$ можно рассматривать как функцию переноса $F_s(a_{10}, \dots, a_{k,n-1})$.

Задача нахождения координатных функций и функций переноса возникает в ряде приложений, например, при построении псевдослучайных последовательностей из координатных последовательностей линейных рекуррент над кольцами Галуа [9, 4] и при исследовании нелинейных кодов, получаемых из линейных кодов над кольцами Галуа [8]. В данной работе найдена функция переноса в первый разряд $F_1 = \gamma_1^B(F)$ для произвольного отображения F в произвольном координатном множестве B кольца Галуа R .

2. Интерполяционный и характеристический многочлены координатного множества

Пусть $R = GR(q^n, p^n)$ — кольцо Галуа и $\Gamma(R) = \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{q-1}\}$ — его p -адическое координатное множество. Если $B = \{b_0, b_1, \dots, b_{q-1}\}$ — произвольное координатное множество кольца R , то всегда будем предполагать, что его элементы занумерованы в таком порядке, что

$$b_0 = 0, \quad b_t = \beta_t, \quad 0 \leq t \leq q-1. \quad (3)$$

Предложение 1. Для любого подмножества $B = \{b_0, b_1, \dots, b_{q-1}\} \subset R$, состоящего из q элементов, существует единственный многочлен

$$\Psi_B(x) = \psi_{q-1}x^{q-1} + \dots + \psi_1x + \psi_0 \in R[x]$$

такой, что

$$\Psi_B(\beta_t) = b_t, \quad 0 \leq t \leq q-1. \quad (4)$$

При этом

$$\Psi_B(x) = -b_0(x^{q-1} - e) + \frac{x}{q-1} \sum_{t=1}^{q-1} b_t(x^{q-2} + x^{q-3}\beta_t + \dots + x\beta_t^{q-3} + \beta_t^{q-2}). \quad (5)$$

Доказательство. В случае $R = \mathbb{Z}_{p^n}$ это утверждение доказано в [5]. В случае произвольного кольца Галуа R доказательство аналогично. А именно, коэффициенты многочлена $\Psi_B(x)$ являются решениями системы линейных уравнений над кольцом R

$$\begin{pmatrix} e & 0 & \dots & 0 \\ e & \beta_1 & \dots & \beta_1^{q-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e & \beta_{q-1} & \dots & \beta_{q-1}^{q-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_{q-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b + q - 1 \end{pmatrix}.$$

Определитель главной матрицы этой системы есть определитель Вандермонда, поэтому главная матрица системы обратима и система имеет единственное решение. Следовательно, многочлен $\Psi_B(x)$ существует и определен однозначно. Пользуясь соотношениями

$$\begin{aligned} x^{q-2} + x^{q-3}\beta_t + \dots + x\beta_t^{q-3} + \beta_t^{q-2} &= \frac{x^{q-1} - \beta_t^{q-1}}{x - \beta_t} = \frac{x^{q-1} - e}{x - \beta_t} \\ &= (x - \beta_1) \cdots (x - \beta_{t-1})(x - \beta_{t+1}) \cdots (x - \beta_{q-1}), \end{aligned}$$

где $0 \leq t \leq q-1$, легко убедиться в том, что многочлен в правой части соотношения (5) удовлетворяет условиям (4). Это доказывает (5).

Следствие 1. Если B — координатное множество кольца R , причем выполняется соотношение (3), то

$$\Psi_B(0) = 0, \quad \Psi_B(x) \equiv x \pmod{p}.$$

Равенство $\Psi_B(x) = x$ равносильно тому, что $B = \Gamma(R)$.

В условиях предложения 1 и следствия 1 многочлен $\Psi_B(x)$ будем называть интерполяционным многочленом (координатного) множества B . Следующий результат показывает, как с помощью интерполяционного многочлена можно вычислить нулевую координату элемента $a \in R$ в координатном множестве B .

Теорема 1. Для любого элемента $a \in R$ выполняется равенство

$$\gamma_0^B(a) = \Psi_B(a^{q^{n-1}}).$$

Доказательство. Пусть $\gamma_0(a) = \beta_t \in \Gamma(R)$, где $t \in \{0, 1, \dots, q-1\}$. В силу (3),

$$\gamma_0^B(a) = b_t.$$

Согласно лемме 4 в [8],

$$\gamma_0(a) = a^{q^{n-1}}.$$

Теперь, согласно предложению 1,

$$\gamma_0^B(a) = b_t = \Psi_B(\beta_t) = \Psi_B(\gamma_0(a)) = \Psi_B(a^{q^{n-1}}),$$

что и требовалось доказать.

Как следствие, получаем формулу для нулевой координатной функции произвольного отображения.

Следствие 2. Если $F: R^k \rightarrow R$ — произвольное отображение, то

$$\gamma_0^B(F(a_1, \dots, a_k)) = \Psi_B(F(a_1, \dots, a_k)^{q^{n-1}}).$$

Пусть $B = \{b_0, b_1, \dots, b_{q-1}\} \in R$ — подмножество кольца R , состоящее из q элементов. Многочлен

$$\chi_B(x) = x(x - b_1) \cdots (x - b_{q-1}) = x^q + \chi_{q-1}x^{q-1} + \dots + \chi_1x$$

над кольцом R будем называть характеристическим многочленом множества B . Если B — координатное множество, то, очевидно,

$$\chi_B(x) \equiv x^q - x \pmod{p},$$

и, по следствию 1,

$$\Psi_B(x) \equiv x \pmod{p}.$$

Обозначим через $\Psi_B^*(x)$ и $\chi_B^*(x)$ многочлены степеней не выше $q-1$ над кольцом R , удовлетворяющие соотношениям

$$\Psi_B(x) = x + p\Psi_B^*(x), \quad \chi_B(x) = x^q - x + p\chi_B^*(x). \quad (6)$$

Между интерполяционными и характеристическими многочленами имеется следующая связь.

Предложение 2. Если B — координатное множество кольца R , то

$$\Psi_B^* \equiv \chi_B^*(x) \pmod{p}.$$

Доказательство. По предложению 1,

$$b_t = \Psi_B(\beta_t) = \beta_t + p\Psi_B^*(\beta_t), \quad 0 \leq t \leq q-1.$$

С другой стороны,

$$b_t = b_t + \chi_B(b_t) = b_t + b_t^q - b_t + p\chi_B^*(b_t) = b_t^q + p\chi_B^*(b_t).$$

В силу леммы 4 из [8],

$$b_t^q \equiv \beta_t \pmod{p^2}.$$

Отсюда

$$\Psi_B^* \equiv \chi_B^*(b_t) \pmod{p}, \quad 0 \leq t \leq q-1.$$

С учетом (3) это означает, что

$$\bar{\Psi}_B^*(\bar{a}) = \bar{\chi}_B^*(\bar{a})$$

для любого $\bar{a} \in \bar{R}$. Так как степени многочленов $\Psi_B^*(x)$ и $\chi_B^*(x)$ не превосходят $q-1$, то

$$\bar{\Psi}_B^*(x) = \bar{\chi}_B^*(x).$$

Следствие 3. Если B — координатное множество кольца R , то коэффициенты многочленов $\Psi_B(x)$ и $\chi_B(x)$ с номерами $l \in \{2, \dots, q-1\}$ сравнимы по модулю p^2 :

$$\psi_l \equiv \chi_l \pmod{p^2}, \quad 2 \leq l \leq q-1.$$

3. Функция переноса в первый разряд

Пусть B — координатное множество кольца Галуа $R = GR(q^n, p^n)$, $F: B^k \rightarrow R$ — некоторое отображение и

$$F_s = \gamma_s^B(F): B^k \rightarrow B, \quad 0 \leq s \leq n-1,$$

— функция переноса в s -й разряд. Заметим, что для любой функции $G: B^k \rightarrow R$ такой, что

$$F_s(\vec{a}) \equiv G(\vec{a}) \pmod{p}, \quad \vec{a} \in B^k,$$

в силу теоремы 1 выполняется равенство

$$F_s = \Psi_B(G^{q^{n-1}}).$$

Поэтому достаточно вычислить функцию F_s по модулю p , другими словами, достаточно описать функцию $\bar{F}_s: B^k \rightarrow \bar{R}$.

Предложение 3. Произвольное отображение $F: B^k \rightarrow R$ является полиномиальным, то есть, существует многочлен $H(x_1, \dots, x_k)$ над кольцом R такой, что

$$F(\vec{a}) = H(\vec{a})$$

для любого $\vec{a} = (a_1, \dots, a_k) \in B^k$.

Доказательство. Для элемента $a \in B$ рассмотрим многочлен

$$I_a(x) = \prod_{b \in B \setminus a} \frac{x-b}{a-b}$$

над кольцом R . Так как B — координатное множество, то элементы $a-b$, где $b \in B \setminus a$, обратимы, и многочлен $I_a(x)$ определен корректно. Очевидно, что

$$I_a(c) = \begin{cases} 1, & c = a, \\ 0, & c \in B \setminus a. \end{cases}$$

Тогда для многочлена H , заданного интерполяционной формулой

$$H(x_1, \dots, x_k) = \sum_{(a_1, \dots, a_k) \in B^k} I_{a_1}(x_1) \cdots I_{a_k}(x_k) F(a_1, \dots, a_k),$$

выполняется условие $F(\vec{a}) = H(\vec{a})$, $\vec{a} \in B^k$.

С учетом предложения 3 будем считать, что отображение $F: B^k \rightarrow R$ задано многочленом $F = F(x_1, \dots, x_k) \in R[x_1, \dots, x_k]$. Тогда

$$F(x_1, \dots, x_k)^q \equiv F(x_1^q, \dots, x_k^q) \pmod{p}.$$

Обозначим через $F^*(x_1, \dots, x_k)$ многочлен над кольцом R , удовлетворяющий соотношению

$$F(x_1, \dots, x_k)^q = F(x_1^q, \dots, x_k^q) + pF^*(x_1, \dots, x_k). \quad (7)$$

Через $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ будем обозначать формальную частную производную многочлена F по переменной x_i , $1 \leq i \leq k$. Эти производные являются многочленами из $R[x_1, \dots, x_k]$. Через $\frac{\partial F}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_k)$ будем обозначать значение частной производной в точке $(a_1, \dots, a_k) \in R^k$.

Теорема 2. Пусть B — координатное множество кольца Галуа $R = GR(q^n, p^n)$ и

$$\Psi_B(x) = x + p\Psi_B^*(x)$$

— интерполяционный многочлен координатного множества B . Тогда функция переноса в первый разряд для функции $F(x_1, \dots, x_k)$ в координатном множестве B удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} \gamma_1^B(F(a_1, \dots, a_k)) &\equiv -F^*(a_1, \dots, a_k) + \sum_{i=1}^k \frac{\partial F}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_k) \Psi_B^*(a_i) \\ &\quad - \Psi_B^*(F(a_1, \dots, a_k)) \pmod{p}, \quad a_1, \dots, a_k \in B. \end{aligned} \quad (8)$$

Доказательство. Введем обозначение

$$F(a_1, \dots, a_k) = c.$$

По теореме 1,

$$\gamma_0^B(c) = \Psi_B(c^{q^{n-1}}) \equiv \Psi_B(c^q) = c^q + p\Psi_B^*(c^q) \equiv c^q + p\Psi_B^*(c) \pmod{p^2}. \quad (9)$$

Отсюда

$$p\gamma_1^B(c) \equiv c - \gamma_0^B(c) \equiv c - c^q - p\Psi_B^*(c) \pmod{p^2}, \quad c \in R.$$

Ввиду (7),

$$c^q = F(a_1^q, \dots, a_k^q) + pF^*(a_1, \dots, a_k).$$

Следовательно,

$$p\gamma_1^B(c) \equiv c - F(a_1^q, \dots, a_k^q) - pF^*(a_1, \dots, a_k) - p\Psi_B^*(F(a_1, \dots, a_k)) \pmod{p^2}.$$

Для доказательства формулы (8) остается проверить, что

$$F(a_1, \dots, a_k) - F(a_1^q, \dots, a_k^q) \equiv p \sum_{i=1}^k \frac{\partial F}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_k) \Psi_B^*(a_i) \pmod{p^2}.$$

Ввиду линейности частных производных, это соотношение достаточно доказать для случая, когда $F(a_1, \dots, a_k) = x_1^{m_1} \dots x_k^{m_k}$ — моном.

Так как $a_i \in B$, ввиду (9)

$$a_i = \gamma_0^B(a_i) \equiv a_i^q + p \Psi_B^*(a_i) \pmod{p^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} F(a_1, \dots, a_k) - F(a_1^q, \dots, a_k^q) &= a_1^{m_1} \dots a_k^{m_k} - (a_1^{m_1} \dots a_k^{m_k})^q \\ &\equiv (a_1^q + p \Psi_B^*(a_1))^{m_1} \dots (a_k^q + p \Psi_B^*(a_k))^{m_k} - (a_1^{m_1} \dots a_k^{m_k})^q \\ &\equiv p \sum_{i=1}^k a_1^{q m_1} \dots a_{i-1}^{q m_{i-1}} m_i a_i^{q(m_i-1)} \Psi_B^*(a_i) a_{i+1}^{q m_{i+1}} \dots a_k^{q m_k} \\ &\equiv p \sum_{i=1}^k a_1^{m_1} \dots a_{i-1}^{m_{i-1}} m_i a_i^{m_i-1} \Psi_B^*(a_i) a_{i+1}^{m_{i+1}} \dots a_k^{m_k} \\ &= p \sum_{i=1}^k \frac{\partial F}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_k) \Psi_B^*(a_i) \pmod{p^2}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Следствие 4. Если $B = \Gamma(R)$ — p -адическое координатное множество, то

$$\gamma_1(F(a_1, \dots, a_k)) = -F^*(a_1, \dots, a_k), \quad a_1, \dots, a_k \in \Gamma(R).$$

Доказательство. Согласно следствию 1,

$$\Psi_{\Gamma(R)}(x) = x.$$

Следовательно, $\Psi_{\Gamma(R)}^*(x) = 0$, и в формуле (8) остается только первое слагаемое.

Заметим, что первое слагаемое $-F^*(a_1, \dots, a_k)$ в формуле (8) не зависит от координатного множества B . Ввиду (9),

$$\gamma_0^B(c) \equiv \gamma_0(c) + p \Psi_B^*(c) \pmod{p^2}, \quad c \in R,$$

поэтому значение $\Psi_B^*(c)$ можно расценивать как отклонение элемента $\gamma_0^B(c)$ от $\gamma_0(c)$. При этом сумма в формуле (8) есть производная функции $F(x_1, \dots, x_k)$ в направлении вектора $(\Psi_B^*(a_1), \dots, \Psi_B^*(a_k))$.

Пользуясь теоремой 2, вычислим функции переноса в первый разряд в важных частных случаях — для операций сложения, умножения и вычисления линейной комбинации элементов $a_1, \dots, a_k$.

Предложение 4. Пусть $r = GR(q^n, p^n)$, $r = q/p$, B – координатное множество кольца R , $a_1, \dots, a_k \in B$ и $c_0, c_1, \dots, c_k \in R$. Тогда

$$\begin{aligned} \gamma_1^B(c_0 + c_1 a_1 + \dots + c_k a_k) &\equiv \gamma_1(c_0) + \sum_{i=1}^k \gamma_1(c_i) a_i \\ &+ \sum_{\substack{j_0 + j_1 + \dots + j_k = p \\ 0 \leq j_i < p}} \frac{1}{j_0! j_1! \dots j_k!} c_0^{r j_0} (c_1 a_1)^{r j_1} \dots (c_k a_k)^{r j_k} \\ &+ \sum_{i=1}^k c_i \Psi_B^*(a_i) - \Psi_B^*(c_0 + c_1 a_1 + \dots + c_k a_k) \pmod{p}. \end{aligned} \quad (10)$$

Доказательство. Применяя формулу (8) для многочлена

$$F(x_1, \dots, x_k) = c_0 + c_1 x_1 + \dots + c_k x_k,$$

видим, что последние два слагаемых в (8) совпадают с последними двумя слагаемыми в (10), и остается вычислить $F^*(a_1, \dots, a_k)$. Применяя полиномиальную формулу, получим, что

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_k)^q &= (c_0 + c_1 x_1 + \dots + c_k x_k)^q \\ &= c_0^q + c_1^q x_1^q + \dots + c_k^q x_k^q \\ &+ \sum_{\substack{j_0 + j_1 + \dots + j_k = p \\ 0 \leq j_i < p}} \frac{q!}{j_0! j_1! \dots j_k!} c_0^{j_0} (c_1 x_1)^{j_1} \dots (c_k x_k)^{j_k}. \end{aligned}$$

В силу теоремы Люка (см. теорему 4.71 в [1] или лемму 1 в [5]), при условиях $j_0 + j_1 + \dots + j_k = q$, $0 \leq j_1, \dots, j_k < q$, полиномиальный коэффициент $q!/(j_0! j_1! \dots j_k!)$ делится на p . При этом он не делится на p^2 тогда и только тогда, когда j_i делится на $r = q/p$ при всех $i = 0, 1, \dots, k$. Следовательно,

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_k)^q &\equiv c_0^q + c_1^q x_1^q + \dots + c_k^q x_k^q \\ &+ \sum_{\substack{j_0 + j_1 + \dots + j_k = q \\ 0 \leq j_i < q}} \frac{q!}{(r j_0)! (r j_1)! \dots (r j_k)!} c_0^{r j_0} (c_1 x_1)^{r j_1} \dots (c_k x_k)^{r j_k} \pmod{p^2}. \end{aligned}$$

По той же теореме Люка,

$$\binom{pa}{pb} \equiv \binom{a}{b} \pmod{p},$$

и по теореме Вильсона

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Поэтому

$$\frac{q!}{(r j_0)! (r j_1)! \dots (r j_k)!} \equiv \frac{p!}{j_0! j_1! \dots j_k!} \equiv -\frac{p}{j_0! j_1! \dots j_k!} \pmod{p^2}.$$

В итоге

$$F(x_1, \dots, x_k)^q \equiv c_0^q + c_1^q x_1^q + \dots + c_k^q x_k^q - p \sum_{\substack{j_0+j_1+\dots+j_k=q \\ 0 \leq j_i < q}} \frac{1}{j_0! j_1! \dots j_k!} c_0^{rj_0} (c_1 x_1)^{rj_1} \dots (c_k x_k)^{rj_k} \pmod{p^2}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} F(x_1^q, \dots, x_k^q) &= c_0 + c_1 x_1^q + \dots + c_k x_k^q \\ &= c_0^q + c_1^q x_1^q + \dots + c_k^q x_k^q + (c_0 - c_0^q) + (c_1 - c_1^q) x_1^q + \dots + (c_k - c_k^q) x_k^q. \end{aligned}$$

Ввиду леммы 4 в [8],

$$c^q \equiv \gamma_0(c) \pmod{p^2},$$

поэтому

$$c - c^q \equiv p\gamma_1(c) \pmod{p^2}, \quad c \in R.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} F(x_1^q, \dots, x_k^q) &\equiv c_0^q + c_1^q x_1^q + \dots + c_k^q x_k^q \\ &\quad + p\gamma(c_0) + p\gamma(c_1)x_1^q + \dots + p\gamma(c_k)x_k^q \pmod{p^2}. \end{aligned}$$

Теперь $F^*(x_1, \dots, x_k)$ вычисляется по формуле (7):

$$\begin{aligned} F^*(x_1, \dots, x_k) &\equiv -\gamma_1(c_0) - \sum_{i=1}^k \gamma_1(c_i) x_i^q \\ &\quad - \sum_{\substack{j_0+j_1+\dots+j_k=p \\ 0 \leq j_i < p}} \frac{1}{j_0! j_1! \dots j_k!} c_0^{rj_0} (c_1 x_1)^{rj_1} \dots (c_k x_k)^{rj_k} \pmod{p}. \end{aligned}$$

Подставляя выражение для F^* в формулу (8) и учитывая, что

$$a_i^q \equiv a_i \pmod{p},$$

получим соотношение (10).

Следствие 5. Пусть $a_1, \dots, a_k \in B$, где B — координатное множество кольца R . Тогда

$$\begin{aligned} \gamma_1^B(a_1 + \dots + a_k) &\equiv \sum_{\substack{j_1+j_2+\dots+j_k=p \\ 0 \leq j_i < p}} \frac{1}{j_1! j_2! \dots j_k!} a_1^{rj_1} \dots a_k^{rj_k} \\ &\quad + \sum_{i=1}^k \Psi_B^*(a_i) - \Psi_B^*(a_1 + \dots + a_k) \pmod{p}. \end{aligned}$$

В частности, если $a, b \in B$, то

$$\gamma_1^B(a + b) \equiv \sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{j! (p-j)!} a^{rj} b^{r(p-j)} + \Psi_B^*(a) + \Psi_B^*(b) - \Psi_B^*(a + b) \pmod{p}.$$

Наиболее компактные формулы получаются в случае p -адического координатного множества.

Следствие 6. Если $a_1, \dots, a_k \in \Gamma(R)$, то

$$\gamma_1(a_1 + \dots + a_k) \equiv \sum_{\substack{j_1 + j_2 + \dots + j_k = p \\ 0 \leq j_i < p}} \frac{1}{j_1! j_2! \dots j_k!} a_1^{rj_1} \dots a_k^{rj_k} \pmod{p}.$$

В частности, если $a, b \in \Gamma(R)$, то

$$\gamma_1(a + b) \equiv \sum_{j=1}^{p-1} \frac{1}{j! (p-j)!} a^{rj} b^{r(p-j)} \pmod{p}.$$

Доказательство. Для доказательства первого следствия нужно положить $c_0 = 0$, $c_1 = \dots = c_k = 1$ в предложении 4. Второе следствие получается, если учесть, что в случае $B = \Gamma(R)$ выполняется равенство $\Psi_{\Gamma(R)}^* = 0$.

Отметим, что формула для $\gamma_1(a + b)$ в случае p -адического и p -ичного координатных множеств была получена ранее (см. лемму 2.2 в [4]).

Если $R = \mathbb{Z}_{p^n}$, то $q = p$ и в формулах предложения 4 и его следствий нужно положить $r = 1$.

Предложение 5. Если $a_1, \dots, a_k \in B$, $c \in R = GR(q^n, p^n)$, то

$$\begin{aligned} \gamma_1^B(ca_1 \dots a_k) &\equiv \gamma_1(c)a_1 \dots a_k \\ &+ c \sum_{i=1}^k a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_k \Psi_B^*(a_i) - \Psi_B^*(ca_1 \dots a_k) \pmod{p}. \end{aligned}$$

В частности, если $a, b \in B$, то

$$\gamma_1^B(ab) \equiv a\Psi_B^*(b) + b\Psi_B^*(a) - \Psi_B^*(ab) \pmod{p}.$$

Доказательство. Пусть

$$F(x_1, \dots, x_k) = cx_1 \dots x_k.$$

Тогда

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_k)^q - F(x_1^q, \dots, x_k^q) &= (c^q - c)x_1^q \dots x_k^q \\ &\equiv (\gamma_0(c) - c)x_1^q \dots x_k^q \\ &\equiv -p\gamma_1(c)x_1^q \dots x_k^q \pmod{p^2}. \end{aligned}$$

Согласно (7),

$$F^*(x_1, \dots, x_k) \equiv -\gamma_1(c)x_1^q \dots x_k^q \pmod{p},$$

при этом

$$F^*(x_1, \dots, x_k) \equiv -\gamma_1(c)a_1 \dots a_k \pmod{p}.$$

Подставляя выражение для F^* в формулу (8), получаем требуемое соотношение.

Если в условиях предложения 5 $B = \Gamma(R)$, мы получим равенство

$$\tilde{\gamma}_1(ab) = 0.$$

Это согласуется с тем, что p -адическое координатное множество замкнуто относительно умножения.

4. Случай p -ичного координатного множества

Особый интерес представляет p -ичное координатное множество, поскольку оно наиболее часто используется на практике, а также обладает интересными свойствами с теоретической точки зрения.

Согласно теоремам 1 и 2, описание нулевой и первой координатных функций в координатном множестве B сводится к изучению интерполяционного многочлена $\Psi_B(x)$. Оказывается, что для p -ичного координатного множества свойства интерполяционного многочлена оказываются связанными с понятием простого регулярного числа. Всюду далее в этом параграфе $R = \mathbb{Z}_p^n$ и $B = \{0, 1, \dots, p-1\}$ — p -ичное координатное множество.

Пусть p — простое нечетное число. Введем обозначение

$$s_k(p) = 1^k + 2^k + \dots + (p-1)^k, \quad k \geq 1.$$

Выполняются соотношения (приведенные далее факты можно найти в [2])

$$p \mid s_k(p), \quad 1 \leq k \leq p-2; \quad p^2 \nmid s_1(p); \quad p^2 \mid s_{2a+1}(p), \quad 3 \leq 2a+1 \leq p-2.$$

Пара $(p, 2a)$, $2 \leq 2a \leq p-3$, называется иррегулярной, если $p^2 \nmid s_{2a}(p)$, в противном случае эта пара называется регулярной. Число иррегулярных пар называется индексом иррегулярности числа p и обозначается $ii(p)$. Например, пара $(37, 32)$ иррегулярна, так как $s_{32}(37)$ делится на 37^2 , и можно проверить, что $ii(37) = 1$. Если $ii(p) = 0$, то простое число p называется регулярным. Среди простых чисел $p < 100$ нерегулярны только 39, 59 и 67. Согласно гипотезе Зигеля (см. [2], с. 489), доля простых регулярных чисел среди всех простых чисел составляет $1/\sqrt{e} \approx 0,61$. В литературе принято другое определение регулярного простого числа — на языке числа классов дивизоров p -кругового поля, введенное Е. Куммером в середине XIX века в связи с доказательством великой теоремы Ферма. Куммер установил, что пара $(p, 2a)$ регулярна тогда и только тогда, когда числитель числа Бернулли B_{2a} не делится на p . Последнее свойство равносильно данному нами определению (см. [2]).

Теорема 3. Пусть $B = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ — p -ичное координатное множество кольца $R = \mathbb{Z}_p^n$, $p \geq 3$. Тогда коэффициенты интерполяционного многочлена

$$\Psi_B(x) = \psi_{p-1}x^{p-1} + \dots + \psi_1x \in R[x]$$

координатного множества B удовлетворяют соотношениям

$$\psi_1 \equiv 1 \pmod{p}, \quad \psi_3 \equiv \psi_5 \equiv \dots \equiv \psi_{p-2} \equiv 0 \pmod{p}, \quad (11)$$

$$\psi_2 \equiv \psi_4 \equiv \dots \equiv \psi_{p-3} \equiv 0, \quad \psi_{p-1} = \frac{1}{2}p, \quad (12)$$

и если $2 \leq 2a \leq p-3$, то $\psi_{p-2a} \equiv 0 \pmod{p^2}$ тогда и только тогда, когда $(p, 2a)$ — иррегулярная пара.

Доказательство. По следствию 1,

$$\Psi_B(x) \equiv x \pmod{p}.$$

Отсюда следуют соотношения (11).

Занумеруем элементы координатных множеств B и $\Gamma(R)$ в таком порядке, что $\beta_t \equiv t \pmod{p}$, $t = 0, 1, \dots, p-1$. Тогда $\beta_{p-t} = -\beta_t$, $t = 1, 2, \dots, p-1$, и из (5) получаем, что

$$\begin{aligned}\psi_l &= \frac{1}{p-1} \sum_{t=1}^{p-1} t \beta_t^{p-1-l} = \frac{1}{p-1} \sum_{t=1}^r (t \beta_t^{p-1-l} + (p-t) \beta_{p-t}^{p-1-l}) \\ &= \frac{1}{p-1} \sum_{t=1}^r (t \beta_t^{p-1-l} + (p-t)(-\beta_t)^{p-1-l}), \quad l \in \{2, 3, \dots, p-1\},\end{aligned}$$

где $r = (p-1)/2$. Пусть $l \in \{2, 3, \dots, p-1\}$ — четное число. Тогда

$$\begin{aligned}\psi_l &= \frac{1}{p-1} \sum_{t=1}^r p \beta_t^{p-1-l} = \frac{p}{2(p-1)} \sum_{t=1}^r (\beta_t^{p-1-l} + \beta_{p-t}^{p-1-l}) \\ &= \frac{p}{2(p-1)} \sum_{t=1}^{p-1} \beta_t^{p-1-l} = \frac{p}{2(p-1)} \sum_{t=1}^{p-1} \beta_*^{t(p-1-l)},\end{aligned}$$

где β_* — произвольный образующий мультипликативной группы $\Gamma(R) \setminus 0$ порядка $p-1$. Вычисляя сумму геометрической прогрессии и учитывая равенство

$$\beta_*^{p-1} = e,$$

получаем соотношения (12).

В силу следствия 3,

$$\psi_l \equiv \chi_l \pmod{p^2}, \quad l \in \{2, 3, \dots, p-1\}.$$

По определению характеристического многочлена $\chi_B(x)$,

$$\chi_l = (-1)^{p-l} \sigma_{p-l}(1, 2, \dots, p-1), \quad l \in \{1, 2, \dots, p-1\},$$

где $\sigma_r(1, 2, \dots, p-1)$ — элементарная симметрическая функция степени k от $p-1$ переменных. Воспользуемся формулами Ньютона, связывающими симметрические функции s_k и σ_k (см. [3], с. 264):

$$s_k - s_{k-1} \sigma_1 + s_{k-2} \sigma_2 - \dots + (-1)^{k-1} s_1 \sigma_{k-1} + (-1)^k k \sigma_k = 0, \quad k \in \{1, 2, \dots, p-1\}.$$

Подставим сюда вместо s_j , σ_j величины $s_j(p)$, $\sigma_j(1, 2, \dots, p-1)$. Так как

$$\sigma_l(1, 2, \dots, p-1) \equiv 0 \pmod{p}, \quad j \in \{1, 2, \dots, p-2\},$$

получим, что

$$s_k(p) \equiv 0 \pmod{p}, \quad k \in \{1, 2, \dots, p-2\}.$$

Учитывая это сравнение и вновь используя формулы Ньютона, получим, что

$$s_k(p) \equiv (-1)^{k+1} k \sigma_k(1, 2, \dots, p-1) \pmod{p^2}.$$

В итоге

$$\begin{aligned}\psi_l &\equiv \chi_l = (-1)^{p-l} \sigma_{p-l}(1, 2, \dots, p-1) \\ &\equiv (-1)^{p-l} (-1)^{p-l+1} \frac{1}{p-l} s_{p-l}(p) \\ &\equiv \frac{1}{l} s_{p-l}(p) \pmod{p^2}, \quad l \in \{2, 3, \dots, p-1\}.\end{aligned}$$

Следовательно, $\psi_{p-2a} \equiv 0 \pmod{p^2}$ тогда и только тогда, когда $p^2 \mid s_{2a}(p)$, то есть $(p, 2a)$ — иррегулярная пара.

Следствие 7. В условиях теоремы 3 соотношения $\psi_3 \not\equiv 0 \pmod{p^2}$, $\psi_5 \not\equiv 0 \pmod{p^2}$, $\dots$, $\psi_{p-2} \not\equiv 0 \pmod{p^2}$ выполняются тогда и только тогда, когда p — простое регулярное число.

В работах [5, 6] понятие простого регулярного числа появлялось при решении двух различных задач — при нахождении ранга p -ичного представления линейной рекуррентной последовательности (ЛРП) над полем $\mathbf{Z}_p$ и ранга первой координатной последовательности ЛРП максимального периода над кольцом $\mathbf{Z}_p$. Полученные выше результаты объясняют причину такого совпадения. Это связано не с какими-то общими свойствами ЛРП над полем $\mathbf{Z}_p$ и кольцом $\mathbf{Z}_{p^n}$, а с тем, что в обеих работах используется p -ичное координатное множество кольца $\mathbf{Z}_{p^n}$, свойства которого и связаны с регулярностью простого числа p .

Используем полученные результаты для уточнения вида функции переноса в первый разряд при сложении и умножении. Из следствия 5 следует, что если $a_1, \dots, a_k \in B$, то

$$\begin{aligned} \gamma_1^B(a_1 + \dots + a_k) &\equiv \sum_{\substack{j_1 + j_2 + \dots + j_k = p \\ 0 \leq j_i < p}} \frac{1}{j_1! j_2! \dots j_k!} a_1^{j_1} \dots a_k^{j_k} \\ &\quad + \sum_{l=1}^{p-1} \psi_l^*(a_1^l + \dots + a_k^l - (a_1 + \dots + a_k)^l) \pmod{p}. \end{aligned}$$

Согласно теореме 3, последнее равенство можно уточнить:

$$\begin{aligned} \gamma_1^B(a_1 + \dots + a_k) &\equiv \sum_{\substack{j_1 + j_2 + \dots + j_k = p \\ 0 \leq j_i < p}} \frac{1}{j_1! j_2! \dots j_k!} a_1^{j_1} \dots a_k^{j_k} \\ &\quad + \frac{1}{2}(a_1^{p-1} + \dots + a_k^{p-1} - (a_1 + \dots + a_k)^{p-1}) \\ &\quad + \sum_{\substack{2 \leq 2a \leq p-3 \\ (p, 2a) \text{ есть регулярная пара}}} \psi_{p-2a}^*(a_1^{p-2a} + \dots + a_k^{p-2a} - (a_1 + \dots + a_k)^{p-2a}) \pmod{p}, \end{aligned} \quad (13)$$

причем в последней сумме коэффициент ψ_{p-2a}^* при каждом слагаемом не сравним с нулем по модулю p . Аналогично, по предложению 5

$$\gamma_1^B(a_1 \dots a_k) \equiv \sum_{i=1}^k a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_k \Psi_B^*(a_i) - \Psi_B^*(a_1, \dots, a_k) \pmod{p}.$$

Отсюда с учетом теоремы 3 получаем, что

$$\begin{aligned} \gamma_1^B(a_1 \dots a_k) &\equiv \frac{1}{2} a_1 \dots a_k (a_1^{p-2} + \dots + a_k^{p-2} - (a_1 \dots a_k)^{p-2}) \\ &\quad + \sum_{\substack{2 \leq 2a \leq p-3 \\ (p, 2a) \text{ есть регулярная пара}}} \psi_{p-2a}^* a_1 \dots a_k (a_1^{p-2a-1} + \dots + a_k^{p-2a-1} - (a_1 \dots a_k)^{p-2a-1}) \pmod{p}. \end{aligned} \quad (14)$$

В частности, если p — регулярное простое число, то все пары $(p, 2a)$ регулярны, откуда следует, что

$$\begin{aligned} \gamma_1^B(a_1 + \dots + a_k) \equiv & \sum_{\substack{j_1 + j_2 + \dots + j_k \\ 0 \leq j_i < p}} \frac{1}{j_1! j_2! \dots j_k!} a_1^{j_1} \dots a_k^{j_k} \\ & + \frac{1}{2}(a_1^{p-1} + \dots + a_k^{p-1} - (a_1 + \dots + a_k)^{p-1}) \\ & + \sum_{\substack{3 \leq l \leq p-2 \\ l \text{ нечетно}}} \psi_l^*(a_1^l + \dots + a_k^l - (a_1 + \dots + a_k)^l) \pmod{p} \quad (15) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \gamma_1^B(a_1 \dots a_k) \equiv & \frac{1}{2} a_1 \dots a_k (a_1^{p-2} + \dots + a_k^{p-2} - (a_1 \dots a_k)^{p-2}) \\ & + \sum_{\substack{3 \leq l \leq p-2 \\ l \text{ нечетно}}} \psi_l^* a_1 \dots a_k (a_1^{l-1} + \dots + a_k^{l-1} - (a_1 \dots a_k)^{l-1}) \pmod{p}. \quad (16) \end{aligned}$$

Формулы (13) и (15) уточняют лемму 2.2 работы [4].

При использовании формул (13) и (14) оказывается полезной таблица иррегулярных пар для простых чисел $p < 8000$, которую можно найти в [2]. Для нахождения коэффициентов ψ_l^* проще всего использовать предложение 2 и его следствие.

Рассмотрим пример. Пусть $p = r$ и $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Тогда

$$a + b = a \oplus b + p\gamma_1^B(a + b),$$

где

$$a \oplus b = \gamma_0^B(a + b) = a + b \pmod{5}.$$

Рассмотрим характеристический многочлен

$$\begin{aligned} \chi_b(x) &= x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \\ &= x^5 - 10x^4 + 35x^3 - 50x^2 + 24x \\ &= x^5 - x + 5(-2x^4 + 7x^3 - 10x^2 + 5x). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\chi_b^*(x) = -2x^4 + 7x^3 - 10x^2 + 5x.$$

По предложению 2,

$$\Psi_B^*(x) \equiv \chi_B^*(x) \pmod{p},$$

поэтому

$$\Psi_B^*(x) \equiv 3x^4 + 2x^3 \pmod{5}.$$

Так как простое число 5 регулярно, то функция переноса в первый разряд $\gamma_1^B(a+b)$ выписывается непосредственно по формуле (15):

$$\begin{aligned}\gamma_1^B(a+b) &\equiv \sum_{j=1}^4 \frac{1}{j!(p-j)!} a^j b^{p-j} + \frac{1}{2}(a^4 + b^4 - (a+b)^4) + 2(a^3 + b^3 - (a+b)^3) \\ &\equiv 4ab^4 + 3a^2b^3 + 3a^3b^2 + 4a^4b + 3ab^3 \\ &\quad + 2a^2b^2 + 3a^3b + 4ab^2 + 4a^2b \pmod{5}.\end{aligned}$$

Аналогично,

$$ab = a \otimes b + p\gamma_1^B(ab),$$

где

$$a \otimes b = \gamma_0^B(ab) = ab \pmod{5},$$

а функция $\gamma_1^B(ab)$ выписывается по формуле (16):

$$\gamma_1^B(ab) \equiv 3(ab^4 + a^4b - a^4b^4) + 2(ab^3 + a^3b - a^3b^3) \pmod{5}.$$

Список литературы

1. Берлекэмп Э., *Алгебраическая теория кодирования*. Мир, Москва, 1971.
2. Борович З. И., Шафаревич И. Р., *Теория чисел*. Наука, Москва, 1985.
3. Кострикин А. И., *Введение в алгебру*. Наука, Москва, 1977.
4. Кузьмин А. С., Нечаев А. А., Линейные рекуррентные последовательности над кольцами Галуа. *Алгебра и логика* (1995) **4**, №4, 96–116.
5. Куракин В. Л., Представления над кольцом $\mathbf{Z}_p^n$ линейной рекуррентной последовательности максимального периода над полем $GF(p)$. *Дискретная математика* (1992) **4**, №4, 96–116.
6. Куракин В. Л., Первая координатная последовательность линейной рекурренты максимального периода над кольцом Галуа. *Дискретная математика* (1994) **6**, №2, 88–100.
7. Нечаев А. А., Конечные кольца главных идеалов. *Матем. сборник* (1973) **91**, №3, 350–336.
8. Нечаев А. А., Код Кердока в циклической форме. *Дискретная математика* (1989) **1**, №4, 123–139.
9. Kurakin V. L., Kuzmin A. S., Mikhalev A. V., Nechaev A. A., Linear recurring sequences over rings and modules. *J. Math. Sci.* (1995) **76**, №6, 2793–2915.
10. McDonald B. R., *Finite rings with identity*. Marcel Dekker, New York, 1974.
11. Nechaev A. A., Finite rings with applications. In: *Handbook of algebra*, **5** (Hazewinkel M., ed.). Elsevier, Amsterdam, 2008, pp. 217–320.

Статья поступила 1.02.2010.