Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Магомедов, Непрерывное учебное расписание с m , $m - 2$ или 2 уроками у преподавателей, *Дискрет. матем.*, 2012, том 24, выпуск 2, 37–45

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1182>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 12:36:55

Непрерывное учебное расписание с m , $m - 2$ или 2 уроками у преподавателей

© 2012 г. А. М. Магомедов

Рассматривается матрица из l строк и m столбцов с элементами из множества $\{0, 1, \dots, n\}$, $l > n$. Каждый столбец матрицы содержит множество $\{1, \dots, n\}$ и $l - n$ элементов, равных 0; число положительных элементов в каждой строке равно m , $m - 2$ или 2. Требуется преобразовать матрицу к такому виду, в котором каждая строка и каждый столбец сохраняют исходные наборы элементов, при этом в каждой строке положительные элементы размещены в подряд идущих ячейках. В статье исследованы условия, при которых такие преобразования возможны.

1. Введение

Нами исследуются условия существования расписаний специального вида. Как и в [1], предполагается, что граф может содержать кратные ребра и петли; в вопросах, относящихся к потокам в сетях, используется терминология книги [2].

Пусть заданы целые положительные числа l , m и n , $n < l$, пусть $N = \{1, \dots, n\}$, $L = \{1, \dots, l\}$, и пусть N_0 есть мультимножество, полученное добавлением $n - l$ нулей к множеству N . Для произвольного непустого подмножества Q множества $\{1, \dots, m\}$ обозначим через $P_Q^{l,m,n}$ класс таких $(l \times m)$ -матриц (l строк, m столбцов), каждый столбец которых содержит N_0 , а в каждой строке количество положительных элементов представлено элементом множества Q . Матрицы класса $P_Q^{l,m,n}$ будем называть расписаниями или $(l \times m)$ -расписаниями. Набор положительных элементов i -й строки расписания C обозначим $\omega_i(C)$. Два $(l \times m)$ -расписания C_1 и C_2 будем называть эквивалентными, если $\omega_i(C_1) = \omega_i(C_2)$ для всех $i \in L$.

Удобно интерпретировать L и N как множества преподавателей и учебных групп соответственно, а $M = \{1, \dots, m\}$ — как множество академических часов, отведенных расписанию. При $j \in N$ равенство $C_{i,k} = j$ для расписания C означает урок i -го преподавателя в j -й учебной группе в k -й час, а равенство $C_{i,k} = 0$ рассматривается как отсутствие у i -го преподавателя урока в k -й час.

Расписание C назовем непрерывным, если положительные элементы каждой строки расположены в подряд идущих ячейках.

Задача о непрерывном расписании. Пусть задано $(l \times m)$ -расписание C . Требуется ответить на вопрос, существует ли непрерывное расписание, эквивалентное C ?

Задача о непрерывном расписании является NP -полной [4] даже в том случае, когда количество положительных элементов в каждой строке не превышает $\lceil m/2 \rceil$.

Следующие два результата приведем в терминологии соответствующих работ. В [5] доказано, что задача построения оптимального по быстродействию расписания обслуживания множества требований тремя приборами NP -полна при следующем дополнительном ограничении на процесс обслуживания: если начат процесс обслуживания требования прибором, то это требование не может обслуживаться никаким другим прибором до завершения его обслуживания (возможно, с прерываниями) данным прибором. В [6, с. 199–200] доказано, что аналогичная задача без сформулированного выше дополнительного ограничения NP -полна при $l \geq 2$, если в процессе обслуживания каждого требования не допускаются задержки.

Преобразование расписания к эквивалентному непрерывному расписанию будем называть дефрагментацией.

В [7] приведена следующая интерпретация известной теоремы Петерсена [8] о 2-факторизации $2r$ -регулярного графа четной степени (здесь и далее r — целое положительное число).

Теорема 1. Для дефрагментации расписания класса $P_{\{2\}}^{l,m,n}$ необходимо и достаточно, чтобы m было четным.

Как показано в [9], при $q > 2$ условие $m \equiv 0 \pmod{q}$ необходимо, но не достаточно для дефрагментации расписаний класса $P_{\{q\}}^{l,m,n}$.

В данной статье получено обобщение теоремы 1, более точно, получены условия дефрагментации расписаний класса $P_{\{2,m-2,m\}}^{l,m,n}$.

Поскольку условия дефрагментации расписания C не зависят от порядка следования строк, условимся считать, что

$$|\omega_1(C)| \geq \dots \geq |\omega_l(C)|. \quad (1)$$

Мультимножество из k элементов будем называть k -мультимножеством, а строку расписания с k положительными элементами — k -строкой. Для мультимножеств ω_i , заданных на множестве N , и семейств Ω_k , образованных некоторыми ω_i , обозначим

$|\omega_i|$ количество элементов в ω_i ,

$|\Omega_k|$ количество мультимножеств в Ω_k ;

$|\omega_i|_j$ кратность элемента j в ω_i ,

$|\Omega|_\omega$ кратность ω в Ω ;

$$\|\Omega\|_j = \sum_{i: \omega_i \in \Omega} |\omega_i|_j.$$

Запись $\omega_1 \subseteq \omega_2$ означает, что $|\omega_1|_j \leq |\omega_2|_j$ для всех j , а запись $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ — выполнение неравенств $|\Omega_1|_\omega \leq |\Omega_2|_\omega$ для всех ω . Операцию объединения $\Omega_1 \cup \Omega_2$ определим следующим образом:

$$|\Omega_1 \cup \Omega_2|_\omega = |\Omega_1|_\omega + |\Omega_2|_\omega \quad \text{для всех } \omega.$$

Для расписания $C \in P_Q^{l,m,n}$ введем понятие ассоциированного двудольного ориентированного графа $G(C) = (X, Y, E)$: $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_l\}$, из вершины x_j к вершине y_i проведено $|\omega_i(C)|_j$ дуг.

В графе $G(C) = (X, Y, E)$, ассоциированном с расписанием $C \in P_{\{2, m-2, m\}}^{l, m, n}$, обозначим подмножества, образованные в множестве Y вершинами степени 2, $m-2$ и m , через Y_2 , Y_{m-2} и Y_m соответственно. Если E' — подмножество множества E , такое, что каждой вершине множества $X \cup Y_{m-2} \cup Y_m$ инцидентны $m-4$ ребра из E' , а каждой вершине множества Y_2 — либо 0, либо 2 ребра из E' , то порожденный множеством E' подграф графа $G(C)$ будем называть уплотнением графа $G(C)$.

Сформулируем результаты настоящей статьи.

Теорема 2. Пусть $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ и $B = \{\beta_{p+1}, \dots, \beta_{p+q}\}$ — семейства из, соответственно, $2r$ - и 2 -мультимножеств, заданных на N . Если

$$\|A \cup B\|_j = 2r, \quad j \in N, \quad (2)$$

то каждое α_i можно разбить на r 2 -мультимножеств $\alpha_i^1, \dots, \alpha_i^r$ (предразбиение) так, что семейство 2 -мультимножеств

$$R = \{\alpha_1^1, \dots, \alpha_1^r, \dots, \alpha_p^1, \dots, \alpha_p^r; \beta_{p+1}, \dots, \beta_{p+q}\}$$

допускает разбиение на r подсемейств $R_1, \dots, R_r$ (постразбиение), удовлетворяющих условиям: для каждого k , $1 \leq k \leq r$,

$$\begin{aligned} \|R_k\|_j &= 2, & j &\in N; \\ \alpha_i^k &\in R_k, & 1 &\leq i \leq p. \end{aligned} \quad (3)$$

Теорема 3. Любое расписание C из класса $P_{\{2, 2r\}}^{l, 2r, n}$ допускает дефрагментацию.

Теорема 4. Для дефрагментации расписания $C \in P_{\{2, m-2, m\}}^{l, m, n}$ необходимо и достаточно существование уплотнения у графа $G(C)$.

Теорема 4 и алгоритм проверки существования уплотнения у ассоциированного графа, построенный в разделе 4, являются основными результатами статьи. Теорема 2 (которая в дальнейшем называется аналогом теоремы Петерсена) и теорема 3 (которая является обобщением теоремы 1) участвуют в получении основного результата, а также представляют определенный самостоятельный интерес.

2. Аналог теоремы Петерсена

Полуфактором двудольного графа $G = (X, Y, E)$ называется 2 -регулярный подграф, порожденный множеством ребер $E' \subseteq E$ и включающий множество вершин X .

Доказательство теоремы 2. Мы используем подход из доказательства теоремы Петерсена, изложенного в [10, с. 34].

Построим двудольный граф $G = (X, Y, E)$, такой, что

- (1) $X = \{x_1, \dots, x_n\}$;
- (2) $Y = Y_A \cup Y_B$, где $Y_A = \{y_1, \dots, y_p\}$, $Y_B = \{y_{p+1}, \dots, y_{p+q}\}$;
- (3) для каждого $j \in N$ вершины x_j и y_i соединены $|\alpha_i|_j$ ребрами, если $y_i \in Y_A$, и $|\beta_i|_j$ ребрами, если $y_i \in Y_B$.

Заметим, что степени вершин множеств $X \cup Y_A$ и Y_B равны $2r$ и 2 соответственно.

Утверждение теоремы равносильно утверждению, что множество ребер E можно разбить на r реберно непересекающихся полуфакторов $E_1, \dots, E_r$.

Достаточно ограничиться рассмотрением связного графа. Поскольку каждая вершина графа G имеет четную степень, G содержит эйлеров цикл. Выбрав направление обхода цикла, получим ориентированный граф, в котором каждая вершина множества $X \cup Y_A$ имеет полустепени захода и исхода, равные r .

Каждую вершину $w \in X \cup Y_A$ заменим двумя вершинами w' и w'' и заменим каждую дугу (u, v) : при $u, v \in X \cup Y_A$ — дугой (u', v'') ; при $u \in X, v \in Y_B$ — дугой (u', v) ; и при $u \in Y_B, v \in X$ — дугой (u, v'') . Затем для каждой вершины $y \in Y_B$ выполним операцию спрямления: заменим дуги (u', y) и (y, v'') одной дугой (u', v'') , после чего удалим вершину y .

Получившийся двудольный граф является r -регулярным и может быть разложен на r совершенных паросочетаний. Обратной заменой каждой дуги (u', v'') , полученной в результате операции спрямления, вершиной y и дугами (u', y) , (y, v'') с последующим отождествлением вершин w' и w'' , соответствующих каждой вершине $w \in X \cup Y_A$, восстановим граф G . При этом r совершенных паросочетаний преобразуются в r полуфакторов, задающих требуемое разбиение E . Теорема доказана.

Лемма 1. Пусть $U = \{u_1, \dots, u_l\}$ является семейством 2-мультимножеств u_k , заданных на множестве N , и $\|U\|_j = 2$ для всех $j \in N$. Тогда существует расписание $C \in P_{\{2\}}^{l, 2, n}$, такое, что $\omega_k(C) = u_k$ для всех $k \in L$.

Доказательство. Положим сначала все элементы $(l \times 2)$ -матрицы C равными нулю. Построим граф $G = (V, E)$, где $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, а количество ребер, соединяющих вершины v_i и v_j , равно $|U|_{(i, j)}$, т.е. кратности вхождения 2-мультимножества (i, j) в семейство U . Каждая связная компонента графа G является гамильтоновым циклом; произвольно выберем направление его обхода, задавая тем самым ориентацию, а в процессе обхода выполним для каждой очередной дуги (v_i, v_j) следующие действия:

- (1) найти в семействе U 2-мультимножество u_k , равное (i, j) , и удалить его из U ;
- (2) присвоить элементу $C_{k,1}$ матрицы C значение i , а элементу $C_{k,2}$ — значение j .

В результате, $\omega_k(C) = u_k$ для всех $k \in L$, и каждый из двух столбцов C содержит каждый элемент из N точно один раз. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть p — количество $2r$ -строк в расписании $C \in P_{\{2, 2r\}}^{l, 2r, n}$, $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ — семейство соответствующих $2r$ -мультимножеств положительных элементов; обозначения q и $B = \{\beta_{p+1}, \dots, \beta_{p+q}\}$ имеют аналогичный смысл для 2-строк.

Поскольку каждое $j \in N$ входит (точно один раз) в каждый из $2r$ столбцов расписания, условие (2) теоремы 2 выполнено. Первое из соотношений (3) позволяет применить к каждому R_k (результату построения из теоремы 2) лемму 1, выбирая R_k в качестве U , и построить подматрицу, составленную в искомом непрерывном расписании столбцами $2k-1$ и $2k$, $k = 1, \dots, r$; при этом каждое 2-мультимножество из R_k размещается в той строке, откуда оно было выбрано в R_k (второе из соотношений (3) обеспечивает корректное размещение в $2r$ -строках). Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть p_1, p_2 и r — целые положительные числа, $p_1 \leq p_2$; $u_1, \dots, u_{p_1}$ — $2r$ -мультимножества, а 2 -мультимножества $u_{p_1+1}, \dots, u_{p_2}$ таковы, что

$$\|u_1, \dots, u_{p_1}; u_{p_1+1}, \dots, u_{p_2}\|_j = 2r, \quad j \in N.$$

Тогда существует непрерывное расписание $C \in P_{\{2,2r\}}^{p_2,2r,n}$, в котором

$$\omega_i(C) = u_i \quad \text{для всех } i \in \{1, \dots, p_2\},$$

причем элементы каждого 2-мультимножества размещаются либо в позициях 1 и 2, либо в позициях $2r - 1$ и $2r$.

3. Условия дефрагментации

Набор ячеек, содержащих все положительные элементы i -й строки непрерывного $(l \times m)$ -расписания, назовем активным участком (или i -участком), а активный участок m -строки или объединение нескольких активных участков, включающее из каждого столбца расписания точно одну ячейку, назовем M -участком.

Лемма 2. Набор ячеек, содержащих все ненулевые элементы непрерывного $(l \times m)$ -расписания C , можно представить в виде объединения непересекающихся M -участков.

Доказательство. Выберем в C произвольную строку i , в которой $C_{i,1} \in N$ (количество таких строк равно n), и обозначим i -участок через S , $p = |\omega_i(C)|$.

Для $p \neq m$ выполним следующие действия:

- (а) запомнить значение i в рабочей переменной i_1 (i_1 используется ниже для обоснования корректности алгоритма);
- (б) выбрать строку, в которой активный участок начинается в позиции $p + 1$, и запомнить номер строки в i ;
- (в) присоединить i -участок к S и придать p приращение, равное $|\omega_i(C)|$.

Корректность действия (б) нуждается в обосновании. Отсутствие выбираемой в данном действии строки означало бы, что каждая строка, содержащая положительный элемент в позиции $p + 1$, содержит положительный элемент также и в позиции p ; но отсюда и из включения $C_{i_1,p} \in N$ и равенства $C_{i_1,p+1} = 0$ следует, что положительных элементов в столбце p больше, чем в столбце $p + 1$, что противоречит определению расписания.

Таким образом, M -участок построен. Заменив элементы в ячейках M -участка на 0, получим матрицу с $n - 1$ положительными элементами в каждом столбце. Повторяя для нее предыдущие рассуждения, получим второй M -участок, и т.д. Лемма доказана.

Следствие 2. Положительные элементы в i -строке любого непрерывного расписания $C \in P_{\{2,m-2,m\}}^{l,m,n}$ размещаются:

- если $i = 2$, то при нечетном m в позициях 1 и 2 или $m - 1$ и m ; при четном m в позициях вида $2p - 1$ и $2p$, где p – некоторое целое положительное число;
- если $i = m - 2$, то в позициях $1, \dots, m - 2$ или в позициях $3, \dots, m$.

Обозначим общее количество m -строк и $(m - 2)$ -строк расписания $C \in P_{\{2,m-2,m\}}^{l,m,n}$ через l' . Пусть в семейство D_1 из каждой $(m - 2)$ -строки и каждой m -строки попадает одно мультимножество из $(m - 4)$ положительных элементов:

$$D_1 = \{\omega'_1, \dots, \omega'_{l'}\}, \quad |\omega'_i| = m - 4, \quad \omega'_i \subseteq \omega_i(C), \quad i = 1, \dots, l';$$

а в семейство D_2 — 2-мультимножества положительных элементов из некоторых 2-строк:

$$D_2 \subseteq \{\omega_{l'+1}(C), \dots, \omega_l(C)\}.$$

Семейство $\mu(C) = D_1 \cup D_2$ будем называть уплотнением расписания C , если

$$\|\mu(C)\|_j = m - 4 \quad \text{для всех } j \in N.$$

Замечание 1. Применяя лемму 2 к подматрице, образованной в непрерывном расписании столбцами $3, \dots, m-2$, в случае нечетного m приходим к выводу об отсутствии 2-строк в данной подматрице; следовательно, при нечетном m семейство D_2 пусто.

Замечание 2. Из следующих сопоставлений видно, что уплотнение расписания C существует тогда и только тогда, когда существует уплотнение графа $G(C)$:

- (1) набор из двух дуг (x_p, y_i) и (x_q, y_i) , инцидентных вершине $y_i \in Y_2$, входит в уплотнение графа $G(C)$ тогда и только тогда, когда 2-мультимножество i -й строки (p, q) включается в уплотнение расписания C ;
- (2) набор из $m-4$ дуг $(x_{i_1}, y_i), \dots, (x_{i_{m-4}}, y_i)$, инцидентных вершине $y_i \in Y_{m-2} \cup Y_m$, входит в уплотнение графа $G(C)$ тогда и только тогда, когда $(m-4)$ -мультимножество $\{i_1, \dots, i_{m-4}\}$ включается в уплотнение расписания C из i -й строки, содержащей m или $m-2$ положительных элементов.

Доказательство теоремы 4. Необходимость. Пусть существует дефрагментация расписания $C \in P_{\{2, m-2, m\}}^{l, m, n}$ и C^0 — непрерывное расписание, эквивалентное C . Докажем, что расписание C^0 обладает уплотнением. Пусть общее количество всех m -строк и $(m-2)$ -строк матрицы C^0 равно l' , а $\{i_1, \dots, i_{l'}\}$ — подмножество, образованное в множестве остальных строк 2-строками, в которых активный участок принадлежит множеству $\{3, \dots, m-2\}$ (согласно замечанию 1, при нечетном m это подмножество пусто).

Если для $i = 1, \dots, l'$ обозначить $\omega'_i = \{C_{i,3}^0, \dots, C_{i,m-2}^0\}$, то семейство $\{\omega'_1, \dots, \omega'_{l'}, \omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_{l''}}\}$ удовлетворяет определению уплотнения расписания C^0 , следовательно, и расписания C . Тогда (замечание 2) существует и уплотнение графа $G(C)$.

Достаточность. Пусть граф $G(C)$ обладает уплотнением; тогда существует и уплотнение расписания C . Построение искомого непрерывного расписания, эквивалентного C , начнем с выбора $(l \times m)$ -матрицы, все элементы которой равны нулю (обозначим эту матрицу через C^0).

Доказательство состоит из двух шагов, первый из которых разветвляется в зависимости от четности m .

Пусть сначала m нечетно. Из замечания 1 видно, что при нечетном m семейство D_2 в уплотнении расписания пусто. Тогда в уплотнении графа $G(C)$ отсутствуют ребра, инцидентные вершинам множества Y_2 . В $(m-4)$ -регулярном графе, полученном в результате удаления множества Y_0 из графа $G(C)$, разобьем множество ребер на совершенные паросочетания $E_1, \dots, E_{m-4}$. Для каждого E_k построим $(k+3)$ -й столбец эквивалентного непрерывного расписания C^0 , присваивая для каждого ребра $(x_j, y_i) \in E_k$ значение j элементу $C_{i,k+2}^0$, $k = 1, \dots, m-4$.

Пусть теперь m четно, p_1 — общее количество m -строк и $(m-2)$ -строк в расписании C , D_1 и D_2 — семейства из определения уплотнения расписания C , а I — множество номеров строк, из которых мультимножества выбраны в D_1 и D_2 . По определению уплотнения расписания,

$$\|D_1 \cup D_2\|_j = m - 4 \quad \text{для всех } j \in N.$$

Положим

$$r = \frac{m}{2} - 2, \quad p_2 = |D_1| + |D_2|,$$

и воспользуемся следствием 1. В результате получим непрерывное расписание класса $P_{\{2, m-4\}}^{p_2, m-4, n}$. Скопируем его в подматрицу, образованную в матрице C^0 элементами на пересечении столбцов с номерами из множества $\{3, \dots, m-2\}$ и строк с номерами из I .

Первый шаг завершен. Построена подматрица из $m-4$ столбцов, которая:

- (1) занимает в искомом непрерывном расписании столбцы с номерами $3, \dots, m-2$;
- (2) содержит в каждом столбце множество N_0 ;
- (3) из каждой m -строки и $(m-2)$ -строки матрицы C включает $(m-4)$ -мультимножество, при четном m может включать и 2-мультимножества из некоторых 2-строк матрицы C .

Таким образом, в каждой m -строке матрицы C осталось 4-мультимножество, не включенное в C^0 , в каждой $(m-2)$ -строке — 2-мультимножество; возможно, 2-мультимножества остались также и в некоторых 2-строках. Среди этих остаточных элементов каждое $j \in N$ встречается точно 4 раза.

На втором шаге из остаточных элементов требуется построить две подматрицы матрицы C^0 , образованные столбцами с номерами 1, 2 и $(m-1)$, m соответственно. Для этой цели воспользуемся следствием 1 (вторично в этом доказательстве, если m четно), где возьмем $r = 2$. Затем подматрицу из 1-го и 2-го столбцов полученной в следствии 1 матрицы (состоящей из 4-х столбцов) поместим в соответствующую подматрицу матрицы C^0 , а подматрицу из 3-го и 4-го столбцов — в подматрицу, составленную $(m-1)$ -м и m -столбцами матрицы C^0 . Теорема доказана.

4. Совершенный поток

Понятно, что теорему 4 необходимо дополнить эффективным способом проверки существования уплотнения расписания $C \in P_{\{2, m-2, m\}}^{l, m, n}$. Мы используем аппарат вычисления потоков в сетях в терминологии [2]. Верхнее и нижнее ограничения для значения $f(e)$ потока f (всюду подразумевается допустимый поток) по дуге e будем обозначать через $c(e)$ и $u(e)$ соответственно: $u(e) \leq f(e) \leq c(e)$. Поскольку везде далее $c(e)$ и $u(e)$ — целые положительные величины, можно полагать (в силу теоремы о целочисленности, [2]), что все рассматриваемые потоки целочисленные. Транспортная сеть $\Gamma(C)$

$$S_1 \circ \text{---} e_j \longrightarrow x_j \circ \text{---} e_{j,i} \longrightarrow y_i \circ \text{---} e_i \longrightarrow S_2$$

построена на основе графа $G(C)$ следующим образом:

- добавлен источник S_1 , который соединен с каждым узлом $x_j \in X$ дугой e_j^1 , $c(e_j^1) = u(e_j^1) = m-4$;
- ребра $e_{j,i} = (x_j, y_i)$ сориентированы от x_j к y_i , $c(e_{j,i}) = 1$, $u(e_{j,i}) = 0$;
- добавлен сток S_2 и каждый узел $y_i \in Y$ соединен с S_2 дугой e_i^2 ,
 - если $|\omega_i(C)| \neq 2$, то положим $c(e_i^2) = u(e_i^2) = m-4$,

- иначе при четном m положим $c(e_i^2) = 2$, $u(e_i^2) = 0$; при нечетном m положим $c(e_i^2) = u(e_i^2) = 0$.

Пару дуг $e' = (x_p, y_i)$ и $e'' = (x_q, y_i)$, инцидентных вершине $y_i \in Y_2$, назовем гомологичной парой. Поток f в сети $\Gamma(C)$ называется совершенным, если $f(e') = f(e'')$ для всех гомологичных пар дуг (e', e'') (с учетом целочисленности потока, $f(e') = f(e'') = 0$ или $f(e') = f(e'') = 1$); если для гомологичной пары дуг, инцидентных вершине $y_i \in Y_2$, выполняется соотношение $f(e') \neq f(e'')$, то вершину y_i назовем f -дефектом. Множество f -дефектов обозначим f_D .

Следующее следствие вытекает из теоремы 4 и очевидной аналогии между множеством дуг (x_j, y_i) графа $G(C)$, по которым значения потока f в сети $\Gamma(C)$ равны единице, и множеством ребер, образующих уплотнение в графе $G(C)$.

Следствие 3. Для дефрагментации расписания $C \in P_{\{2,m-2,m\}}^{l,m,n}$ необходимо и достаточно существование в сети $\Gamma(C)$ допустимого потока при нечетном m , и совершенного потока при четном m .

Способ проверки существования допустимого потока хорошо известен (см. [2]), поэтому остается рассмотреть случай четного m . В дальнейшем мы рассматриваем вопрос существования совершенного потока в сети $\Gamma(C)$ в предположении, что m четно.

В общем случае задача проверки существования потока заданной величины в сети с выделенным множеством гомологичных пар дуг является NP -полной (см. [11]). В [12] уточняется, что задача остается NP -полной и в том случае, если пропускные способности всех дуг сети равны 1. Покажем, что в нашем случае задача разрешима за полиномиальное время.

Рассмотрим индуцированное потоком f в сети $\Gamma(C)$ разбиение множества дуг E графа $G(C)$ на два непересекающихся множества:

$$f_k = \{e \in E \mid f(e) = k\}, \quad k = 0, 1.$$

Пусть v — внутренняя вершина некоторого пути T в графе $G(C)$. Будем говорить, что для вершины v выполнено свойство чередования, если из любых двух последовательных ребер пути T , инцидентных вершине v , одно принадлежит f_0 , а другое — f_1 ; если $Y_2^0 \subseteq Y_2$ — множество всех вершин графа $G(C)$, для которых свойство чередования нарушено, то путь T будем называть (Y_2^0, f) -чередующимся.

Теорема 5. Пусть f — поток в сети $\Gamma(C)$ и $f_D \neq \emptyset$. Если в сети $\Gamma(C)$ существует некоторый совершенный поток φ , то из произвольной вершины $y \in f_D$ найдется (Y_2^0, f) -чередующийся путь в множество $f_D \setminus \{y\}$.

Доказательство. Пусть φ — совершенный поток в сети $\Gamma(C)$. Для $i, j \in \{0, 1\}$ обозначим $\Psi_{i,j} = f_i \cap \varphi_j$; например, $\Psi_{0,1}$ — множество дуг графа $G(C)$, таких, что $f(e) = 0$, $\varphi(e) = 1$. Произведем преобразование графа $G(C)$, выполнив для каждой вершины $y \in Y_2$ графа $G(C)$, такой, что оба инцидентных ей ребра (x_p, y) и (x_q, y) принадлежат множеству $\Psi_{i,1-i}$, замену набора $(x_p, y), y, (x_q, y)$ на набор $(x_p, y'), y', (y', y''), y'', (x_q, y'')$; новые ребра (x_p, y') и (x_q, y'') формально отнесем к множеству $\Psi_{i,1-i}$, дугу (y', y'') — к множеству $\Psi_{1-i,i}$. Заметим, что в преобразованном графе среди ребер, инцидентных произвольной вершине $v \notin f_D$, имеется поровну ребер из $\Psi_{0,1}$ и $\Psi_{1,0}$.

Пусть y — произвольная вершина множества f_D , а $e_0 \in f_0$ и $e_1 \in f_1$ — ребра, инцидентные вершине y . Так как φ — совершенный поток, то либо $e_0, e_1 \in \varphi_0$, либо $e_0, e_1 \in \varphi_1$; в качестве начального звена искомого (Y_2^0, f) -чередующегося пути выберем

то из ребер e_0 и e_1 , вдоль которого сумма значений целочисленных потоков f и φ равна 1: в первом случае это e_1 , а во втором — e_0 .

Если несколько начальных звеньев $y, (y, u), u, \dots, (w, v), v$ пути уже построены: $u, \dots, v \notin f_D, (w, v) \in \Psi_{i,1-i}, i \in \{0, 1\}$, то очередное звено пути выбирается следующим образом. Поскольку среди ребер, инцидентных произвольной вершине $v \notin f_D \setminus \{y\}$, имеется поровну ребер из Ψ_{01} и Ψ_{10} , найдется ребро, инцидентное v и принадлежащее множеству $\Psi_{1-i,i}$. Это ребро и выбирается в качестве очередного звена пути.

Из вышесказанного следует, что путь может оборваться лишь в вершине множества $f_D \setminus \{y\}$. Теорема доказана.

Приведем алгоритм проверки существования совершенного потока в $\Gamma(C)$ в предположении, что в сети $\Gamma(C)$ существует допустимый поток f (в противном случае совершенный поток не существует).

Если $f_D = \emptyset$, **то** совершенный поток построен. Пусть $f_D \neq \emptyset$.

Пока $f_D \neq \emptyset$, **выполнять**: выбрать произвольную вершину $y_j \in f_D$;

если (Y_2^0, f) -чередующийся путь из y_j в множество $f_D \setminus \{y_j\}$ существует,

то поменять для дуг e пути значения $f(e)$ на $1 - f(e)$ и вырезать концевые вершины пути из f_D в Y_2^0 ,

иначе завершить алгоритм (в этом случае совершенный поток не существует).

Список литературы

1. Сачков В. Н., *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*. Наука, Москва, 1982.
2. Форд Л. Р., Фалкерсон Д. Р., *Потоки в сетях*. Мир, Москва, 1963.
3. Магомедов А. М., О вычислительной сложности частного случая задачи построения расписания. В сб.: *Тез. докл. X Международной матем. конф.*, 5. Ин-т математики НАН Беларуси, Минск, 2008, с. 92.
4. Магомедов А. М., *NP-полнота задачи построения непрерывного расписания для специализированных процессоров*. В сб.: *Труды 8-й Международной конф. «Дискретные модели в теории управляющих систем»*, Москва, 2009.
5. Cho Y., Sahni S., Preemptive scheduling of independent jobs with release and due times on open, flow and job shops. *Oper. Res.* (1981) **29**, 511–512.
6. Танаев В. С., Сотсков Ю. Н., Струсович В. А., *Теория расписаний. Многостадийные системы*. Наука, Москва, 1989.
7. Магомедов А. М., Уплотнение расписания с директивным сроком, кратным количеству занятий каждого преподавателя. *Матем. заметки* (2009) **85**, №1, 65–72.
8. Petersen J., Die Theorie der regularen Graphen. *Acta Math.* (1891) **15**, 193–220.
9. Магомедов А. М., К вопросу о реберной раскраске двудольного графа. *Дискретная математика* (2009) **21**, №2, 153–159.
10. Reinhard D., *Graph theory*. Springer, New York, 2000.
11. Sahni S., Computationally related problems. *SIAM J. Comput.* (1974) **3**, 262–279.
12. Гэри М., Джонсон Д., *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*. Мир, Москва, 1982.

Статья поступила 10.07.2009.

Переработанный вариант поступил 20.05.2011.