Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. П. Чухров, О соотношении тупиковых и минимальных комплексов граней в единичном кубе, *Дискрет. матем.*, 2012, том 24, выпуск 2, 46–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1183>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 13:40:33

О соотношении тупиковых и минимальных комплексов граней в единичном кубе

© 2011 г. И. П. Чухров

Рассматривается задача о соотношении тупиковых и минимальных дизъюнктивных нормальных форм или комплексов граней булевой функции, которая была поставлена С. В. Яблонским в связи с оценением сложности алгоритмов минимизации булевых функций. В работе исследуются комплексы граней, минимальные относительно класса мер сложности, для которых сложность комплекса уменьшается при удалении грани и не изменяется при замене некоторых граней на грани изоморфные относительно перестановки координат.

Для отношения числа тупиковых и минимальных комплексов граней функции для любой меры сложности из такого класса получена нижняя оценка логарифма вида $cn2^n$, где $c > 1,355 \cdot 2^{-7}$. При этом логарифм числа тупиковых комплексов может быть порядка $n2^n$ при единственном минимальном комплексе граней, если мера сложности удовлетворяет дополнительному условию: сложность комплекса уменьшается при уменьшении ранга любой грани.

Получены нижние оценки мощности классов функций, по порядку логарифма сравнимые с числом всех функций, для которых отношение числа тупиковых и минимальных комплексов, в том числе при условии единственного минимального комплекса, имеют порядок роста логарифма, равный $n2^n$.

1. Введение

Характерной чертой задачи минимизации булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм (далее д.н.ф.) (см. [1, 2, 3]), то есть построения для функции ее минимальной д.н.ф. относительно некоторой меры сложности, является возможность нахождения оптимального решения путем применения простых локальных упрощений: уменьшение ранга и удаление импликанты д.н.ф. Понятие сложности базируется на естественном представлении, что при уменьшении ранга или удалении импликанты сложность д.н.ф. не увеличивается. Число импликант и сумма рангов импликант в д.н.ф. являются простейшими мерами сложности.

Полиэкстремальность задачи минимизации булевой функции заключается в возможности существования большого числа локальных экстремумов, в роли которых выступают тупиковые д.н.ф., среди которых содержатся глобальные экстремумы — минимальные д.н.ф. При этом произвольная д.н.ф. может быть преобразована в эквивалентную тупиковую локальным алгоритмом 2-го порядка [1].

Эффективное решение задачи минимизации возможно для специальных классов функций, а именно, в тех случаях, когда известны структура и сложность минимальной д.н.ф.,

например, для монотонных, линейных и других ядровых функций, для цепных, циклических и симметрических функций. В общем случае, известные алгоритмы минимизации функций в качестве одного из этапов содержат перебор по определенной стратегии некоторого множества д.н.ф. и, в конечном итоге, гарантированно строят тупиковую д.н.ф. Естественно возникает вопрос о возможности получения в результате выполнения алгоритма минимальной д.н.ф. При этом отношение числа минимальных и тупиковых д.н.ф. является оценкой вероятности нахождения глобального экстремума, то есть минимальной д.н.ф.

Задача минимизации булевых функций обычно рассматривается в двух эквивалентных моделях — аналитической и геометрической. В аналитической модели используются понятия булевой функции, импликанты, д.н.ф. и т.д., зависящие от n переменных. В геометрической модели эквивалентными понятиями являются подмножества вершин, грани, комплексы граней и т.д., в n -мерном единичном кубе (см. с. 307 в [4]). В дальнейшем изложении будем использовать понятия и обозначения, связанные с гранями и множествами вершин единичного куба B^n , в следующей геометрической интерпретации.

Гранью единичного куба B^n называется множество вершин

$$B_{i_1, \dots, i_k}^{n, \sigma_1, \dots, \sigma_k} = \{\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n) \in B^n \mid x_{i_1} = \sigma_1, \dots, x_{i_k} = \sigma_k\},$$

где $\sigma_s \in \{0, 1\}$ для $s = 1, \dots, k$. Множество индексов $\{i_1, \dots, i_k\}$ называется направлением грани, число k называется рангом, и число $n - k$ называется размерностью грани. Множество всех вершин куба B^n является гранью ранга 0. Грань может быть представлена в виде $\{\tilde{x} \in B^n \mid \tilde{\alpha} \leq \tilde{x} \leq \tilde{\beta}\}$, где $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ — минимальная и максимальная вершины грани, при этом расстояние Хемминга $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ равно размерности грани. В таком представлении множество вершин грани называется интервалом размерности k .

Комплекс граней

$$M = \{I_r, r = 1, \dots, l\}$$

покрывает множество вершин

$$N_M = \bigcup_{r=1}^l I_r \subseteq B^n.$$

Комплексу граней M однозначно соответствует функция $f \in P_n$, для которой $N_M = N_f$, где N_f — множество единичных вершин функции в кубе B^n , то есть множество наборов значений переменных, на которых функция равна 1. Реализация булевой функции f в виде д.н.ф. эквивалентна покрытию гранями подмножества вершин $N_f \subset B^n$. Любой комплекс граней M , для которого $N_M = N_f$, называется комплексом граней функции f .

Два комплекса граней называются эквивалентными, если они покрывают одно подмножество вершин единичного куба B^n , то есть являются комплексами граней одной функции.

Для множества вершин $Q \subseteq B^n$ любая грань $I \subseteq Q$ называется допустимой гранью. Допустимая грань I для множества вершин $Q \subseteq B^n$ называется максимальной, если не существует такой грани I' , что $I \subset I' \subseteq Q$.

Комплекс граней M называется неприводимым, если после удаления из него любой грани получается комплекс граней не эквивалентный M . В неприводимом комплексе M каждая грань $I \in M$ содержит хотя бы одну вершину, которая не покрывается другими гранями из комплекса M . Такая вершина называется собственной вершиной грани I в неприводимом комплексе.

Комплекс граней M называется тупиковым, если он является неприводимым и все грани в нем являются максимальными для множества N_M .

Грань I называется ядровой для множества вершин $Q \subset B^n$, если она является максимальной для множества Q и существует вершина $\tilde{a} \in I$, которая не принадлежит никакой другой грани, максимальной для Q . Вершины ядровой грани I , которые не покрываются никакими другими максимальными для множества Q гранями, называются собственными вершинами ядровой грани I . Вершины ядровой грани, которые не являются собственными для ядровой грани, называются регулярными.

Комплекс граней M в кубе B^n называется ядровым, если любая грань комплекса M является ядровой для подмножества вершин $N_M \subset B^n$.

Переход к геометрической модели позволяет абстрагироваться от конкретного набора переменных д.н.ф. и перейти к размерности, то есть к числу переменных, и нумерации координат единичного куба. Это позволяет упростить понятие изоморфизма для комплексов граней по сравнению с д.н.ф., используемое при определении меры сложности.

Обозначим через π^n множество перестановок координат в единичном кубе B^n . Для перестановки $\pi \in \pi^n$ обозначим через $\pi(I)$ грань, которая получается из грани I перестановкой координат π , то есть

$$\pi(B_{i_1, \dots, i_k}^{n, \sigma_1, \dots, \sigma_k}) = B_{\pi(i_1), \dots, \pi(i_k)}^{n, \sigma_1, \dots, \sigma_k},$$

и через

$$\pi(M) = \{\pi(I_r), r = 1, \dots, l\}$$

обозначим комплекс граней, который получается из комплекса $M = \{I_r, r = 1, \dots, l\}$ перестановкой координат π во всех гранях комплекса.

Комплексы граней называются изоморфными в кубе B^n , если один комплекс может быть получен из другого комплекса перестановкой координат, то есть для комплексов граней M_1 и M_2 существует перестановка координат $\pi \in \pi^n$ такая, что

$$M_1 = \pi(M_2).$$

При этом грани являются изоморфными только тогда, когда они имеют одинаковую размерность и одинаковое число координат направления, для которых в вершинах грани значение равно 0, и, следовательно, одинаковое число координат направления, для которых в вершинах грани значение равно 1.

Д.н.ф. называются изоморфными, если одна д.н.ф. может быть получена из другой подстановкой переменных без отождествлений. При этом импликанты являются изоморфными только тогда, когда в них одинаковое число переменных без отрицания и с отрицанием, соответственно они имеют одинаковый ранг и размерность.

Изоморфизм аналитической и геометрической моделей основан на изоморфизме элементарных конъюнкций и граней единичного куба B^n . Элементарная конъюнкция $K = x_{i_1}^{\sigma_1} \dots x_{i_r}^{\sigma_r}$ изоморфна грани $B_K^n = B_{i_1, \dots, i_r}^{n, \sigma_1, \dots, \sigma_r}$, д.н.ф. $K_1 \vee \dots \vee K_s$ изоморфна комплексу граней $\{B_{K_j}^n, j = 1, \dots, s\}$.

Определение 1. Функционал $\mathcal{L}$, определенный на множестве всех комплексов граней (д.н.ф.), является мерой сложности, если он удовлетворяет следующим аксиомам (см. с. 298 в [4]).

- (1) *Аксиома неотрицательности:* $\mathcal{L}(M) \geq 0$ для любого комплекса M .

- (2) *Аксиома монотонности*: $\mathcal{L}(M \cup \{I\}) \geq \mathcal{L}(M \cup \{I'\})$ для любого комплекса M и любой грани I при условии $I \subset I'$.
- (3) *Аксиома выпуклости*: $\mathcal{L}(M_1 \cup M_2) \geq \mathcal{L}(M_1) + \mathcal{L}(M_2)$ для любого представления комплекса $M = M_1 \cup M_2$ в виде прямого объединения комплексов M_1 и M_2 , то есть не имеющих общих членов.
- (4) *Аксиома инвариантности относительно изоморфизма*: $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(\pi(M))$ для любого комплекса M и любой перестановки координат π .

Примерами мер сложности могут служить следующие функционалы (в терминах д.н.ф.): $\mathcal{L}_\vee$ — число дизъюнкций, $\mathcal{L}_\&$ — число конъюнкций, или $\mathcal{L}_-$ — число отрицаний в д.н.ф. Мера сложности, равная числу граней в комплексе M , то есть число импликант в д.н.ф. (функционал $\mathcal{L}_\vee + 1$), называется длиной и обозначается $l(M)$. Мера сложности, равная сумме рангов граней в комплексе M , то есть число переменных в д.н.ф. (функционал $\mathcal{L}_\vee + \mathcal{L}_\& + 1$), называется сложностью и обозначается $L(M)$. Мера сложности, которая соответствует функционалу $\alpha\mathcal{L}_\& + \beta\mathcal{L}_\vee$, где $\alpha + \beta > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, называется линейной сложностью и обозначается $L_{\alpha,\beta}(M)$.

Определение 2. Комплекс граней называется $\mathcal{L}$ -минимальным, если он имеет наименьшую меру сложности $\mathcal{L}$ среди всех эквивалентных комплексов граней. $\mathcal{L}$ -минимальному комплексу граней изоморфна $\mathcal{L}$ -минимальная д.н.ф. Кратчайшим называется l -минимальный комплекс, и минимальным называется L -минимальный комплекс.

Будем использовать следующие обозначения подмножеств вершин B^n :

$B_k^n = \{\tilde{x} \in B^n \mid \rho(\tilde{0}, \tilde{x}) = \|\tilde{x}\| = k\}$ есть k -й слой куба B^n ;

$S_{m-k,m}^n = \{\tilde{x} \in B^n \mid m-k \leq \|\tilde{x}\| \leq m\}$ есть пояс в кубе B^n , состоящий из слоев с номерами $m-k, \dots, m$, где $0 \leq k \leq m \leq n$.

Функция называется симметрической, если она не меняет значения при любой перестановке переменных (см. [2]). Функция называется поясковой, если множество единичных вершин функции в кубе B^n совпадает с поясом. Симметрическая функция однозначно представляется в виде набора поясковых функций, которые являются компонентами связности (см. [2]) симметрической функции.

Используемые, но не определяемые в этой статье понятия и определения можно найти в [1, 2, 4]. Через $\lfloor x \rfloor$ (соответственно $\lceil x \rceil$) будем обозначать целую часть (соответственно верхнюю целую часть) числа x . Под $\log$ всюду понимается логарифм по основанию 2. Асимптотические оценки числовых параметров в единичном кубе B^n всюду получаются при $n \rightarrow \infty$.

Для функции $f \in P_n$ будем обозначать

$\mathcal{T}(f)$ множество тупиковых комплексов граней функции;

$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}(f)$ множество $\mathcal{L}$ -минимальных комплексов граней функции;

$\tau(f)$ число тупиковых комплексов граней функции;

$\mu_{\mathcal{L}}(f)$ число $\mathcal{L}$ -минимальных комплексов граней функции;

$\chi_{\mathcal{L}}(f) = \tau(f)/\mu_{\mathcal{L}}(f)$ отношение числа тупиковых и $\mathcal{L}$ -минимальных комплексов граней функции.

Максимальные значения параметров $\tau(f)$, $\mu_{\mathcal{F}}(f)$ и $\chi_{\mathcal{F}}(f)$ на множестве функций P_n будем обозначать $\tau(n)$, $\mu_{\mathcal{F}}(n)$ и $\chi_{\mathcal{F}}(n)$. Будем использовать обозначения без указания меры сложности, например, $\chi(f)$ или $\chi(n)$ в утверждениях, которые справедливы одновременно для минимальных и кратчайших тупиковых комплексов.

Верхняя оценка для $\chi(n)$ является следствием очевидного соотношения $\chi(n) \leq \tau(n)$ и оценки числа тупиковых д.н.ф. функции (см. с. 110 в [2]):

$$\log \chi(n) \leq \log \tau(n) \lesssim n 2^n \log(3/2).$$

Нижние оценки для отношения числа тупиковых и минимальных д.н.ф. булевой функции последовательно улучшались в работах ряда авторов. Ю. И. Журавлев в [5] построил пример функции

$$f(x_1, \dots, x_n) = S_{1,2}^3(x_1, x_2, x_3)(x_4 \oplus \dots \oplus x_n),$$

для которой

$$\tau(f) = 5^{2^{n-4}}, \quad \mu(f) = 2^{2^{n-4}},$$

так как

$$\tau(S_{1,2}^3) = 5, \quad \mu(S_{1,2}^3) = 2,$$

то есть при $n > 4$

$$\chi(n) \geq \chi(f) = 2^{2^{n-4} \log(5/2)}.$$

Следующая нижняя оценка $\chi(n)$ явилась следствием результатов о числе минимальных и тупиковых д.н.ф. для почти всех функций $f \in P_n$ при $n \rightarrow \infty$. В. В. Глаголевым в [6] приведены оценки для почти всех функций длин сокращенной д.н.ф.

$$s(f) = 2^n n^{\log \log n (1+o(1))}$$

и кратчайшей д.н.ф.

$$\frac{2^{n-1}}{\log n \log \log n} \lesssim l(f) \lesssim \frac{2^{n-1}}{\log} \log n \log n,$$

из которых следует следующая верхняя оценка числа минимальных д.н.ф. для почти всех функций:

$$\log \mu(f) \leq \log \sum_{l \leq l(f)} \binom{s(f)}{l} \lesssim l(f) \log \frac{s(f)}{l(f)} \lesssim 2^{n-1} (\log \log n)^2.$$

А. А. Сапоженко в [7] показал, что

$$\log \tau(f) \sim \log n \log \log n 2^{n-1}$$

для почти всех функций. Так как

$$\log \mu(f) = o(\log \tau(f)), \quad \log \chi(f) \sim \log \tau(f)$$

для почти всех функций, справедлива оценка

$$\log \chi(n) \gtrsim 2^{n-1} \log n \log \log n.$$

Неполная определенность булевых функций (см. с. 81 в [1]) позволяет существенно упростить конструирование функций с экстремальными значениями характеристик. В [8] была построена не всюду определенная функция f с единственной минимальной д.н.ф., такая, что

$$\log \chi(f) = \log \tau(f) \gtrsim 2^{n-1} \sqrt{n/2\pi}.$$

В [9, 10] для максимального значения $\chi(S_n)$ параметра $\chi(f)$ на классе симметрических функций $S_n \subset P_n$ была получена оценка

$$\log \chi(n) \geq \log \chi(S_n) \geq cn \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \asymp \sqrt{n} 2^n.$$

Улучшить оценку $\chi(n)$ удалось после повышения нижней оценки $\tau(n)$. В [11] было показано, что при достаточно больших n справедливы оценки

$$\log \tau(n) \geq cn 2^n, \quad \log \chi(n) \geq cn 2^{n-2},$$

где $c > 0,75 \cdot 2^{-5}$, то есть

$$\log \chi(n) \asymp n 2^n$$

при $n \rightarrow \infty$.

Получение нетривиальных нижних оценок $\chi_{\mathcal{L}}(n)$ связано с решением двух задач: обоснованием свойств $\mathcal{L}$ -минимальных комплексов и наличием тупиковых не $\mathcal{L}$ -минимальных комплексов граней для функции.

Если $\mathcal{L}$ -минимальный комплекс M не является неприводимым, то есть $M = M_1 \cup M_0$, где комплекс M_1 эквивалентен M , то $\mathcal{L}(M_0) = 0$. Действительно, в силу аксиом неотрицательности и выпуклости

$$\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M_1 \cup M_0) \geq \mathcal{L}(M_1) + \mathcal{L}(M_0) \geq 0.$$

Так как комплексы M_1 и M являются эквивалентными и $\mathcal{L}$ -минимальными комплексами, то $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M_1)$ и, следовательно, $\mathcal{L}(M_0) = 0$.

Любой комплекс граней, имеющий нулевую меру $\mathcal{L}$ -сложности, является $\mathcal{L}$ -минимальным в силу аксиомы неотрицательности. Все комплексы, которые могут быть получены из комплекса нулевой $\mathcal{L}$ -сложности уменьшением ранга граней, удалением граней и перестановкой координат во всех гранях, также имеют нулевую $\mathcal{L}$ -сложность, то есть являются $\mathcal{L}$ -минимальными. Например, любой комплекс граней, в котором все грани содержат вершину $\tilde{1} = (1, \dots, 1)$, имеют нулевую $\mathcal{L}$ -сложность и являются $\mathcal{L}$ -минимальными. Таким образом, предположение, что $\mathcal{L}$ -минимальный комплекс M может не являться неприводимым, приводит к существованию и необходимости изучения множества комплексов нулевой $\mathcal{L}$ -сложности.

С другой стороны, из любого $\mathcal{L}$ -минимального комплекса уменьшением ранга и удалением граней можно получить эквивалентный тупиковый $\mathcal{L}$ -минимальный комплекс функции. Следовательно, для любой функции f справедливы соотношения

$$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}(f) \cap T(f) \neq \emptyset$$

и

$$\frac{|\mathcal{T}(f)|}{|\mathcal{M}_{\mathcal{L}}(f) \cap \mathcal{T}(f)|} \geq \frac{\tau(f)}{\mu_{\mathcal{L}}(f)} = \chi_{\mathcal{L}}(f),$$

то есть значение $1/\chi_{\mathcal{L}}(f)$ является верхней оценкой вероятности получить тупиковый $\mathcal{L}$ -минимальный комплекс функции f , и оценивание параметра $\chi_{\mathcal{L}}(f)$ имеет смысл не только для мер сложности, относительно которых любой $\mathcal{L}$ -минимальный комплекс является тупиковым.

Все комплексы граней из множества $\mathcal{T}(f) \cap \mathcal{M}_{\mathcal{L}}(f)$ имеют одинаковую и минимальную $\mathcal{L}$ -сложность, а комплексы из множества $\mathcal{T}(f) \setminus \mathcal{M}_{\mathcal{L}}(f)$ имеют большую сложность, чем $\mathcal{L}$ -минимальные комплексы. Поэтому для получения оценки $\chi_{\mathcal{L}}(f) > 1$ необходимо построение функции f , у которой существует не менее двух неизоморфных множеств тупиковых комплексов — минимальные и не минимальные тупиковые комплексы граней.

Для сравнения сложности комплексов граней будем использовать свойства, а не значение функционала меры сложности. Определим классы мер сложности, обладающие дополнительными к аксиомам свойствами, которые однозначно устанавливают отношение эквивалентности или строгого предпочтения по сложности для сравниваемых комплексов граней.

Определение 3. Мера сложности $\mathcal{L}$ удовлетворяет свойству строгой монотонности относительно длины, если $\mathcal{L}$ -сложность комплекса уменьшается при удалении грани, которая не содержит вершин $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$.

Условие, что $\mathcal{L}$ -сложность комплекса уменьшается только при удалении грани, которая не содержит вершин $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$, позволяет рассматривать меры сложности, для которых могут существовать не тупиковые комплексы нулевой сложности, например, для меры сложности $\mathcal{L}_{\neg}$.

Определение 4. Мера сложности $\mathcal{L}$ удовлетворяет свойству строгой монотонности относительно сложности, если $\mathcal{L}$ -сложность комплекса уменьшается при уменьшении ранга или удалении произвольной грани.

Определение 5. Мера сложности $\mathcal{L}$ удовлетворяет усиленному свойству инвариантности относительно изоморфизма, если при замене в комплексе произвольного набора граней на изоморфные грани сложность комплекса не изменяется.

Введем следующие обозначения для классов мер сложности:

Λ_I есть класс мер сложности, которые удовлетворяют свойству строгой монотонности относительно длины;

Λ_L есть класс мер сложности, которые удовлетворяют свойству строгой монотонности относительно сложности;

Λ_{π} есть класс мер сложности, которые удовлетворяют усиленному свойству инвариантности относительно изоморфизма.

Очевидно, что $\Lambda_L \subset \Lambda_I$ и для любой меры сложности $\mathcal{L} \in \Lambda_L$ все $\mathcal{L}$ -минимальные комплексы являются тупиковыми. При этом отметим, что используемые при минимизации функционалы являются мерами сложности из классов $\Lambda_{\pi} \cap \Lambda_I$ или $\Lambda_{\pi} \cap \Lambda_L$.

В статье предлагаются методы построения булевых функций, которые позволяют получить высокие нижние оценки отношения числа тупиковых и минимальных комплексов граней для мер сложности из классов $\Lambda_{\pi} \cap \Lambda_I$ и $\Lambda_{\pi} \cap \Lambda_L$. Методы основаны на развитии

результатов [11, 12] и используют свойства специальных тупиковых комплексов граней в единичном кубе размерности, меньшей n , для определения функции n переменных.

Для логарифма отношения числа тупиковых и минимальных комплексов граней функции для всех мер сложности из класса $\Lambda_\pi \cap \Lambda_l$ получена нижняя оценка вида $cn2^n$, где $c > 1,355 \cdot 2^{-7}$, при достаточно больших n . При этом число тупиковых комплексов, по порядку роста логарифма равное $n2^n$, может быть при единственном минимальном комплексе граней для всех мер сложности из класса $\Lambda_\pi \cap \Lambda_L$.

Получены нижние оценки мощности классов функций P_n , для которых число тупиковых комплексов, а также, при условии существования единственного минимального комплекса для всех мер сложности из $\Lambda_\pi \cap \Lambda_L$, отношение числа тупиковых и минимальных комплексов для всех мер сложности из $\Lambda_\pi \cap \Lambda_l$ имеют порядок роста логарифма, равный $n2^n$. Показано, что мощности этих классов функций по порядку логарифма равны 2^n , то есть сравнимы с числом всех функций P_n .

Статья имеет следующую структуру.

В разделе 2 приводится описание методов построения функций, обладающих экстремальным соотношением числа тупиковых и минимальных комплексов граней в единичном кубе.

В разделе 3 приводятся формулировки основных результатов о соотношении тупиковых и минимальных комплексов граней в единичном кубе.

В разделе 4 приводятся доказательства лемм и теорем.

2. Описание конструкции

Определим следующие параметры для комплексов граней функции $f \in P_n$:

$\chi_{\mathcal{L}}(f) = \tau(f)/\mu_{\mathcal{L}}(f)$ есть отношение числа тупиковых и $\mathcal{L}$ -минимальных комплексов функции;

$\chi_{\mathbf{C}}(f) = \min_{\mathcal{L} \in \mathbf{C}} \chi_{\mathcal{L}}(f)$ есть минимальное отношение числа тупиковых и $\mathcal{L}$ -минимальных комплексов функции для класса мер сложности $\mathbf{C}$;

$\tau(f \mid \mu_{\mathcal{L}}(f) = 1)$ есть число тупиковых комплексов функции при условии существования единственного $\mathcal{L}$ -минимального комплекса;

$\tau(f \mid \mu_{\mathbf{C}}(f) = 1)$ есть число тупиковых комплексов функции при условии $\mu_{\mathcal{L}}(f) = 1$ для любой меры сложности $\mathcal{L}$ из класса мер сложности $\mathbf{C}$.

Обозначим через $\chi_{\mathcal{L}}(n)$, $\chi_{\mathbf{C}}(n)$, $\tau(n \mid \mu_{\mathcal{L}} = 1)$ и $\tau(n \mid \mu_{\mathbf{C}} = 1)$ максимальные значения этих параметров на множестве функций P_n .

В единичном кубе B^n введем следующие обозначения:

$\mathcal{G}^n$ есть множество всех граней;

$\mathcal{T}^n$ есть множество всех тупиковых комплексов граней;

$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}^n$ есть множество $\mathcal{L}$ -минимальных комплексов граней;

$\mathcal{T}_{m-k,m}^n$ есть множество тупиковых комплексов k -мерных граней в поясе $S_{m-k,m}^n \subset B^n$, где $0 < k < m < n$;

$\mathcal{F}_{m-k,m}^n$ есть множество функций из P_n , для которых все максимальные грани являются k -мерными гранями в поясе $S_{m-k,m}^n$ и, соответственно, $\mathcal{T}(f) \subseteq \mathcal{F}_{m-k,m}^n$, где $0 < k < m < n$.

C_M есть подмножество собственных вершин граней неприводимого, тупикового или ядрового комплекса M , которое содержит по одной произвольной, если их несколько, собственной вершине для каждой грани комплекса.

Лемма 1. Для любого класса мер сложности C и любой меры сложности $\mathcal{L} \in C$ справедливы оценки

$$\begin{aligned}\chi_C(n) &\leq \chi_{\mathcal{L}}(n) \leq \tau(n), \\ \tau(n \mid \mu_C = 1) &\leq \tau(n \mid \mu_{\mathcal{L}} = 1) \leq \tau(n).\end{aligned}$$

Для числа тупиковых комплексов функции справедлива оценка

$$\log \tau(n) < n 2^n \log(3/2) + 2^n \log e.$$

Нижняя оценка $\chi_{\Lambda_{\pi} \cap \Lambda_I}(n)$ основана на построении специальной функции n переменных по функции $f \in \mathcal{F}_{m-k,m}^{n-2}$, где $0 < k < m < \lfloor (n-2)/2 \rfloor$. Определим функцию $\Phi_f \in P_n$ следующим образом:

$$\Phi_f(x_1, \dots, x_n) = \Phi_{f,0,0}(x_1, \dots, x_n) \vee \Phi_{f,0,1}(x_1, \dots, x_n) \vee \Phi_{f,1,1}(x_1, \dots, x_n),$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_{f,0,1}(x_1, \dots, x_n) &= \bar{x}_{n-1} \cdot x_n \cdot S_{m-k,m}^{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2}), \\ \Phi_{f,0,0}(x_1, \dots, x_n) &= \bar{x}_{n-1} \cdot \bar{x}_n \cdot S_{m-k,m}^{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2}) \cdot \bar{f}(x_1, \dots, x_{n-2}) \\ &\quad \cdot (x_1 \oplus \dots \oplus x_{n-2} \oplus 1), \\ \Phi_{f,1,1}(x_1, \dots, x_n) &= x_{n-1} \cdot x_n \cdot S_{m-k,m}^{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2}) \cdot \bar{f}(x_1, \dots, x_{n-2}) \\ &\quad \cdot (x_1 \oplus \dots \oplus x_{n-2})\end{aligned}$$

и $S_{m-k,m}^{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2})$ есть поясковая функция в кубе B^{n-2} .

Для функции $\Phi_f(x_1, \dots, x_n)$ введем следующие подмножества вершин куба B^n (см. рис. 1):

$$\begin{aligned}S_{\Phi_f} &= \{\tilde{x} \in B^n \mid \bar{x}_{n-1} \cdot x_n \cdot S_{m-k,m}^{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2}) = 1\} \subset B_{\bar{x}_{n-1}x_n}^n, \\ H_f &= \{\tilde{x} \in B^n \mid \bar{x}_{n-1} \cdot x_n \cdot f(x_1, \dots, x_{n-2}) = 1\} \subseteq S_{\Phi_f} \subset B_{\bar{x}_{n-1}x_n}^n, \\ R_{\Phi_f} &= S_{\Phi_f} \setminus H_f \subset B_{\bar{x}_{n-1}x_n}^n, \\ C_{\Phi_f} &= C_{\Phi_f,0} \cup C_{\Phi_f,1},\end{aligned}$$

где

$$C_{\Phi_f,0} = \{\tilde{x} \in B^n \mid \Phi_{f,0,0}(x_1, \dots, x_n) = 1\} \subset B_{\bar{x}_{n-1}\bar{x}_n}^n$$

и

$$C_{\Phi_f,1} = \{\tilde{x} \in B^n \mid \Phi_{f,1,1}(x_1, \dots, x_n) = 1\} \subset B_{x_{n-1}x_n}^n.$$

Рис. 1. Определение функции Φ_f

Множество вершин C_{Φ_f} принадлежит либо четным слоям грани $B^n_{\bar{x}_{n-1}\bar{x}_n}$, либо нечетным слоям грани $B^n_{x_{n-1}x_n}$, так как является подмножеством вершин линейной функции. Для каждой вершины множества C_{Φ_f} существует единственная максимальная грань, содержащая эту вершину, которая является одномерной ядровой гранью функции Φ_f . Соответственно, каждая вершина из множества C_{Φ_f} является собственной вершиной одномерной ядровой грани, при этом вторая вершина в ядровой грани принадлежит множеству R_{Φ_f} . Поэтому допустимой гранью функции Φ_f , содержащей вершину из множества C_{Φ_f} , может быть либо 0-мерная грань, совпадающая с вершиной, либо одномерная ядровая грань.

Обозначим через $\text{Ker}(\Phi_f)$ комплекс граней, который состоит из всех ядровых одномерных граней функции Φ_f с собственными вершинами из множества C_{Φ_f} . Вершины из множества R_{Φ_f} являются регулярными для ядровых граней из комплекса $\text{Ker}(\Phi_f)$.

В грани $B^n_{\bar{x}_{n-1}x_n} \subset B^n$ множество S_{Φ_f} совпадает с поясом $S^{n-2}_{m-k,m}$, для которого максимальными гранями являются k -мерные грани. При этом любая допустимая грань функции Φ_f , которая содержит вершину из множества H_f , принадлежит множеству S_{Φ_f} .

Отметим, что допустимые грани функции Φ_f не содержат вершин $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$, поэтому сложность комплекса граней функции Φ_f строго уменьшается при удалении любой грани комплекса для любой меры сложности из $\Lambda_\pi \cap \Lambda_I$.

Определение 6. Прямым объединением множеств комплексов граней $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$ в кубе B^n , для которых не существует граней, одновременно принадлежащих комплексам из множеств $\mathcal{G}_1$ и $\mathcal{G}_2$, называется множество комплексов

$$\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 = \{M \mid M = M_1 \cup M_2, M_1 \in \mathcal{G}_1, M_2 \in \mathcal{G}_2\}.$$

Введем обозначения для следующих множеств комплексов граней:

$\mathcal{G}^n(C_{\Phi_f})$ есть множество комплексов граней, в которые входит одна допустимая грань функции Φ_f для каждой вершины из множества C_{Φ_f} ;

$\mathcal{G}^n(S_{\Phi_f})$ есть множество комплексов граней, в которые входит не более $b_m^{n-2} = \binom{n-2}{m}$ допустимых граней для множества S_{Φ_f} ;

$$\Omega^n(\Phi_f) = \mathcal{G}^n(S_{\Phi_f}) \cup \mathcal{G}^n(C_{\Phi_f}).$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 2. Для функции $f \in \mathbb{F}_{m-k,m}^{n-2}$ и любой меры сложности $\mathcal{L} \in \Lambda_\pi \cap \Lambda_I$, где $0 < k < m \leq \lfloor (n-2)/2 \rfloor$, справедливо включение

$$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}(\Phi_f) \subseteq \Omega^n(\Phi_f).$$

Лемма 3. Для функции $f \in \mathbb{F}_{m-k,m}^{n-2}$ и любой меры сложности $\mathcal{L} \in \Lambda_\pi \cap \Lambda_I$, где $0 < k < m \leq \lfloor (n-2)/2 \rfloor$ справедливы неравенства

$$\tau(\Phi_f) \geq \tau(f), \quad \mu_{\mathcal{L}}(\Phi_f) \leq 2^c \sqrt{n} 2^n,$$

где c — положительная постоянная.

Отображение $\mathcal{A}: B^n \rightarrow B^n$, где $\mathcal{A}(x_1, \dots, x_n) = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ определяет автоморфизм единичного куба B^n , при котором сохраняется бинарное отношение смежности вершин в единичном кубе. Соответственно, сохраняются свойства принадлежности вершины подмножеству (грани, слою, поясу и т.д.), максимальности грани для некоторого подмножества вершин, неприводимости комплекса граней и другие.

Для слоя B_m^n образом является слой $\mathcal{A}(B_m^n) = B_{n-m}^n$, а для пояса $S_{m-k,m}^n$ образом является пояс $\mathcal{A}(S_{m-k,m}^n) = S_{n-m,n-m+k}^n$, где $0 \leq k \leq m \leq n$.

Для функций $f \in P_n$, то есть подмножеств вершин N_f в единичном кубе B^n , автоморфизм $\mathcal{A}$ определяется отображением $\mathcal{A}: P_n \rightarrow P_n$, где $f_{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$. Соответственно, образом множества функций $\mathbb{F}_{m-k,m}^n$ является множество функций $\mathcal{A}(\mathbb{F}_{m-k,m}^n) = \mathbb{F}_{n-m,n-m+k}^n$.

Следовательно, утверждения, справедливые для тупиковых комплексов множества $\mathbb{T}_{m-k,m}^n$ и функций из $\mathbb{F}_{m-k,m}^n$, являются справедливыми и для изоморфных им тупиковых комплексов множества $\mathbb{T}_{n-m,n-m+k}^n$ и функций из $\mathbb{F}_{n-m,n-m+k}^n$.

Для функции $f \in \mathbb{F}_{m-k,m}^{n-2}$, где $0 < k < m \leq \lfloor (n-2)/2 \rfloor$, определим функцию $\Phi_f^* \in P_n$ следующим образом:

$$\Phi_f^*(x_1, \dots, x_n) = \Phi_{f,0,0}^*(x_1, \dots, x_n) \vee \Phi_{f,0,1}^*(x_1, \dots, x_n) \vee \Phi_{f,1,1}^*(x_1, \dots, x_n),$$

где

$$\Phi_{f,0,1}^*(x_1, \dots, x_n) = \bar{x}_{n-1} \cdot x_n \cdot S_{n-2-m,n-2-m+k}^{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2}),$$

$$\begin{aligned} \Phi_{f,0,0}^*(x_1, \dots, x_n) &= \bar{x}_{n-1} \cdot \bar{x}_n \cdot S_{n-2-m,n-2-m+k}^{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2}) \\ &\quad \cdot \bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-2}) \cdot (x_1 \oplus \dots \oplus x_{n-2} \oplus 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{f,1,1}^*(x_1, \dots, x_n) &= x_{n-1} \cdot x_n \cdot S_{n-2-m,n-2-m+k}^{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2}) \\ &\quad \cdot \bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-2}) \cdot (x_1 \oplus \dots \oplus x_{n-2}) \end{aligned}$$

и $S_{n-2-m, n-2-m+k}^{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2})$ — поясковая функция в кубе B^{n-2} .

Утверждения, аналогичные леммам 2 и 3, справедливы для функции $\Phi_f^* \in P_n$, определяемой по функции $f \in \mathcal{F}_{m-k, m}^{n-2}$, то есть по функции $f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-2}) \in \mathcal{F}_{n-2-m, n-2-m+k}^{n-2}$.

Заметим, что в комплексы граней из $\mathcal{G}^n(S_{\Phi_f}^*)$ входит не более $b_{n-2-m}^{n-2} = \binom{n-2}{m}$ допустимых граней для множества $S_{\Phi_f}^*$.

Очевидно, что при $m < \lfloor (n-2)/2 \rfloor$ множества вершин функций Φ_f и Φ_f^* являются несвязанными компонентами в кубе B^n , так как множество вершин N_{Φ_f} находится ниже слоя с номером $\lfloor n/2 \rfloor$, а множество вершин $N_{\Phi_f^*}$ находится выше слоя с номером $\lfloor n/2 \rfloor$ в кубе B^n .

Тупиковые, кратчайшие и минимальные комплексы обладают свойством суммируемости (см. с. 117 в [2]) для компонент связности: комплекс граней, который получается прямым объединением любых тупиковых, соответственно, кратчайших или минимальных комплексов граней для компонент связности, является тупиковым, соответственно, кратчайшим или минимальным комплексом.

Для произвольных мер сложности утверждение о суммируемости $\mathcal{L}$ -минимальных комплексов для компонент связности в общем случае неверно, но лемму 1 можно обобщить следующим образом.

Лемма 4. Включение

$$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}(\Phi_f \vee \Phi_f^*) \subseteq \Omega^n(\Phi_f) \cup \Omega^n(\Phi_f^*)$$

справедливо при $f \in \mathcal{F}_{m-k, m}^{n-2}$ и $\mathcal{L} \in \Lambda_\pi \cap \Lambda_l$, где $0 < k < m < \lfloor (n-2)/2 \rfloor$.

Известно (см. [12]), что существует функция $f \in \mathcal{F}_{m-k, m}^n$, где $m = \lfloor n/2 \rfloor - 1$ и $k = \lfloor 0,1052m \rfloor$, для которой

$$\log \tau(f) \gtrsim c_\tau n^{2^{n-1}},$$

где $c_\tau > 1,355 \cdot 2^{-5}$. Поэтому из лемм 2–4 следует, что для некоторой функции $f \in \mathcal{F}_{m-k, m}^{n-2}$, где $m = \lfloor (n-2)/2 \rfloor - 1$, справедливы оценки

$$\log \tau(\Phi_f \vee \Phi_f^*) \gtrsim 2c_\tau (n-2)2^{n-3},$$

$$\log \mu_{\mathcal{L}}(\Phi_f \vee \Phi_f^*) = O(\sqrt{n}2^n)$$

для любой меры сложности $\mathcal{L} \in \Lambda_\pi \cap \Lambda_l$, то есть

$$\log \chi_{\Lambda_\pi \cap \Lambda_l}(n) \gtrsim c_\tau n^{2^{n-2}}.$$

Нижняя оценка $\tau(n \mid \mu_{\Lambda_\pi \cap \Lambda_l} = 1)$ основана на построении специальной функции n переменных по функции $f \in P_{n-3}$, имеющей максимальное число тупиковых комплексов.

Определим функцию $\Psi_f \in P_n$ следующим образом:

$$\Psi_f(x_1, \dots, x_n) = \Psi_{f,0,0}(x_1, \dots, x_n) \vee \Psi_{f,0,1}(x_1, \dots, x_n) \vee \Psi_{f,1,1}(x_1, \dots, x_n),$$

где

$$\Psi_{f,0,1}(x_1, \dots, x_n) = \bar{x}_{n-1} \cdot x_n \cdot (\bar{x}_{n-2} \vee x_{n-2} \cdot f(x_1, \dots, x_{n-3})),$$

$$\begin{aligned} \Psi_{f,0,0}(x_1, \dots, x_n) &= \bar{x}_{n-1} \cdot \bar{x}_n \cdot (x_1 \oplus \dots \oplus x_{n-2} \oplus 1) \cdot (\bar{x}_{n-2} \cdot \bar{f}(x_1, \dots, x_{n-3}) \\ &\quad \vee x_{n-2} \cdot f(x_1, \dots, x_{n-3})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{f,1,1}(x_1, \dots, x_n) &= x_{n-1} \cdot x_n \cdot (x_1 \oplus \dots \oplus x_{n-2}) \cdot (\bar{x}_{n-2} \cdot \bar{f}(x_1, \dots, x_{n-3}) \\ &\quad \vee x_{n-2} \cdot f(x_1, \dots, x_{n-3})). \end{aligned}$$

Рис. 2. Определение функции Ψ_f

Для функции $\Psi_f(x_1, \dots, x_n)$ введем следующие подмножества вершин куба B^n (см. рис. 2):

$$\begin{aligned} H_f &= \{\tilde{x} \in B^n \mid \bar{x}_{n-2} \cdot \bar{x}_{n-1} \cdot x_n \cdot f(x_1, \dots, x_{n-3}) = 1\} \subset B^n_{\bar{x}_{n-2}\bar{x}_{n-1}x_n}, \\ \hat{H}_f &= \{\tilde{x} \in B^n \mid x_{n-2} \cdot \bar{x}_{n-1} \cdot x_n \cdot f(x_1, \dots, x_{n-3}) = 1\} \subset B^n_{x_{n-2}\bar{x}_{n-1}x_n}, \\ R_{\Psi_f} &= (B_{\bar{x}_{n-2}\bar{x}_{n-1}x_n} \setminus H_f) \cup \hat{H}_f \subset B^n_{\bar{x}_{n-1}x_n}, \\ C_{\Psi_f} &= C_{\Psi_f,0} \cup C_{\Psi_f,1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} C_{\Psi_f,0} &= \{\tilde{x} \in B^n \mid \Psi_{f,0,0}(x_1, \dots, x_n) = 1\} \subset B^n_{\bar{x}_{n-1}\bar{x}_n}, \\ C_{\Psi_f,1} &= \{\tilde{x} \in B^n \mid \Psi_{f,1,1}(x_1, \dots, x_n) = 1\} \subset B^n_{x_{n-1}x_n}. \end{aligned}$$

Множество вершин C_{Ψ_f} принадлежит либо четным слоям грани $B^n_{\bar{x}_{n-1}\bar{x}_n}$, либо нечетным слоям грани $B^n_{x_{n-1}x_n}$, так как является подмножеством вершин линейной функции. Для каждой вершины множества C_{Ψ_f} существует единственная максимальная грань, содержащая эту вершину, которая является одномерной ядровой гранью функции Ψ_f . Соответственно, каждая вершина из множества C_{Ψ_f} является собственной вершиной одно-

мерной ядровой грани, при этом вторая вершина в ядровой грани принадлежит множеству R_{Ψ_f} .

Обозначим через $\text{Ker}(\Psi_f)$ комплекс граней, который состоит из всех ядровых одномерных граней функции Ψ_f с собственными вершинами из множества S_{Ψ_f} . Вершины из множества R_{Ψ_f} являются регулярными для ядровых граней комплекса $\text{Ker}(\Psi_f)$.

Для любой меры сложности $\mathcal{L} \in \Lambda_L$ в любом $\mathcal{L}$ -минимальном комплексе все грани являются максимальными. Максимальными гранями функции Ψ_f являются: одномерные ядровые грани размерности 1 из комплекса $\text{Ker}(\Psi_f)$, грань $B_{\bar{x}_{n-2}\bar{x}_{n-1}x_n}^n$ ранга 3 и любая грань $B_{i_1, \dots, i_k, n-1, n}^{n, \sigma_1, \dots, \sigma_k, 0, 1} \subseteq B^n$, где $1 \leq i_j \leq n-3$ для $j = 1, \dots, k$, если грань $B_{i_1, \dots, i_k}^{n-3, \sigma_1, \dots, \sigma_k} \subseteq B^{n-3}$ является максимальной гранью функции f . Отметим, что для любой допустимой грани I функции Ψ_f такой, что $I \cap H_f \neq \emptyset$ и $I \not\subseteq B_{\bar{x}_{n-2}\bar{x}_{n-1}x_n}^n$, выполняется соотношение $I \subseteq H_f \cup \hat{H}_f$.

Лемма 5. Если $\tau(f) > 1$ для функции $f \in P_{n-3}$, где $n > 5$, то

$$\mu_{\mathcal{L}}(\Psi_f) = 1, \quad \tau(\Psi_f) > \tau(f)$$

для любой меры сложности $\mathcal{L} \in \Lambda_\pi \cap \Lambda_L$.

Для функции $f \in P_{n-3}$, имеющей максимальное число тупиковых комплексов,

$$\tau(f) = \tau(n-3) > 1$$

при $n > 5$. Тогда из леммы 5 следует, что

$$\tau(\Psi_f) > \tau(n-3)$$

и

$$\mu_{\mathcal{L}}(\Psi_f) = 1$$

для любой меры сложности $\mathcal{L} \in \Lambda_\pi \cap \Lambda_L$, при этом единственный $\mathcal{L}$ -минимальный комплекс является одинаковым для всех мер сложности. Это означает, что справедлива оценка

$$\tau(n \mid \mu_{\Lambda_\pi \cap \Lambda_L} = 1) > \tau(n-3)$$

при $n > 5$.

Нижние оценки числа функций из P_n вида 2^{c2^n} , где $0 < c < 1$, для которых характеристики $\tau(f)$, $\chi_{\Lambda_\pi \cap \Lambda_L}(f)$, $\tau(f \mid \mu_{\Lambda_\pi \cap \Lambda_L}(f) = 1)$ имеют порядок роста логарифма, равный $n2^n$, основаны на работе [12] и используют некоторую конструкцию для построения тупиковых комплексов граней из множества $\mathcal{T}_{m-k, m}^n \cup \mathcal{T}_{n-m, n-m+k}^n$. Эта конструкция позволяет определять различные множества тупиковых комплексов для заданных множеств собственных вершин, которым соответствуют различные функции из множества

$$\mathcal{F}_{m-k, m}^n \vee \mathcal{F}_{n-m, n-m+k}^n = \{f \mid f = f_1 \vee f_2, f_1 \in \mathcal{F}_{m-k, m}^n, f_2 \in \mathcal{F}_{n-m, n-m+k}^n\}.$$

Определим для

$$m = \lfloor n/2 \rfloor - 1, \quad k = \lfloor 0,1052m \rfloor$$

множество функций

$$\mathcal{P}_{n, m, k}(t) = \{f \in \mathcal{F}_{m-k, m}^n \vee \mathcal{F}_{n-m, n-m+k}^n \mid \log \tau(f) \gtrsim t c_\tau n 2^n\} \subset P_n.$$

Тогда

$$\log |\mathcal{P}_{n,m,k}(t)| \asymp 2^n$$

при $n \rightarrow \infty$ для $0 < t < 1$.

При преобразованиях Φ и Ψ различные функции преобразуются в различные функции из P_n в силу справедливости следующих утверждений.

Лемма 6. Если функции $f, g \in P_{n-2}$ и $f \neq g$, то $\Phi_f \neq \Phi_g$.

Лемма 7. Если функции $f, g \in P_{n-3}$ и $f \neq g$, то $\Psi_f \neq \Psi_g$.

При применении к функциям множества $\mathcal{P}_{n-2,m,k}(t)$ преобразования Φ получим множество различных функций n переменных, для которых

$$\log \chi_{\Lambda_\pi} \cap \Lambda_I(f) \gtrsim tc_\tau, \quad n2^{n-2}$$

и логарифм числа таких функций имеет порядок роста 2^n при $n \rightarrow \infty$.

При применении к функциям множества $\mathcal{P}_{n-3,m,k}(t)$ преобразования Ψ получим множество различных функций n переменных, для которых

$$\tau(f \mid \mu_{\Lambda_\pi \cap \Lambda_L}(f) = 1) \gtrsim tc_\tau n2^{n-3}$$

и логарифм числа таких функций имеет порядок роста 2^n при $n \rightarrow \infty$.

3. Формулировка основных результатов

Используемые в оценках константы определим следующим образом:

$$c_\tau = \frac{1}{2}C(x, y, \lambda), \quad \sigma_\tau = \varphi(\lambda, y),$$

где

$$\begin{aligned} C(x, y, \lambda) &= y\varphi(\lambda, y)H(x/y), \\ \varphi(\lambda, y) &= (1 - e^{-\lambda}) \left(1 - \frac{\lambda y}{1 - 2y} \right), \\ H(x) &= -x \log x - (1 - x) \log(1 - x). \end{aligned}$$

При значениях параметров $x = 0,1052$, $y = 0,2104$ и $\lambda = 1,0087$ находим, что

$$c_\tau > 1,355 \cdot 2^{-5}, \quad \sigma_\tau > 0,4025.$$

Теорема 1. Для любой меры сложности $\mathcal{L} \in \Lambda_\pi \cap \Lambda_I$ при $n \rightarrow \infty$ справедливы оценки

$$\frac{1}{4}c_\tau n2^n \lesssim \log \chi_{\Lambda_\pi \cap \Lambda_I}(n) \leq \log \chi_{\mathcal{L}}(n) < \log \frac{3}{2}n2^n + 2^n \log e.$$

Из теоремы 1 следует, что параметры $\log \chi_{\Lambda_\pi \cap \Lambda_I}(n)$ и $\log \chi_{\mathcal{L}}(n)$ для любой меры сложности $\mathcal{L} \in \Lambda_\pi \cap \Lambda_I$ имеют порядок роста $n2^n$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 2. При $n > 5$ справедлива оценка

$$\tau(n \mid \mu_{\Lambda_\pi \cap \Lambda_L} = 1) > \tau(n - 3).$$

Теорема 3. Для любой меры сложности $\mathcal{L} \in \Lambda_\pi \cap \Lambda_L$ при $n \rightarrow \infty$ справедливы оценки

$$\frac{1}{8}c_\tau n 2^n \lesssim \log \tau(n \mid \mu_{\Lambda_\pi \cap \Lambda_L} = 1) \leq \log \tau(n \mid \mu_{\mathcal{L}} = 1) < \log \frac{3}{2} n 2^n + 2^n \log e.$$

Из теоремы 3 следует, что $\log \tau(n \mid \mu_{\Lambda_\pi \cap \Lambda_L} = 1)$ и $\log \tau(n \mid \mu_{\mathcal{L}} = 1)$ для любой меры сложности $\mathcal{L} \in \Lambda_\pi \cap \Lambda_L$ имеют порядок роста $n 2^n$ при $n \rightarrow \infty$.

Введем следующие множества функций n переменных, для которых нижние оценки исследуемых параметров по порядку логарифма совпадают с максимальными значениями:

$$\begin{aligned} P_n(t, \tau) &= \{f \in P_n \mid \log \tau(f) \gtrsim t c_\tau n 2^n\}, \\ P_n(t, \chi_{\Lambda_\pi} \cap \Lambda_I) &= \{f \in P_n \mid \log \chi_{\Lambda_\pi} \cap \Lambda_I(f) \gtrsim t c_\tau n 2^{n-2}\}, \\ P_n(t, \tau \mid \mu_{\Lambda_\pi \cap \Lambda_L} = 1) &= \{f \in P_n \mid \log \tau(f) \gtrsim t c_\tau n 2^{n-3}, \mu_{\Lambda_\pi} \cap \Lambda_L(f) = 1\}, \end{aligned}$$

где $0 < t < 1$. Число функций в этих подмножествах обозначим соответственно через $p_n(t, \tau)$, $p_n(t, \chi_{\Lambda_\pi} \cap \Lambda_I)$ и $p_n(t, \tau \mid \mu_{\Lambda_\pi} \cap \Lambda_L = 1)$.

Теорема 4. При $n \rightarrow \infty$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \log p_n(t, \tau) &\gtrsim \sigma_\tau \hbar(t) 2^n, \\ \log p_n(t, \chi_{\Lambda_\pi} \cap \Lambda_I) &\gtrsim \sigma_\tau \hbar(t) 2^{n-2}, \\ \log p_n(t, \tau \mid \mu_{\Lambda_\pi \cap \Lambda_L} = 1) &\gtrsim \sigma_\tau \hbar(t) 2^{n-3}, \end{aligned}$$

где

$$\hbar(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq 1/2, \\ H(t), & 1/2 < t < 1. \end{cases}$$

Из теоремы 4 следует, что мощность множеств таких функций по порядку логарифма равна 2^n , то есть совпадает с числом функций от n переменных.

4. Доказательства

Доказательство леммы 1. Для любой функции, любого класса мер сложности $\mathbf{C}$ и любой меры сложности $\mathcal{L} \in \mathbf{C}$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbf{C}}(f) &\leq \chi_{\mathcal{L}}(f) \leq \tau(f), \\ \tau(f \mid \mu_{\mathbf{C}} = 1) &\leq \tau(f \mid \mu_{\mathcal{L}} = 1) \leq \tau(f). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbf{C}}(n) &\leq \chi_{\mathcal{L}}(n) \leq \tau(n), \\ \tau(n \mid \mu_{\mathbf{C}} = 1) &\leq \tau(n \mid \mu_{\mathcal{L}} = 1) \leq \tau(n). \end{aligned}$$

Обозначим через $\mathcal{G}^n(m)$ множество комплексов и через

$$G_n(m) = \sum_{s=1}^m \binom{3^n}{s}$$

число комплексов из не более, чем m граней в единичном кубе B^n . Тупиковые комплексы являются неприводимыми, поэтому число граней в них не превосходит 2^n , то есть

$$\mathcal{T}(f) \subset \mathcal{T}^n \subseteq \mathcal{G}^n(2^n)$$

для любой функции $f \in P_n$. Тогда

$$\begin{aligned} \log G_n(m) &< 3^n H(m/3^n), & m < 3^n/2, \\ H(x) &< x \log(e/x), & 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Следовательно, при $2^n < 3^n/2$ или $n > 1$ справедливы неравенства

$$\log \tau(n) < \log T(n) \leq \log G_n(2^n) < n 2^n \log(3/2) + 2^n \log e,$$

и $\tau(1) = 1$ при $n = 1$, то есть оценка также справедлива. Лемма доказана.

Доказательство леммы 2. Произвольный комплекс w функции Φ_f однозначно представляется в виде прямого объединения комплексов граней

$$w = w(C_{\Phi_f}) \cup w'(C_{\Phi_f}) \cup w(H_f) \cup w(R_{\Phi_f}),$$

где

$w(C_{\Phi_f})$ есть комплекс из $|C_{\Phi_f}|$ граней, которые содержат все вершины множества C_{Φ_f} ; в этот комплекс для каждой вершины из множества C_{Φ_f} входит либо 1-мерная ядровая грань из комплекса $\text{Ker}(\Phi_f)$, либо 0-мерная грань, которая совпадает с вершиной;

$w'(C_{\Phi_f})$ есть комплекс граней, которые содержат вершины множества C_{Φ_f} и не входят в комплекс $w(C_{\Phi_f})$;

$w(H_f)$ есть комплекс граней, которые содержат вершины из множества H_f ; в этот комплекс могут входить только грани, допустимые для множества S_{Φ_f} и содержащие хотя бы одну вершину из множества H_f ;

$w(R_{\Phi_f})$ есть комплекс граней, которые не содержат вершин из множеств C_{Φ_f} и H_f ; в этот комплекс могут входить только грани, допустимые для множества R_{Φ_f} , то есть все вершины этих граней являются регулярными относительно ядровых граней комплекса $\text{Ker}(\Phi_f)$.

В комплексе w уменьшим ранг (увеличим размерность) граней из $w(C_{\Phi_f}) \cup w(H_f)$ до минимального ранга (максимальной размерности) для множества N_{Φ_f} . При этом все грани из $w(C_{\Phi_f})$ станут 1-мерными ядровыми гранями комплекса $\text{Ker}(\Phi_f)$, а все грани из $w(H_f)$ станут k -мерными гранями, максимальными для множества S_{Φ_f} . В силу аксиомы монотонности, $\mathcal{L}$ -сложность полученного комплекса

$$v = \text{Ker}(\Phi_f) \cup w'(C_{\Phi_f}) \cup v(H_f) \cup w(R_{\Phi_f})$$

не увеличится, то есть

$$\mathcal{L}(w) \geq \mathcal{L}(v).$$

Очевидно, что если $w \notin \Omega^n(\Phi_f)$, то $v \notin \Omega^n(\Phi_f)$. Покажем, что тогда из v можно получить удалением некоторых граней комплекс функции Φ_f меньшей $\mathcal{L}$ -сложности для

меры сложности $\mathcal{L} \in \Lambda_\pi \cap \Lambda_l$. Это будет означать, что комплексы v и w не могут быть $\mathcal{L}$ -минимальными для функции Φ_f .

Рассмотрим случай

$$w'(C_{\Phi_f}) \cup w(R_{\Phi_f}) \neq \emptyset.$$

Тогда $\text{Ker}(\Phi_f) \cup v(H_f)$ является комплексом функции Φ_f , так как все вершины из множества $C_{\Phi_f} \cup R_{\Phi_f}$ содержатся в гранях комплекса $\text{Ker}(\Phi_f)$ и все вершины из множества H_f содержатся в гранях комплекса $v(H_f)$. При удалении из комплекса v всех граней, которые входят в $w'(C_{\Phi_f}) \cup w(R_{\Phi_f})$, $\mathcal{L}$ -сложность комплекса уменьшается, то есть

$$\mathcal{L}(w) \geq \mathcal{L}(v) > \mathcal{L}(\text{Ker}(\Phi_f) \cup v(H_f))$$

и комплекс w не может быть $\mathcal{L}$ -минимальным для функции Φ_f .

Рассмотрим случай

$$v = \text{Ker}(\Phi_f) \cup v(H_f), \quad |v(H_f)| > \binom{n-2}{m}.$$

Рассмотрим комплекс граней $\text{Ker}(\Phi_f) \cup M(S_{\Phi_f})$ функции Φ_f , где $M(S_{\Phi_f})$ есть $\mathcal{L}$ -минимальный комплекс для S_{Φ_f} , то есть для поясковой функции $S_{m-k,m}^{n-2}$ в грани $B_{x_{n-1}x_n}^n$. Такой комплекс состоит (см. [10]) из $\binom{n-2}{m}$ граней размерности k , $0 < k < m \leq \lfloor (n-2)/2 \rfloor$. Допустимо представление

$$v(H_f) = v_0(H_f) \cup v',$$

где $v_0(H_f)$ — комплекс из некоторых $\binom{n-2}{m}$ граней размерности k , максимальных для множества S_{Φ_f} , а v' — непустой комплекс из оставшихся граней комплекса $v(H_f)$, которые не вошли в $v_0(H_f)$. Из комплекса $v_0(H_f)$ заменой граней на изоморфные может быть получен комплекс $M(S_{\Phi_f})$, так как эти комплексы состоят из одинакового числа k -мерных граней, максимальных для пояса $S_{m-k,m}^{n-2}$ в $(n-2)$ -мерной грани куба B^n . Поэтому для $\mathcal{L} \in \Lambda_\pi$

$$\mathcal{L}(\text{Ker}(\Phi_f) \cup v_0(H_f) \cup v') = \mathcal{L}(\text{Ker}(\Phi_f) \cup M(S_{\Phi_f}) \cup v')$$

и для $\mathcal{L} \in \Lambda_l$ при условии $v' \neq \emptyset$

$$\mathcal{L}(\text{Ker}(\Phi_f) \cup M(S_{\Phi_f}) \cup v') > \mathcal{L}(\text{Ker}(\Phi_f) \cup M(S_{\Phi_f})).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(w) \geq \mathcal{L}(v) &= \mathcal{L}(\text{Ker}(\Phi_f) \cup v(H_f)) \\ &> \mathcal{L}(\text{Ker}(\Phi_f) \cup M(S_{\Phi_f})), \end{aligned}$$

и комплекс w не может быть $\mathcal{L}$ -минимальным для функции Φ_f . Лемма доказана.

Доказательство леммы 3. Найдем нижнюю оценку числа тупиковых комплексов. Отображение

$$\mathcal{I}(x_1, \dots, x_{n-2}) = (x_1, \dots, x_{n-2}, 0, 1)$$

определяет изоморфизм единичного куба B^{n-2} и грани $B_{\bar{x}_{n-1}x_n}^n$ ранга 2 в кубе B^n , при котором сохраняется бинарное отношение смежности вершин в единичном кубе. Соответственно, сохраняются свойства принадлежности вершины подмножеству, максимальности грани для некоторого подмножества вершин, неприводимости комплекса граней, и другие.

При отображении $\mathcal{J}$ произвольная грань

$$g = B_{i_1, \dots, i_r}^{n-2, \sigma_1, \dots, \sigma_r} \subset B^{n-2}$$

отображается в грань

$$\mathcal{J}(g) = B_{i_1, \dots, i_r, n-1, n}^{n, \sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, 1} \subset B_{\bar{x}_{n-1}x_n}^n \subset B^n.$$

Для комплекса граней

$$M = \{g_j \subset B^{n-2}, j = 1, \dots, l\}$$

обозначим через

$$\mathcal{J}(M) = \{\mathcal{J}(g_j), j = 1, \dots, l\}$$

комплекс граней в грани $B_{\bar{x}_{n-1}x_n}^n$ куба B^n . При изоморфном отображении различные тупиковые комплексы граней в кубе B^{n-2} преобразуются в различные тупиковые комплексы в кубе B^n .

Для функции $f \in \mathcal{T}_{m-k, m}^{n-2}$ множество тупиковых комплексов $\mathcal{T}(f) \subset \mathcal{T}_{m-k, m}^{n-2}$ и комплексы состоят из k -мерных максимальных граней пояса $S_{m-k, m}^{n-2} \subset B^{n-2}$. Тогда

$$\mathcal{T}(H_f) = \{\mathcal{J}(T), T \in \mathcal{T}(f)\}$$

— множество тупиковых комплексов k -мерных граней для подмножества $H_f \subseteq S_{\Phi_f} \subset B^n$. Все k -мерные грани для подмножества вершин H_f будут максимальными и для функции Φ_f , так как множество S_{Φ_f} совпадает с поясом ширины k в грани $B_{\bar{x}_{n-1}x_n}^n$. Поэтому любой комплекс из прямого объединения $\mathcal{T}(H_f) \cup \text{Ker}(\Phi_f)$ является тупиковым для функции Φ_f . Действительно, в таком комплексе ядровые грани из множества $\text{Ker}(\Phi_f)$ содержат множество вершин $C_{\Phi_f} \cup R_{\Phi_f}$, и грани любого комплекса из $\mathcal{T}(H_f)$ содержат множество вершин H_f . При этом

$$H_f \cap (C_{\Phi_f} \cup R_{\Phi_f}) = \emptyset,$$

все грани являются максимальными и имеют собственные вершины. Поэтому

$$\mathcal{T}(H_f) \cup \text{Ker}(\Phi_f) \subseteq \mathcal{T}(\Phi_f)$$

и, следовательно,

$$\tau(\Phi_f) \geq \tau(f).$$

Найдем верхнюю оценку числа минимальных комплексов. В силу леммы 1,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}(\Phi_f) \subseteq \Omega^n(\Phi_f) = \mathcal{G}^n(C_{\Phi_f}) \cup \mathcal{G}^n(S_{\Phi_f}).$$

Поэтому

$$|\mathcal{M}_f(\Phi_f)| \leq |\Omega^n(\Phi_f)| = |\mathcal{G}^n(C_{\Phi_f})| |\mathcal{G}^n(S_{\Phi_f})|.$$

Очевидно, что

$$|\mathcal{G}^n(C_{\Phi_f})| \leq 2^{|C_{\Phi_f}|} < 2^{2^n}$$

и

$$|\mathcal{G}^n(S_{\Phi_f})| < \sum_{i=1}^{b_m^{n-2}} \binom{3^n}{b_m^{n-2}}.$$

Так как

$$b_m^{n-2} = \binom{n-2}{\lfloor (n-2)/2 \rfloor - 1} = O(2^n / \sqrt{n}) = o(3^n),$$

получаем, что

$$\begin{aligned} \log |\mathcal{G}^n(S_{\Phi_f})| &< 3^n H(b_m^{n-2}/3^n) \\ &< b_m^{n-2} \log(e 3^n / b_m^{n-2}) = O(\sqrt{n} 2^n), \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\mu_f(\Phi_f) \leq 2^c \sqrt{n} 2^n$$

при $n \rightarrow \infty$, где c — некоторая положительная постоянная. Лемма доказана.

Доказательство леммы 4. Пусть w — произвольный комплекс граней функции $\Phi_f \vee \Phi_f^*$. Комплекс w однозначно представляется в виде прямого объединения $w = w_1 \cup w_2$, где w_1 и w_2 — комплексы граней для функций Φ_f и Φ_f^* , которые являются несвязанными компонентами. Если $w \notin \Omega^n(\Phi_f) \cup \Omega^n(\Phi_f^*)$, то либо $w_1 \notin \Omega^n(\Phi_f)$, либо $w_2 \notin \Omega^n(\Phi_f^*)$. Отметим, что при удалении грани из любого комплекса граней функции $\Phi_f \vee \Phi_f^*$ сложность комплекса строго уменьшается для любой меры сложности из Λ_I .

В случае $w_1 \notin \Omega^n(\Phi_f)$ покажем, что из w_1 может быть получен такой комплекс $\hat{w}_1$, что комплекс $\hat{w}_1 \cup w_2$ функции $\Phi_f \vee \Phi_f^*$ будет иметь меньшую $\mathcal{L}$ -сложность, чем комплекс $w = w_1 \cup w_2$. Это будет означать, что комплекс w не может быть $\mathcal{L}$ -минимальным для функции $\Phi_f \vee \Phi_f^*$.

Аналогично доказательству леммы 1, комплекс w_1 функции Φ_f однозначно представляется в виде прямого объединения комплексов граней

$$w_1 = w_1(C_{\Phi_f}) \cup w'_1(C_{\Phi_f}) \cup w_1(H_f) \cup w_1(R_{\Phi_f}).$$

В комплексе w_1 увеличим размерность граней комплекса $w_1(C_{\Phi_f}) \cup w_1(H_f)$ до максимальной размерности. В силу аксиомы монотонности, $\mathcal{L}$ -сложность полученного комплекса $v_1 \cup w_2$, где

$$v_1 = \text{Ker}(\Phi_f) \cup w'_1(C_{\Phi_f}) \cup v_1(H_f) \cup w_1(R_{\Phi_f}),$$

не увеличится, то есть

$$\mathcal{L}(w) \geq \mathcal{L}(v_1 \cup w_2).$$

Рассмотрим теперь случай

$$w'_1(C_{\Phi_f}) \cup w_1(R_{\Phi_f}) \neq \emptyset.$$

Тогда $\text{Ker}(\Phi_f) \cup v_1(H_f)$ является комплексом функции Φ_f , и $\mathcal{L}$ -сложность комплекса v_1 уменьшается при удалении граней комплекса $w'(C_{\Phi_f}) \cup w(R_{\Phi_f})$. Поэтому

$$\mathcal{L}(w) \geq \mathcal{L}(v_1 \cup w_2) > \mathcal{L}(\text{Ker}(\Phi_f) \cup v(H_f) \cup w_2),$$

и комплекс w не может быть $\mathcal{L}$ -минимальным для функции $\Phi_f \vee \Phi_f^*$.

Рассмотрим случай

$$v_1 = \text{Ker}(\Phi_f) \cup v_1(H_f), \quad |v_1(H_f)| > \binom{n-2}{m}.$$

Допустимо представление

$$v_1(H_f) = \hat{v}_1(H_f) \cup v'_1,$$

где $\hat{v}_1(H_f)$ — комплекс из $\binom{n-2}{m}$ граней размерности k , максимальных для множества S_{Φ_f} , и v'_1 — непустой комплекс из граней комплекса $v_1(H_f)$, не вошедших в $\hat{v}_1(H_f)$. Из комплекса $\hat{v}_1(H_f)$ заменой граней на изоморфные может быть получен комплекс $M(S_{\Phi_f})$ — L -минимальный комплекс для множества S_{Φ_f} . Поэтому для $\mathcal{L} \in \Lambda_\pi$

$$\mathcal{L}(\text{Ker}(\Phi_f) \cup \hat{v}_1(H_f) \cup v'_1 \cup w_2) = \mathcal{L}(\text{Ker}(\Phi_f) \cup M(S_{\Phi_f}) \cup v'_1 \cup w_2),$$

и для $\mathcal{L} \in \Lambda_l$ при условии $v'_1 \neq \emptyset$

$$\mathcal{L}(\text{Ker}(\Phi_f) \cup M(S_{\Phi_f}) \cup v'_1 \cup w_2) > \mathcal{L}(\text{Ker}(\Phi_f) \cup M(S_{\Phi_f}) \cup w_2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(w) &\geq \mathcal{L}(v_1 \cup w_2) \\ &= \mathcal{L}(\text{Ker}(\Phi_f) \cup v_1(H_f) \cup w_2) > \mathcal{L}(\text{Ker}(\Phi_f) \cup M(S_{\Phi_f}) \cup w_2), \end{aligned}$$

и комплекс w не может быть $\mathcal{L}$ -минимальным для функции $\Phi_f \vee \Phi_f^*$.

В случае $w_2 \notin \Omega^n(\Phi_f^*)$ доказательство выполняется аналогично: уменьшением ранга и удалением некоторых граней из w_2 может быть получен такой комплекс $\hat{w}_2$, что комплекс $w_1 \cup \hat{w}_2$ функции $\Phi_f \vee \Phi_f^*$ будет иметь меньшую $\mathcal{L}$ -сложность, чем комплекс $w = w_1 \cup w_2$. Поэтому комплекс w не может быть $\mathcal{L}$ -минимальным для функции $\Phi_f \vee \Phi_f^*$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Верхние оценки являются следствием леммы 1. Нижняя оценка вытекает из существования функции $f \in \mathcal{F}_{m-k, m}^{n-2}$, где $m = \lfloor (n-2)/2 \rfloor - 1$ и $k = \lfloor 0,1052m \rfloor$, для которой

$$\log \tau(f) \gtrsim c_\tau n 2^{n-3}.$$

Поэтому, в силу лемм 2–4, при $n \rightarrow \infty$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \log \tau(\Phi_f \vee \Phi_f^*) &\geq 2 \log \tau(f) \gtrsim 2c_\tau n 2^{n-3} = c_\tau n 2^{n-2}, \\ \log \mu_{\mathcal{L}}(\Phi_f \vee \Phi_f^*) &= O(\sqrt{n} 2^n) \end{aligned}$$

для любой меры сложности $\mathcal{L} \in \Lambda_\pi \cap \Lambda_l$. Это означает, что для класса мер сложности $\Lambda_\pi \cap \Lambda_l$ справедлива нижняя оценка

$$\log \chi_{\Lambda_\pi \cap \Lambda_l}(n) \gtrsim \frac{c_\tau}{4} n 2^n - C \sqrt{n} 2^n \sim \frac{c_\tau}{4} n 2^n,$$

здесь C — некоторая положительная постоянная. Теорема доказана.

Доказательство леммы 5. Для меры сложности $\mathcal{L} \in \Lambda_L$ любой $\mathcal{L}$ -минимальный комплекс является тупиковым, то есть все грани в нем максимальные. Поэтому в тупиковых и $\mathcal{L}$ -минимальных комплексах функции Ψ_f вершины множества S_{Ψ_f} покрываются комплексом $\text{Ker}(\Psi_f)$ — одномерными ядровыми гранями функции Ψ_f , для которых вершины множества S_{Ψ_f} являются собственными. При этом

$$N_{\Psi_f} \cap B_{\bar{x}_{n-1}x_n}^n = H_f \cup R_{\Psi_f}$$

и

$$H_f \cap R_{\Psi_f} = \emptyset,$$

где R_{Ψ_f} есть множество регулярных вершин ядровых граней.

Для функции $f \in P_{n-3}$ из условия $\tau(f) > 1$ следует, что множество N_f не является гранью и монотонным множеством в B^{n-3} , так как в таких случаях $\tau(f) = 1$. Следовательно, множество вершин H_f в грани $B_{\bar{x}_{n-2}\bar{x}_{n-1}x_n}^n$ также не является гранью и монотонным множеством.

Сначала покажем, что

$$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}(\Psi_f) = \{B_{\bar{x}_{n-2}\bar{x}_{n-1}x_n}^n\} \cup \text{Ker}(\Psi_f),$$

то есть

$$\mu_{\mathcal{L}}(\Psi_f) = 1.$$

Множество вершин H_f в любом $\mathcal{L}$ -минимальном комплексе содержится в гранях, которые не входят в множество $\text{Ker}(\Psi_f)$.

Если

$$w = \{I\} \cup \text{Ker}(\Psi_f)$$

есть тупиковый комплекс функции Ψ_f , где максимальная грань $I \neq B_{\bar{x}_{n-2}\bar{x}_{n-1}x_n}^n$, то

$$I = H_f \cup \hat{H}_f.$$

Тогда множество

$$H_f = I \cap B_{\bar{x}_{n-2}\bar{x}_{n-1}x_n}^n,$$

является гранью, что невозможно при $\tau(f) > 1$.

Если

$$w = \{I_1, \dots, I_l\} \cup \text{Ker}(\Psi_f)$$

есть тупиковый комплекс функции Ψ_f , где максимальные грани $I_j \neq B_{\bar{x}_{n-2}\bar{x}_{n-1}x_n}^n$ для $j = 1, \dots, l$ и $l > 1$, то найдется грань $I \in \{I_1, \dots, I_l\}$, для которой $I \subseteq B_{\bar{x}_s\bar{x}_{n-1}x_n}^n$

и $1 \leq s \leq n-3$. Действительно, любая максимальная грань I функции Ψ_f , отличная от грани $B_{\bar{x}_{n-2}\bar{x}_{n-1}x_n}^n$ и содержащая вершину из множества H_f , содержится в множестве $H_f \cup \hat{H}_f \subset B_{\bar{x}_{n-1}x_n}^n$. Следовательно, $I \subseteq B_{x_s^\sigma \bar{x}_{n-1}x_n}^n$, где $1 \leq s \leq n-3$ и $\sigma \in \{0, 1\}$. Так как множество вершин H_f не является монотонным в грани $B_{\bar{x}_{n-2}\bar{x}_{n-1}x_n}^n$, то всегда существует такая грань I , что $\sigma = 0$, то есть $I \subseteq B_{\bar{x}_s \bar{x}_{n-1}x_n}^n$, где $1 \leq s \leq n-3$. В противном случае все грани $\{I_1, \dots, I_l\}$ содержат максимальную вершину грани $B_{\bar{x}_{n-2}\bar{x}_{n-1}x_n}^n$ и множество вершин H_f является монотонным в грани $B_{\bar{x}_{n-2}\bar{x}_{n-1}x_n}^n$.

Так как $\mathcal{L} \in \Lambda_L$, в силу аксиомы монотонности

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(w) &= \mathcal{L}(\{I_1, I_2, \dots\} \cup \text{Ker}(\Psi_f)) \\ &> \mathcal{L}(\{I\} \cup \text{Ker}(\Psi_f)) \geq \mathcal{L}(\{B_{\bar{x}_s \bar{x}_{n-1}x_n}^n\} \cup \text{Ker}(\Psi_f)). \end{aligned}$$

Так как $\mathcal{L} \in \Lambda_\pi$, верно, что

$$\mathcal{L}(\{B_{\bar{x}_s \bar{x}_{n-1}x_n}^n\} \cup \text{Ker}(\Psi_f)) = \mathcal{L}(\{B_{\bar{x}_{n-2}\bar{x}_{n-1}x_n}^n\} \cup \text{Ker}(\Psi_f)).$$

Следовательно,

$$\mathcal{L}(w) > \mathcal{L}(\{B_{\bar{x}_{n-2}\bar{x}_{n-1}x_n}^n\} \cup \text{Ker}(\Psi_f)),$$

и комплекс w не является $\mathcal{L}$ -минимальным для функции Ψ_f .

Теперь покажем, что

$$\mathcal{T}(\Psi_f) \supset \mathcal{T}(H_f \cup \hat{H}_f) \cup \text{Ker}(\Psi_f)$$

и

$$\tau(H_f \cup \hat{H}_f) \geq \tau(f).$$

Отображение

$$\mathcal{F}(x_1, \dots, x_{n-3}) = (x_1, \dots, x_{n-3}, 0, 0, 1)$$

определяет изоморфизм единичного куба B^{n-3} и грани $B_{\bar{x}_{n-2}\bar{x}_{n-1}x_n}^n \subset B^n$ ранга 3, при котором сохраняется бинарное отношение смежности вершин в единичном кубе. Соответственно, сохраняются свойства принадлежности вершины подмножеству, максимальности грани для некоторого подмножества вершин, неприводимости комплекса граней и другие.

При отображении $\mathcal{F}$ произвольная грань

$$g = B_{i_1, \dots, i_r}^{n-3, \sigma_1, \dots, \sigma_r} \subset B^{n-3}$$

отображается в грань

$$\mathcal{F}(g) = B_{i_1, \dots, i_r, n-2, n-1, n}^{n, \sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, 0, 1} \subseteq B_{\bar{x}_{n-2}\bar{x}_{n-1}x_n}^n \subset B^n.$$

Для комплекса граней

$$M = \{g_j \subset B^{n-3}, j = 1, \dots, l\}$$

обозначим через

$$\mathcal{F}(M) = \{\mathcal{F}(g_j), j = 1, \dots, l\}$$

комплекс граней куба B^n , которые содержатся в грани $B_{\bar{x}_{n-2}\bar{x}_{n-1}x_n}^n$.

При изоморфном отображении различные тупиковые комплексы в кубе B^{n-3} преобразуются в различные тупиковые комплексы в кубе B^n . Следовательно,

$$\mathcal{T}(H_f) = \{\mathcal{I}(T), T \in \mathcal{T}(f)\}$$

есть множество тупиковых комплексов для множества $H_f \subset B^n$.

Для грани $B_{i_1, \dots, i_r, n-2, n-1, n}^{n, \sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, 0, 1} \subset B_{\bar{x}_{n-2}\bar{x}_{n-1}x_n}^n$ определим преобразование

$$\mathcal{D}_{n-2}(B_{i_1, \dots, i_r, n-2, n-1, n}^{n, \sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, 0, 1}) = B_{i_1, \dots, i_r, n-1, n}^{n, \sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, 1} \subset B_{\bar{x}_{n-1}x_n}^n,$$

получаемое при удалении координаты $n-2$ из направления грани.

Для комплекса граней

$$M = \{g_j \subset B_{\bar{x}_{n-2}\bar{x}_{n-1}x_n}^n, j = 1, \dots, l\}$$

обозначим через

$$\mathcal{D}_{n-2}(M) = \{\mathcal{D}_{n-2}(g_j), j = 1, \dots, l\}$$

комплекс граней куба B^n , содержащихся в грани $B_{\bar{x}_{n-1}x_n}^n$. Тогда $\{\mathcal{D}_{n-2}(T), T \in \mathcal{T}(H_f)\}$ — множество различных тупиковых комплексов для множества $H_f \cup \hat{H}_f \subseteq B_{\bar{x}_{n-1}x_n}^n$, так как каждая грань $\mathcal{D}_{n-2}(g)$ имеет собственную вершину, которая совпадает с собственной вершиной грани $g \in T$ и содержится в $H_f \subseteq B_{\bar{x}_{n-2}\bar{x}_{n-1}x_n}^n$. Следовательно,

$$\mathcal{T}(H_f \cup \hat{H}_f) \supseteq \{\mathcal{D}_{n-2}(T), T \in \mathcal{T}(H_f)\}$$

и

$$\tau(H_f \cup \hat{H}_f) \geq \tau(f).$$

При объединении любого тупикового комплекса $T \in \mathcal{T}(H_f \cup \hat{H}_f)$ с комплексом ядерных граней $\text{Ker}(\Psi_f)$ грани комплекса T остаются максимальными, и их собственные вершины остаются собственными в объединенном комплексе, так как вершины из множества $B_{x_{n-2}\bar{x}_{n-1}x_n}^n \setminus \hat{H}_f$ и все вершины, соседние с вершинами из множества H_f в гранях $B_{\bar{x}_{n-2}\bar{x}_{n-1}x_n}^n$ и $B_{\bar{x}_{n-2}x_{n-1}x_n}^n$, не принадлежат N_{Ψ_f} . Поэтому

$$\mathcal{T}(\Psi_f) \supset \mathcal{M}_{\mathcal{L}}(\Psi_f) = \{B_{\bar{x}_{n-2}\bar{x}_{n-1}x_n}^n\} \cup \text{Ker}(\Psi_f),$$

$$\mathcal{T}(\Psi_f) \supset \mathcal{T}(H_f \cup \hat{H}_f) \cup \text{Ker}(\Psi_f), \quad \mathcal{M}_{\mathcal{L}}(\Psi_f) \cap (\mathcal{T}(H_f \cup \hat{H}_f) \cup \text{Ker}(\Psi_f)) = \emptyset.$$

Тогда

$$\tau(\Psi_f) \geq \tau(H_f \cup \hat{H}_f) + 1 > \tau(f).$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $f \in P_{n-3}$ и $\tau(f) = \tau(n-3) > 1$ при $n > 5$. Тогда из леммы 5 следует, что $\tau(\Psi_f) > \tau(f) = \tau(n-3)$ и $\mu_{\mathcal{L}}(\Psi_f) = 1$ для любой меры сложности $\mathcal{L} \in \Lambda_{\pi} \cap \Lambda_L$. Следовательно,

$$\tau(n \mid \mu_{\Lambda_{\pi} \cap \Lambda_L} = 1) \geq \tau(\Psi_f) > \tau(n-3).$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Верхние оценки являются следствием леммы 1. Нижняя оценка вытекает из теоремы 2 и оценки

$$\log \tau(n-3) \gtrsim c_\tau(n-3)2^{n-3} \sim c_\tau n 2^{n-3},$$

из которой следует оценка

$$\log \tau(n \mid \mu_{\Lambda_\pi \cap \Lambda_L} = 1) > \log \tau(n-3) \gtrsim \frac{c_\tau}{8} n 2^n.$$

Теорема доказана.

Доказательство леммы 6. Для функции $\Phi_f \in P_n$, где функция $f \in P_{n-2}$, определим подмножество вершин

$$\Delta_f = \{\tilde{x} \in B^n \mid x_{n-1} \cdot x_n \cdot f(x_1, \dots, x_{n-2}) = 1\} \subset B^n \setminus N_{\Phi_f}.$$

Для различных функций $f, g \in P_{n-2}$ верно, что $\Delta_f \neq \Delta_g$. Тогда $B^n \setminus N_{\Phi_f} \neq B^n \setminus N_{\Phi_g}$, то есть функции Φ_f и Φ_g являются различными. Лемма доказана.

Доказательство леммы 7. Для функции $\Psi_f \in P_n$, где функция $f \in P_{n-3}$, определим подмножество вершин

$$\begin{aligned} \Delta_f &= \hat{H}_f = N_{\Psi_f} \cap B_{x_{n-2}\bar{x}_{n-1}x_n}^n \\ &= \{\tilde{x} \in B^n \mid x_{n-2} \cdot \bar{x}_{n-1} \cdot x_n \cdot f(x_1, \dots, x_{n-3}) = 1\}. \end{aligned}$$

Для различных функций $f, g \in P_{n-3}$ верно, что $\Delta_f \neq \Delta_g$. Тогда $N_{\Psi_f} \neq N_{\Psi_g}$, то есть функции Ψ_f и Ψ_g являются различными. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4. Получим нижнюю оценку $p_n(t, \tau)$. Определим подмножество функций $\mathcal{P}_{n,m,k}(t) \subseteq P_n(t, \tau) \subset P_n$, где

$$\mathcal{P}_{n,m,k}(t) = \{f \in \mathcal{F}_{m-k,m}^n \vee \mathcal{F}_{n-m,n-m+k}^n \in P_n \mid \log \tau(f) \gtrsim t c_\tau n 2^n\}.$$

Покажем, что

$$\log p_n(t, \tau) \geq \log |\mathcal{P}_{n,m,k}(t)| \gtrsim \sigma_\tau \hbar(t) 2^n$$

при $n \rightarrow \infty$ для $m = \lfloor n/2 \rfloor - 1$ и $k = \lfloor 0,1052m \rfloor$.

Для доказательства используется конструкция построения множеств тупиковых комплексов в поясе единичного куба, изложенная в [12]. Положим

$$m = \lfloor n/2 \rfloor - 1, \quad p = \lfloor \sqrt{n} \log n \rfloor, \quad k = \lfloor xm \rfloor, \quad k_0 = \lfloor ym \rfloor,$$

где

$$x = 0,1052, \quad y = 0,2104, \quad \lambda = 1,0087.$$

При указанных значениях параметров существует тупиковый комплекс k_0 -мерных граней $T_0 \in \mathcal{T}_{m-k_0,m}^n$ такой, что множество собственных вершин $C_{T_0} \subset S_{m-p,m}^n$ и

$$|T_0| = |C_{T_0}| \gtrsim |S_{m-p,m}^n| \varphi(\lambda, y) \sim 2^{n-1} \varphi(\lambda, y).$$

Произвольное подмножество граней $T \subseteq T_0$ также образует тупиковый комплекс $T \in \mathcal{T}_{m-k_0, m}^n$ с множеством собственных вершин $C_T \subseteq C_{T_0} \subset S_{m-p, m}^n$. По тупиковому комплексу T может быть определено множество тупиковых комплексов k -мерных граней $\Omega_\tau^n(T, C_T, S_{m-k_0, m}^n, p, k) \subseteq \mathcal{T}_{m-k, m}^n$. При этом, множеством собственных вершин граней в любом тупиковом комплексе является множество вершин C_T , и справедлива оценка

$$\begin{aligned} \log |\mathcal{T}_{m-k, m}^n| &\geq \log |\Omega_\tau^n(T, C_T, S_{m-k_0, m}^n, p, k)| \\ &\geq |T|(ny/2)H(x/y) \\ &\geq (|T|/|T_0|)n2^{n-2}C(x, y, \lambda) \\ &= (|T|/|T_0|)c_\tau n2^{n-1}, \end{aligned}$$

где

$$C(x, y, \lambda) = y\varphi(\lambda, y)H(x/y) = 2c_\tau.$$

Будем рассматривать тупиковые комплексы одновременно для двух подмножеств: $T_0 \in \mathcal{T}_{m-k_0, m}^n$ в поясе $S_{m-k_0, m}^n$ ниже слоя $\lfloor n/2 \rfloor$, и $\mathcal{A}(T_0) \in \mathcal{T}_{n-m, n-m+k_0}^n$ в поясе $S_{n-m, n-m+k_0}^n$, расположенном выше слоя $\lfloor n/2 \rfloor$, где автоморфизм $\mathcal{A}: P_n \rightarrow P_n$ определяется отображением

$$f_{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n).$$

Обозначим через $R(t, T_0)$ множество тупиковых комплексов, которые могут быть получены из тупикового комплекса $T_0 \cup \mathcal{A}(T_0)$ выбором не менее, чем $t|T_0 \cup \mathcal{A}(T_0)|$ граней. Произвольно выбранное подмножество граней $T \subseteq T_0 \cup \mathcal{A}(T_0)$ образует тупиковый комплекс $T \in \mathcal{T}_{m-k_0, m}^n \cup \mathcal{T}_{n-m, n-m+k_0}^n$ с множеством собственных вершин C_T , при этом $C_T \cap C_{T_0} \subset S_{m-p, m}^n$ и $C_T \cap \mathcal{A}(C_{T_0}) \subset S_{n-m, n-m+p}^n$.

По тупиковому комплексу $T \in R(t, T_0)$ может быть построено множество тупиковых комплексов k -мерных граней $\Omega_\tau^n(T) \subseteq \mathcal{T}_{m-k, m}^n \cup \mathcal{T}_{n-m, n-m+k}^n$, которое представляется в виде прямого объединения двух множеств тупиковых комплексов для соответствующих подмножеств куба B^n :

$$\Omega_\tau^n(T \cap T_0, C_T \cap C_{T_0}, S_{m-k_0, m}^n, p, k) \subseteq \mathcal{T}_{m-k, m}^n$$

и

$$\Omega_\tau^n(T \cap \mathcal{A}(T_0), C_T \cap \mathcal{A}(C_{T_0}), S_{n-m, n-m+k_0}^n, p, k) \subseteq \mathcal{T}_{n-m, n-m+k}^n.$$

Так как

$$\begin{aligned} |C_T \cap C_{T_0}| + |C_T \cap \mathcal{A}(C_{T_0})| &= |C_T| \\ &\geq t|C_{T_0} \cup \mathcal{A}(C_{T_0})| \\ &= 2t|T_0|, \end{aligned}$$

при выбранных значениях параметров

$$\begin{aligned} \log |\Omega_\tau^n(T)| &\geq (|C_T \cap C_{T_0}| + |C_T \cap \mathcal{A}(C_{T_0})|)(ny/2)H(x/y) \\ &\geq 2t|T_0|(ny/2)H(x/y) \\ &\geq 2tn2^{n-2}C(x, y, \lambda) \\ &= tc_\tau n2^n. \end{aligned}$$

Все комплексы из множества $\Omega_\tau^n(T)$ являются тупиковыми комплексами k -мерных граней из множества комплексов $\mathcal{T}_{m-k,m}^n \cup \mathcal{T}_{n-m,n-m+k}^n$. Поэтому существует такая функция $f_T \in \mathcal{F}_{m-k,m}^n \vee \mathcal{F}_{n-m,n-m+k}^n$, что

$$\begin{aligned} \log \tau(f_T) &\geq \log(2^{-2^n} |\Omega_\tau^n(T)|) \\ &\gtrsim tc_\tau n 2^n - 2^n \sim tc_\tau n 2^n. \end{aligned}$$

Тупиковые комплексы для различных подмножеств $T \in R(t, T_0)$ отличаются на множестве C_T собственных вершинах тупиковых граней. Поэтому для различных комплексов T функции f_T являются различными и число таких функций не меньше, чем $|R(t, T_0)|$. Тогда

$$\{f_T \mid T \in R(t, T_0)\} \subseteq \mathcal{P}_{n,m,k}(t), \quad |R(t, T_0)| = \sum_{s \geq tz}^z \binom{z}{s},$$

где

$$z = |T_0 \cup \mathcal{A}(T_0)| = 2|T_0| \asymp 2^n.$$

Так как

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \log \sum_{s \geq tz}^z \binom{z}{s} = \hbar(t),$$

для фиксированного t , где $0 < t < 1$, получаем, что

$$\log \sum_{s \geq tz}^z \binom{z}{s} \sim z \hbar(t)$$

при $z \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\log |R(t, T_0)| \sim 2|T_0| \hbar(t) \sim \sigma_\tau 2^n \hbar(t),$$

где

$$\sigma_\tau = \varphi(1,0087, 0,2104) > 0,4025.$$

Перейдем к обоснованию нижней оценки для $p_n(t, \chi_{\Lambda_\pi \cap \Lambda_I})$. Для множества функций

$$P_{n-2,m,k}(t) = t \{f \in \mathcal{F}_{m-k,m}^{n-2} \vee \mathcal{F}_{n-2-m,n-2-m+k}^{n-2} \mid \log \tau(f) \gtrsim tc_\tau n 2^{n-2}\},$$

где

$$m = \lfloor (n-2)/2 \rfloor - 1, \quad k = \lfloor 0,1052m \rfloor,$$

справедлива оценка

$$\log |\mathcal{P}_{n-2,m,k}(t)| \gtrsim \sigma_\tau \hbar(t) 2^{n-2}.$$

Обозначим через

$$\Phi[\mathcal{P}_{n-2,m,k}(t)] = \{\Phi_f, f \in \mathcal{P}_{n-2,m,k}(t) \subset P_{n-2}\}$$

подмножество функций P_n , которые получаются при применении преобразования Φ к функциям подмножества $\mathcal{P}_{n-2,m,k}(t)$.

В силу лемм 2–4, для функций из $\Phi[\mathcal{P}_{n-2,m,k}(t)]$ справедливо неравенство

$$\log \chi_{\Lambda_\pi \cap \Lambda_l}(f) \gtrsim tc_\tau n 2^{n-2}.$$

В силу леммы 6, при применении преобразования Φ к различным функциям получаются различные функции, то есть

$$|\Phi[\mathcal{P}_{n-2,m,k}(t)]| = |\mathcal{P}_{n-2,m,k}(t)|.$$

Поэтому справедлива оценка

$$\log p_n(t, \chi_{\Lambda_\pi \cap \Lambda_l}) \geq \log |\mathcal{P}_{n-2,m,k}(t)| \gtrsim \sigma_\tau \hbar(t) 2^{n-2}.$$

Получим нижнюю оценку для $p_n(t, \tau \mid \mu_{\Lambda_\pi \cap \Lambda_L} = 1)$. Для множества функций

$$\mathcal{P}_{n-3,m,k}(t) = \{f \in \mathcal{F}_{m-k,m}^{n-3} \vee \mathcal{F}_{n-3-m,n-3-m+k}^{n-3} \mid \log \tau(f) \gtrsim tc_\tau n 2^{n-3}\},$$

где

$$m = \lfloor (n-3)/2 \rfloor - 1, \quad k = \lfloor 0,1052m \rfloor,$$

справедлива оценка

$$\log |\mathcal{P}_{n-3,m,k}(t)| \gtrsim \sigma_\tau \hbar(t) 2^{n-3}.$$

Обозначим через

$$\Psi[\mathcal{P}_{n-3,m,k}(t)] = \{\Psi_f, f \in \mathcal{P}_{n-3,m,k}(t) \subset P_{n-3}\}$$

подмножество функций P_n , которые получаются при применении преобразования Ψ к функциям подмножества $\mathcal{P}_{n-3,m,k}(t)$.

В силу леммы 5, для функций из $\Psi[\mathcal{P}_{n-3,m,k}(t)]$ справедливо неравенство

$$\log \tau(f \mid \mu_{\Lambda_\pi \cap \Lambda_L}(f) = 1) \gtrsim tc_\tau n 2^{n-3}.$$

В силу леммы 7, при применении преобразования Ψ к различным функциям получаются различные функции, то есть

$$|\Psi[\mathcal{P}_{n-3,m,k}(t)]| = |\mathcal{P}_{n-3,m,k}(t)|.$$

Поэтому справедлива оценка

$$\log p_n(t, \tau \mid \mu_{\Lambda_\pi \cap \Lambda_L} = 1) \geq \log |\mathcal{P}_{n-3,m,k}(t)| \gtrsim \sigma_\tau \hbar(t) 2^{n-3}.$$

Теорема доказана.

Список литературы

1. Журавлев Ю. И., Алгоритмы построения минимальных дизъюнктивных нормальных форм для функций алгебры логики. В сб.: *Дискретная математика и математические вопросы кибернетики*. Наука, Москва, 1974, с. 67–98.
2. Васильев Ю. Л., Глаголев В. В., Метрические свойства дизъюнктивных нормальных форм. В сб.: *Дискретная математика и математические вопросы кибернетики*. Наука, Москва, 1974, с. 99–148.

3. Сапоженко А. А., Чухров И. П., Минимизация булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм. В сб.: *Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей, Математическая статистика, Теоретическая кибернетика*. ВИНТИ АН СССР, Москва, 1987, с. 68–116.
4. Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику*. Высшая школа, Москва, 2003.
5. Журавлев Ю. И., Оценка для числа тупиковых д.н.ф. функций алгебры логики. *Сибирский матем. журнал* (1962) **3**, №5, 802–804.
6. Глаголев В. В., Некоторые оценки д.н.ф. булевых функций алгебры логики. *Проблемы кибернетики* (1967) **19**, 75–94.
7. Сапоженко А. А., О наибольшей длине тупиковой дизъюнктивной нормальной формы у почти всех булевых функций. *Матем. заметки* (1968) **4**, №4, 649–658.
8. Караханян Л. М., Сапоженко А. А., Оценки параметров д.н.ф. не всюду определенных (частичных) функций алгебры логики. В сб.: *Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике*, Горький, 1979, с. 48–56.
9. Чухров И. П., Оценка числовых характеристик поясковых функций. В сб.: *Тез. докл. V Всесоюзной конф. по проблемам теоретической кибернетики*, Новосибирск, 1980, с. 179–180.
10. Чухров И. П., Оценки числа минимальных дизъюнктивных нормальных форм для поясковой функции. *Методы дискретного анализа в исследованиях функциональных систем* (1981) **36**, 74–92.
11. Чухров И. П., О числе тупиковых дизъюнктивных нормальных форм. *Доклады АН СССР* (1982) **262**, №6, 1329–1332.
12. Чухров И. П., О тупиковых комплексах граней в единичном кубе. *Дискретная математика* (2011) **23**, №1, 132–158.

Статья поступила 8.09.2011.