Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Тарасов, Обобщение критерия биюнктивности Шеффера, *Дискрет. матем.*, 2012, том 24, выпуск 2, 92–99

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1186>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 17:24:16

Обобщение критерия биюнктивности Шефера

© 2012 г. А. В. Тарасов

Критерий биюнктивности Шефера состоит в том, что булева функция f биюнктивна, то есть представима в виде 2-КНФ, тогда и только тогда, когда ее множество выполняющих векторов E_f замкнуто относительно операции, задаваемой покоординатным применением функции голосования от трех переменных. В данной работе приведено обобщение данного критерия на случай, когда множество E_f замкнуто относительно операции, задаваемой покоординатным применением пороговой функции из более широкого класса.

Введем следующие обозначения: пусть V_n есть множество двоичных векторов длины n ; 1_n есть вектор из V_n , состоящий из единиц; если $\alpha \in V_n$, то через $\alpha(i)$ обозначим значение i -й координаты вектора α , $i = 1, 2, \dots, n$; и пусть $f_{i_1 \dots i_k}^{a_1 \dots a_k}(x_1, \dots, x_n)$ — подфункция булевой функции $f(x_1, \dots, x_n): V_n \rightarrow \{0, 1\}$, полученная фиксацией переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ значениями $a_1, \dots, a_k$, $1 \leq k \leq n$.

Для всякой булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ множество

$$E_f = \{\alpha = (a_1, \dots, a_n): f(a_1, \dots, a_n) = 1\}$$

будем называть множеством выполняющих векторов функции f .

Символами $\lfloor \cdot \rfloor$ и $\lceil \cdot \rceil$ обозначим, соответственно, нижние и верхние целые части вещественных чисел.

Булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ называется

биюнктивной, если $f \equiv 1$ или существует представление функции f в виде 2-КНФ:

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i,1}}^{a_{i,1}} \vee x_{s_{i,2}}^{a_{i,2}}), \quad a_{i,1}, a_{i,2} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, t; \quad (1)$$

слабо положительной, если $f \equiv 1$ или существует представление f в виде следующей КНФ:

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i,1}}^{a_i} \vee x_{s_{i,2}} \vee \dots \vee x_{s_{i,k_i}}), \quad a_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, t; \quad (2)$$

слабо отрицательной, если $f \equiv 1$ или существует представление f в виде следующей КНФ:

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigwedge_{i=1}^t (x_{s_{i,1}}^{a_i} \vee \bar{x}_{s_{i,2}} \vee \dots \vee \bar{x}_{s_{i,k_i}}), \quad a_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, t. \quad (3)$$

Множества всех функций из этих классов обозначим Bi , WP , WN соответственно. Формулы (1)–(3) для классов функций Bi , WP , WN будем называть приведенными представлениями. В [2–4] показано, что классы Bi , WP , WN , наряду с классом функций, представимых в виде произведения аффинных функций, порождают полиномиально решаемые классы систем уравнений без ограничений на выбор неизвестных и с ограничениями на выбор функций, исследован ряд их свойств.

Для произвольной булевой функции f элементарную дизъюнкцию φ , удовлетворяющую условию $f \cdot \varphi \equiv f$, будем называть имплицентой функции f , а если для любой ее части φ' условие $f \cdot \varphi' \equiv f$ не выполнено, то такую имплиценту назовем простой.

Длиной элементарной дизъюнкции назовем число входящих в нее переменных. Подкласс класса слабо положительных функций, в приведенном представлении которых вида (2) имплиценты, содержащие переменную с отрицанием, имеют длину не более k (то есть $k_i \leq k$), а остальные — длину не более r , обозначим через $WP_{r,k}$. Аналогичным образом определяется подкласс $WN_{r,k}$ класса слабо отрицательных функций, в приведенном представлении которых вида (3) имплиценты, содержащие переменную без отрицания, имеют длину не более k , а остальные имплиценты — длину не более r . В дальнейшем будем предполагать, что имплиценты в приведенных представлениях (1)–(3) являются простыми, то есть их собственные подформулы не являются имплицентами рассматриваемых функций.

Пусть $r \geq 2$, $1 \leq k \leq r$. Определим пороговую функцию $v_{r,k}$ по правилу

$$v_{r,k}(x_1, x_2, \dots, x_r) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 + x_2 + \dots + x_r \geq k, \\ 0, & \text{если } x_1 + x_2 + \dots + x_r < k. \end{cases} \quad (4)$$

Легко видеть, что

$$v_{r,k}(x_1, x_2, \dots, x_r) = \bigvee_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r} x_{i_1} \cdots x_{i_k}, \quad (5)$$

в частности,

$$v_{3,2}(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3.$$

Определим функцию

$$w_{r,k} = v_{r,k} \oplus 1,$$

которая, исходя из (5), может быть задана формулой:

$$w_{r,k}(x_1, x_2, \dots, x_r) = \bigwedge_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r} (\bar{x}_{i_1} \vee \dots \vee \bar{x}_{i_k}). \quad (6)$$

Определим r -арные операции $\tilde{v}_{r,k}$ и $\tilde{w}_{r,k}$ на множестве V_n как операции покоординатного применения функций, задаваемых равенствами (5) и (6).

Множество $M \subset V_n$ будем называть $\tilde{v}_{r,k}$ -замкнутым ($\tilde{w}_{r,k}$ -замкнутым), если для любых $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in M$ вектор $\tilde{v}_{r,k}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in M$ (соответственно $\tilde{w}_{r,k}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in M$).

В работах Т. Шефера [1] и С. П. Горшкова [2] доказан критерий бионктивности, который во введенных обозначениях можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1. Булева функция $f(x_1, \dots, x_n)$ бионктивна тогда и только тогда, когда множество E_f является $\tilde{v}_{3,2}$ -замкнутым.

Докажем обобщение данной теоремы. Сначала напомним некоторые понятия, сформулируем и докажем промежуточные результаты.

Если $f(x_1, \dots, x_n)$ — булева функция, то обозначим через $[f]$ класс функций, представимых формулами над функцией f . В данный класс будут входить функции, получаемые из функции f с помощью операций отождествления переменных и суперпозиций над функцией f (см. [5, 6]).

Лемма 1. Пусть $r \geq 3$, $2 \leq k \leq r - 1$, $m = \lceil r/k - 1 \rceil$. Тогда $v_{m,2} \in [v_{r,k}]$, $w_{m,2} \in [w_{r,k}]$.

Доказательство. По условию леммы, $r = m(k - 1) + s$, где $0 \leq s < k - 1$. Рассмотрим функцию

$$f(x_1, \dots, x_m) = v_{r,k}(\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{k-1}, \underbrace{x_2, \dots, x_2}_{k-1}, \dots, \underbrace{x_{m-1}, \dots, x_{m-1}}_{k-1}, \underbrace{x_m, \dots, x_m}_s). \quad (7)$$

Воспользуемся представлением (5) для функции $v_{r,k}$ и выпишем ДНФ функции f . Очевидно, что данная ДНФ будет содержать все $\binom{m}{2}$ элементарных конъюнкций вида $x_i x_j$, $1 \leq i < j \leq m$, и не будет содержать элементарных конъюнкций вида x_i , $1 \leq i \leq m$. Далее, все остальные элементарные конъюнкции, получаемые из (5) путем отождествления переменных в соответствии с (7), будут, очевидно, поглощаться элементарными конъюнкциями длины 2. Поэтому

$$f(x_1, \dots, x_m) = v_{m,2}(x_1, \dots, x_m).$$

Аналогично проводится доказательство для функций $w_{m,2}$, $w_{r,k}$. Лемма доказана.

Следствием данной леммы является следующее утверждение.

Следствие 1. В условиях леммы 1, из $\tilde{v}_{r,k}$ -замкнутости множества $M \subset V_n$ следует его $\tilde{v}_{m,2}$ -замкнутость.

Доказательство. Если $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in M$, то

$$\tilde{v}_{m,2}(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \tilde{v}_{r,k}(\underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_1}_{k-1}, \underbrace{\alpha_2, \dots, \alpha_2}_{k-1}, \dots, \underbrace{\alpha_{m-1}, \dots, \alpha_{m-1}}_{k-1}, \underbrace{\alpha_m, \dots, \alpha_m}_s) \in M,$$

Следствие доказано.

Заметим, что функция $v_{3,2}$ является монотонной и самодвойственной, порождая замкнутый класс SM самодвойственных монотонных функций (см. [6]). На основе этого факта можно получить следующее обобщение теоремы 1.

Теорема 2. Функция f биунктивна тогда и только тогда, когда множество E_f замкнуто относительно покоординатного применения любой монотонной самодвойственной функции.

Доказательство. Если f биунктивна, то множество E_f является u -замкнутым для любой монотонной самодвойственной функции u , поскольку она лежит в классе $[v_{3,2}]$.

Пусть теперь $u \in [v_{3,2}]$ и множество E_f u -замкнуто. Следуя обозначениям книги [6], можно говорить о том, что замкнутый класс $[v_{3,2}]$ является подалгеброй алгебры булевых функций с операциями циклической перестановки, транспозиции, отождествления двух первых переменных, введения фиктивной переменной и операций суперпозиции вида

$$(h * g)(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n-1}) = h(g(x_1, \dots, x_m), x_{m+1}, \dots, x_{m+n-1}),$$

где $h(x_1, \dots, x_n), g(x_1, \dots, x_m)$ — функции из класса $[v_{3,2}]$.

Поскольку функция $v_{3,2}$ симметрическая, нет необходимости рассматривать применение операций циклического сдвига и транспозиции переменных. Аналогично, поскольку

$$v_{3,2}(x_1, x_1, x_2) = x_1,$$

можно не рассматривать операцию отождествления двух первых переменных.

Поэтому для доказательства теоремы достаточно рассмотреть случай, когда функция u получена из функции $v_{3,2}$ применением только одной из указанных операций, поскольку дальнейшее доказательство очевидным образом получается применением метода математической индукции.

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} u &= (v_{3,2} * v_{3,2})(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \\ &= v_{3,2}(v_{3,2}(x_1, x_2, x_3), x_4, x_5) \\ &= x_1 x_2 x_4 \vee x_1 x_3 x_4 \vee x_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_5 \vee x_1 x_3 x_5 \vee x_2 x_3 x_5 \vee x_4 x_5. \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$u(x_1, x_2, x_3, x_1, x_2) = v_{3,2}(x_1, x_2, x_3),$$

поэтому, если E_f u -замкнуто, то оно $v_{3,2}$ -замкнуто. Теорема доказана.

Таким образом, множество бионктивных функций совпадает с множеством булевых функций, замкнутых относительно покоординатного применения монотонных самодвойственных функций.

Прежде чем перейти к формулировке и доказательству основного результата данной статьи, сформулируем и докажем следующий несложный факт.

Лемма 2. Для произвольной булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ и произвольной элементарной дизъюнкции

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = x_{i_1}^{a_1} \vee \dots \vee x_{i_r}^{a_r}$$

следующие утверждения эквивалентны:

- (1) функция φ является простой имплицентовой функции f ;
- (2) выполнены условия

$$f_{i_1 \dots i_k}^{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_k} \equiv 0$$

и для всякого $j, 1 \leq j \leq k$,

$$f_{i_1 \dots i_{j-1} i_j i_{j+1} \dots i_k}^{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_{j-1} a_j \bar{a}_{j+1} \dots \bar{a}_k} \neq 0.$$

Доказательство. Пусть функция φ является простой имплицентовой функции f , но

$$f_{i_1 \dots i_{j-1} i_j i_{j+1} \dots i_k}^{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_{j-1} a_j \bar{a}_{j+1} \dots \bar{a}_k} \equiv 0$$

для некоторого $j, 1 \leq j \leq k$. Поскольку

$$f_{i_1 \dots i_k}^{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_k} \equiv 0,$$

верно, что

$$f_{i_1 \dots i_{j-1} i_{j+1} \dots i_k}^{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_{j-1} \bar{a}_{j+1} \dots \bar{a}_k} = x_{i_j}^{a_j} \cdot f_{i_1 \dots i_{j-1} i_j i_{j+1} \dots i_k}^{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_{j-1} a_j \bar{a}_{j+1} \dots \bar{a}_k} \vee x_{i_j}^{\bar{a}_j} \cdot f_{i_1 \dots i_{j-1} i_j i_{j+1} \dots i_k}^{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_{j-1} \bar{a}_j \bar{a}_{j+1} \dots \bar{a}_k} \equiv 0.$$

Тогда элементарная дизъюнкция

$$\varphi'(x_1, \dots, x_n) = x_{i_1}^{a_1} \vee \dots \vee x_{i_{j-1}}^{a_{j-1}} \vee x_{i_{j+1}}^{a_{j+1}} \vee \dots \vee x_{i_k}^{a_k},$$

являющаяся частью имплиценты φ , является, очевидно, имплицентами f . Пусть теперь выполнено условие 2 леммы. Поскольку

$$f_{i_1 \dots i_k}^{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_k} \equiv 0,$$

очевидно, что φ — имплицента f . Если эта имплицента не простая, то найдется ее часть

$$\varphi'(x_1, \dots, x_n) = x_{i_1}^{a_1} \vee \dots \vee x_{i_{j-1}}^{a_{j-1}} \vee x_{i_{j+1}}^{a_{j+1}} \vee \dots \vee x_{i_k}^{a_k},$$

являющаяся имплицентами.

В силу разложения

$$f_{i_1 \dots i_{j-1} i_{j+1} \dots i_k}^{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_{j-1} \bar{a}_{j+1} \dots \bar{a}_k} = x_{i_j}^{a_j} \cdot f_{i_1 \dots i_{j-1} i_j i_{j+1} \dots i_k}^{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_{j-1} a_j \bar{a}_{j+1} \dots \bar{a}_k} \vee x_{i_j}^{\bar{a}_j} \cdot f_{i_1 \dots i_{j-1} i_j i_{j+1} \dots i_k}^{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_{j-1} \bar{a}_j \bar{a}_{j+1} \dots \bar{a}_k} \equiv 0,$$

получаем, что

$$f_{i_1 \dots i_{j-1} i_j i_{j+1} \dots i_k}^{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_{j-1} a_j \bar{a}_{j+1} \dots \bar{a}_k} \equiv f_{i_1 \dots i_{j-1} i_j i_{j+1} \dots i_k}^{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_{j-1} \bar{a}_j \bar{a}_{j+1} \dots \bar{a}_k} \equiv 0,$$

что невозможно. Лемма доказана.

Теорема 3. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — булева функция,

$$m = \left\lceil \frac{r}{k-1} \right\rceil - 1, \quad 2 \leq k \leq \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor, \quad r \geq 4.$$

Если множество E_f является $\tilde{v}_{r,k}$ -замкнутым, то $f(x_1, \dots, x_n) \in \text{WP}_{m,2}$. При $k = 2$ данное условие является достаточным: множество E_f является $\tilde{v}_{r,2}$ -замкнутым тогда и только тогда, когда $f(x_1, \dots, x_n) \in \text{WP}_{r-1,2}$.

Доказательство. Докажем необходимость. В общем случае k — произвольное число, удовлетворяющее неравенствам $2 \leq k \leq \lfloor r/2 \rfloor$, и для функции $f(x_1, \dots, x_n)$ выполняется следующее свойство: если $\alpha_1, \dots, \alpha_r \subset E_f$, то $\tilde{v}_{r,k}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in E_f$.

Поскольку $k \leq \lfloor r/2 \rfloor$, то $k \leq r-k$ и для любых векторов $\alpha_1, \alpha_2 \in E_f$ верно включение

$$\tilde{v}_{r,k}(\underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_1}_k, \alpha_2, \dots, \alpha_2) = \alpha_1 \vee \alpha_2 \in E_f,$$

из которого, по критерию слабой положительности [2], заключаемся в том, что функция f слабо положительна тогда и только тогда, когда множество E_f замкнуто относительно операции покоординатной дизъюнкции, следует, что $f \in \text{WP}$.

Теперь воспользуемся доказанным выше следствием 1. Так как множество E_f является $\tilde{v}_{r,k}$ -замкнутым, то оно является $\tilde{v}_{m+1,2}$ -замкнутым, $m = \lceil r/(k-1) \rceil - 1$. Покажем, что в этом случае $f \in \text{WP}_{m,2}$.

Поскольку $f \in \text{WP}$, существует приведенное представление вида (2), в котором все имплиценты являются простыми. Имплиценты функции f такого приведенного представления (2) имеют вид либо $D = x_1 \vee \dots \vee x_q$, либо $D = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_q$, $1 \leq q \leq n$.

Рассмотрим первый случай

$$D = x_1 \vee \dots \vee x_q.$$

По лемме 2, для всякого i , $1 \leq i \leq q$, выполнено условие $f_{1\dots i\dots q}^{0\dots 1\dots 0} \neq 0$. Поэтому для функции f найдутся q выполняющих векторов вида

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (1, 0, \dots, 0, 0, \alpha_1(q+1), \dots, \alpha_1(n)), \\ \alpha_2 &= (0, 1, \dots, 0, 0, \alpha_2(q+1), \dots, \alpha_2(n)), \\ &\dots \\ \alpha_q &= (0, 0, \dots, 0, 1, \alpha_q(q+1), \dots, \alpha_q(n)).\end{aligned}$$

Легко видеть, что при $q \geq m+1$ применение операции $v_{m+1,2}$ к любым $m+1$ векторам из данной совокупности даст вектор

$$\delta = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_q, 0, \delta(q+1), \dots, \delta(n)) \notin E_D.$$

Получаем противоречие с предположением о том, что $q \geq m+1$. Следовательно, $q \leq m$.

Рассмотрим случай простой имплиценты

$$D = \bar{x}_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_q.$$

Покажем, что в этом случае $q \leq 2$. Аналогично вышесказанному, построим q выполняющих векторов:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (0, 0, \dots, 0, 0, \alpha_1(q+1), \dots, \alpha_1(n)), \\ \alpha_2 &= (1, 1, \dots, 0, 0, \alpha_2(q+1), \dots, \alpha_2(n)), \\ &\dots \\ \alpha_q &= (1, 0, \dots, 0, 1, \alpha_q(q+1), \dots, \alpha_q(n)).\end{aligned}$$

При $3 \leq q \leq m+1$ получаем, что вектор

$$\begin{aligned}\delta &= \tilde{v}_{m+1,2}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_q, \alpha_1, \dots, \alpha_1) \\ &= (1, 0, \dots, 0, \delta(q+1), \dots, \delta(n)) \notin E_f.\end{aligned}$$

Пусть теперь $q > r$. Тогда выберем вектор

$$\begin{aligned}\delta &= \tilde{v}_{r,2}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{m+1}) \\ &= (1, 0, \dots, 0, \delta(q+1), \dots, \delta(n)) \notin E_f.\end{aligned}$$

Таким образом, необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть $k = 2$ и $m = \lceil r/(k-1) \rceil - 1 = r-1$. Предположим, что $f(x_1, \dots, x_n) \in \text{WP}_{r-1,2}$ и $\bigwedge_{i=1}^{\mu} D_i$ — ее соответствующая приведенная КНФ. Пусть теперь $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ — произвольный набор из r выполняющих векторов функции $f(x_1, \dots, x_n)$. Очевидно, что произвольный вектор из этого набора является выполняющим для элементарной дизъюнкции D_i , $i \in \{1, \dots, \mu\}$. Покажем, что при этом вектор $\delta = \tilde{v}_{r,2}(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ также является выполняющим и для произвольной элементарной дизъюнкции D_i , $i \in \{1, \dots, \mu\}$. Из этого факта будет следовать, что вектор δ является

также выполняющим для функции $f(x_1, \dots, x_n)$. В соответствии с условием теоремы, с точностью до перестановки переменных, элементарные дизъюнкции D_i имеют вид либо $D = x_1 \vee \dots \vee x_l$, где $l \leq r - 1$, либо $D = \bar{x}_1 \vee x_2$.

Рассмотрим первый случай, когда $D = x_1 \vee \dots \vee x_l$. Так как $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in E_f$, то $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in E_D$. Значит, каждый из этих векторов содержит по крайней мере по одной единице на местах с 1-го по l -е. Поскольку $l < r$, то найдется координата i , $1 \leq i \leq l$, такая, что хотя бы у двух из указанных векторов i -я координата равна 1. В этом случае i -я координата вектора δ равна 1 и $\delta \in E_D$.

Пусть теперь $D = \bar{x}_1 \vee x_2$. Поскольку $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in E_D$, то в первых двух координатах этих векторов не может встречаться комбинация $(1, 0)$. Если в первых координатах векторов $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ не более одной единицы, то $\delta(1) = 0$ и тогда $\delta \in E_D$. Пусть $\delta(1) = 1$. Тогда найдутся два вектора $\alpha_i, \alpha_j \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ такие, что $\alpha_i(1) = \alpha_j(1) = 1$. Поскольку это выполняющие векторы для D , для них выполняются равенства $\alpha_i(2) = \alpha_j(2) = 1$, откуда $\delta(2) = 1$ и $\delta \in E_D$. Указанные рассуждения верны для любой простой имплиценты D функции f .

Теорема доказана.

Результат, аналогичный доказанному в теореме 3, верен и для пороговой функции $w_{r,k}$.

Теорема 4. Пусть

$$r \geq 4, \quad 2 \leq k \leq \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor, \quad m = \left\lceil \frac{r}{k-1} \right\rceil - 1.$$

Если множество E_f является $\tilde{w}_{r,k}$ -замкнутым, то $f(x_1, \dots, x_n) \in \text{WN}_{m,2}$. При $k = 2$ данное условие является достаточным: множество E_f является $\tilde{w}_{r,2}$ -замкнутым тогда и только тогда, когда $f(x_1, \dots, x_n) \in \text{WN}_{r-1,2}$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — рассматриваемая булева функция. Положим

$$f'(x_1, \dots, x_n) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n).$$

Тогда

$$E_{f'} = \{\beta = \alpha \oplus 1_n : \alpha \in E_f\}.$$

Поэтому множество E_f является $\tilde{w}_{r,k}$ -замкнутым тогда и только тогда, когда множество $E_{f'}$ является $v_{r,k}$ -замкнутым. Теперь остается применить теорему 3.

Резюмируя вышесказанное, можно сделать следующий вывод:

при $r = 3, k = 2$ $\tilde{v}_{r,k}$ -замкнутость множества E_f эквивалентна бионктивности функции f по критерию Шефера (см. [1]);

при $r \geq 4, k = 2$ $\tilde{v}_{r,k}$ -замкнутость множества E_f эквивалентна принадлежности функции f классу $\text{WP}_{r-1,2}$;

при $r \geq 4, 3 \leq k \leq \lfloor r/2 \rfloor$ из $\tilde{v}_{r,k}$ -замкнутости множества E_f следует принадлежность функции f классу $\text{WP}_{m,2}$, $m = \lceil r/(k-1) \rceil - 1$.

Аналогичным образом формулируются утверждения для $\tilde{w}_{r,k}$ -замкнутости.

Список литературы

1. Schaefer T. J., Complexity of satisfiability problems. In: *Proc. STOC'78*. ACM, New York, 1978, pp. 216–226.
2. Горшков С. П., О сложности распознавания мультиаффинности, бионктивности, слабой положительности и слабой отрицательности булевых функций. *Обзорные прикладной и промышленной математики* (1997) **4**, №2, 216–237.
3. Горшков С. П., Применение теории *NP*-полных задач для оценки сложности решения систем булевых уравнений. *Обзорные прикладной и промышленной математики* (1995) **2**, №3, 325–398.
4. Горшков С. П., О пересечениях классов мультиаффинных, бионктивных, слабо положительных и слабо отрицательных булевых функций. *Обзорные прикладной и промышленной математики* (1997) **4**, №2, 238–259.
5. Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику*. Наука, Москва, 1979.
6. Марченков С. С., *Замкнутые классы булевых функций*. Физматлит, Москва, 2001.

Статья поступила 9.09.2011.