Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Розовская, Д. А. Шабанов, Экстремальные задачи для полноцветных раскрасок равномерных гиперграфов, *Дискрет. матем.*, 2012, том 24, выпуск 2, 104–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1188>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 15:14:37

Экстремальные задачи для полноцветных раскрасок равномерных гиперграфов

© 2012 г. А. П. Розовская, Д. А. Шабанов

В работе исследуется известная задача экстремальной теории гиперграфов, поставленная А. В. Косточкой. Раскраска множества вершин гиперграфа в r цветов называется полноцветной, если в ней каждое ребро гиперграфа содержит вершины всех цветов. Изучается величина $p(n, r)$, равная минимально возможному количеству ребер n -равномерного гиперграфа, не имеющего полноцветных r -раскрасок. В работе найдена новая нижняя асимптотическая оценка величины $p(n, r)$, а также получен ряд результатов в смежных задачах.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 12-01-00683а, Программы Президента РФ поддержки молодых российских ученых, грант МК 1122.2012.1, и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ России, грант НШ 2519.2012.1.

1. Введение и история задачи

В работе исследуется известная задача экстремальной теории гиперграфов. Напомним, что гиперграфом называется пара множеств $H = (V, E)$, где $V = V(H)$ есть некоторое конечное множество, называемое множеством вершин гиперграфа, а $E = E(H)$ есть совокупность некоторых подмножеств множества V , эти подмножества называются ребрами гиперграфа. Говорим, что гиперграф является n -равномерным, если каждое его ребро содержит ровно n вершин.

Раскраска множества вершин гиперграфа в r цветов (r -раскраска) называется полноцветной для H , если в ней каждое ребро из E содержит вершины всех цветов. В работе А. В. Косточки [1] (см. также [2]) была поставлена задача об отыскании величины $p(n, r)$, равной минимальному числу ребер гиперграфа в классе n -равномерных гиперграфов, не имеющих полноцветных r -раскрасок. Формально определение $p(n, r)$ можно записать так:

$$p(n, r) = \min\{|E(H)| : H \text{ есть } n\text{-равномерный гиперграф, для которого не существует полноцветных } r\text{-раскрасок}\}.$$

Задача о нахождении величины $p(n, r)$ хорошо изучена в случае $r = 2$. Величина $p(n, 2)$ совпадает с классической величиной $m(n)$, равной минимальному количеству ребер n -равномерного гиперграфа, вершины которого нельзя покрасить в два цвета так, чтобы все ребра были неоднородными. Задача об отыскании величины $m(n)$ была поставлена в 1961 году П. Эрдёшем и А. Хайналом в [3]. Наилучшие асимптотические оценки

величины $m(n)$ были получены Эрдёшем (верхняя оценка, [4]), а также Дж. Радхакришнаном и А. Сринивасаном (нижняя оценка, [5]):

$$(\sqrt{3} - 1) \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/2} 2^{n-1} \leq p(n, 2) = m(n) \leq \frac{e \ln 2}{4} n^2 2^n (1 + o(1)). \quad (1)$$

Одно из первых достаточных условий существования полноцветной r -раскраски в общем случае было получено П. Эрдёшем и Л. Ловасом в известной работе [6]: если каждое ребро n -равномерного гиперграфа H пересекается не более чем с $r^{n-1}/(4(r-1)^n)$ другими ребрами, то для H существует полноцветная r -раскраска. Таким образом, фактически была получена следующая нижняя оценка величины $p(n, r)$:

$$p(n, r) \geq \frac{r^{n-1}}{4(r-1)^n}. \quad (2)$$

Общие соотношения для произвольного r были получены А. В. Косточкой. С использованием связи между полноцветными r -раскрасками n -равномерных гиперграфов и предписанными раскрасками полных r -дольных графов, в [1]) были получены следующие оценки для $p(n, r)$ при $r \geq 2$ и $n \geq 2$:

$$\frac{1}{r} e^{c_1 n/r} \leq p(n, r) \leq r e^{c_2 n/r}, \quad (3)$$

где c_1 и c_2 — некоторые абсолютные положительные константы, причем $c_1 < 1 < c_2$.

В [7, 8] Д. А. Шабановым были получены следующие оценки $p(n, r)$ для случая $r = 3$:

$$c \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/3} \left(\frac{3}{2} \right)^n \leq p(n, 3) \leq \frac{e \ln 3}{12} n^2 \left(\frac{3}{2} \right)^n (1 + o(1)),$$

где c — некоторая положительная константа. Наконец, в [9] были получены аналогичные оценки величины $p(n, r)$ в общем случае. Нижняя оценка справедлива для всех $n, r \geq 2$, $r < n$, и имеет вид:

$$p(n, r) \geq \frac{\sqrt{21} - 3}{4r} \left(\frac{n}{(r-1)^2 \ln n} \right)^{1/3} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n. \quad (4)$$

Верхняя оценка в [9] была получена в двух различных областях значений функции $r = r(n)$. Если $r = r(n) = o(\sqrt{n})$, то

$$p(n, r) \leq \frac{1}{r} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n e(\ln r) \frac{n^2}{2(r-1)} \varphi_1, \quad (5)$$

где φ_1 — некоторая функция от n и $r(n)$, стремящаяся к единице при $n \rightarrow \infty$. Если же $\sqrt{n} \ll r < \frac{1}{2} n^{2/3}$ (то есть $n = o(r^2)$), то

$$p(n, r) \leq \frac{1}{r} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n e(\ln r) n^{3/2} \varphi_2, \quad (6)$$

где φ_2 — некоторая функция от n и $r(n)$, стремящаяся к единице при $n \rightarrow \infty$.

До настоящего исследования, результаты (1), (4), (5) и (6) оставались наилучшими в различных областях значений параметров.

2. Новая нижняя оценка $p(n, r)$

Одним из основных результатов данной работы является новая нижняя оценка величины $p(n, r)$.

Теорема 1. Для любых $n \geq 3$, $r \geq 2$ с условием $r < n/(2 \ln n)$ верно, что

$$p(n, r) \geq \frac{1}{2r} \left(\frac{n}{(r-1)^2 \ln n} \right)^{1/2} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n. \quad (7)$$

Нетрудно видеть, что данный результат улучшает предыдущие результаты (2), (3) и (4) в области $r = o(\sqrt{n/\ln n})$. Действительно, улучшение по сравнению с классической оценкой Эрдеша и Ловаса (2), а также с оценкой Косточки (3) очевидно. Кроме того, оценка (7) асимптотически улучшает и (4) в указанной области. При этом асимптотическое улучшение имеет порядок $(n/(r^2 \ln n))^{1/6}$. Отметим также, что при $r = 2$ результат (7) совпадает по порядку с наилучшей нижней оценкой (1) для величины $m(n) = p(n, 2)$, а зазор между (7) и верхней оценкой (5) имеет порядок $n^{3/2}(\ln n)^{1/2}$, как и для случая $r = 2$.

Полноцветные раскраски гиперграфов тесно связаны с предписанными раскрасками полных многодольных графов. Обсудим подробнее эту связь, но сначала напомним ряд определений.

Пусть $G = (V, E)$ — обыкновенный граф с множеством вершин V и множеством ребер E , а C — некоторое множество, элементы которого назовем цветами. Вершинным предписанием A будем называть некоторое отображение, которое каждой вершине v сопоставляет в соответствие некоторое подмножество $A(v) \subseteq C$. Если $|A(v)| = k$ для любой вершины $v \in V$, то будем говорить, что мощность предписания равна k .

Раскраской f вершин графа G , соответствующей предписанию A , называется такое отображение $f: V \rightarrow C$, что $f(v) \in A(v)$. При этом будем говорить, что каждая вершина v окрашена в цвет $f(v)$. Раскраска множества вершин называется правильной для графа G , если любые две вершины G , соединенные ребром, окрашены в разные цвета. Граф называется предписанно k -раскрашиваемым, если для любого множества цветов C и любого вершинного предписания A мощности k найдется правильная раскраска, соответствующая данному предписанию. Предписанным хроматическим числом графа G называется минимальное натуральное число k такое, что G является предписанно k -раскрашиваемым.

Изучение предписанного хроматического числа было начато в работах В. Г. Визинга [10], а также П. Эрдеша, А. Л. Рубина и Х. Тейлора [11]. В [11] была поставлена задача об отыскании величины $N(r, n)$ — минимального числа вершин в полном r -дольном графе, предписанное хроматическое число которого превышает n . Эрдешем, Рубином и Тейлором была показана (см. [11]) тесная связь между $N(2, n)$ и классической величины $m(n)$: именно, имеет место соотношение

$$m(n) \leq N(2, n) \leq 2m(n).$$

А. В. Косточка в [1] обобщил данное неравенство на случай произвольного числа r :

$$p(n, r) \leq N(r, n) \leq rp(n, r). \quad (8)$$

Из неравенств, полученных Н. Алоном (см. [12]) для предписанных хроматических чисел полных r -дольных графов, вытекают следующие оценки величины $N(r, n)$:

$$\exp \left\{ c_1 \frac{n}{r} \right\} \leq N(r, n) \leq \exp \left\{ c_2 \frac{n}{r} \right\}, \quad (9)$$

где c_1, c_2 — те же константы, что и в соотношениях (3).

Позднее обе оценки $N(r, n)$ были улучшены Шабановым в [9] с помощью оценок (4), (5) и (6) величины $p(n, r)$. В частности, было доказано, что для любых $r \geq 2, n \geq 3$ выполняется неравенство

$$N(r, n) \geq \frac{\sqrt{21}-3}{4r} \left(\frac{n}{(r-1)^2 \ln n} \right)^{1/3} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n \quad (10)$$

Оценка (10) асимптотически улучшает результат (9) при $r = r(n) = o(\sqrt{n/\ln n})$. Теорема 1 с помощью неравенств (8) позволяет получить новую нижнюю оценку величины $N(r, n)$ при условии $r < n/(2 \ln n)$:

$$N(r, n) \geq \frac{1}{2r} \left(\frac{n}{(r-1)^2 \ln n} \right)^{1/2} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n. \quad (11)$$

Наша новая оценка (11), как нетрудно видеть, асимптотически улучшает (10) в области $r = o(\sqrt{n/\ln n})$.

В заключение отметим, что с помощью исследования асимптотического поведения величины $p(n, r)$ оказывается возможным получить асимптотику предписанного хроматического числа полных r -дольных графов с одинаковым размером долей. Подробнее об этом можно прочитать в [13], а в следующем разделе мы докажем основную теорему 1.

3. Доказательство теоремы 1

Пусть заданы $n \geq 3, r \geq 2$ и $r \leq n/(2 \ln n)$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что для произвольного n -равномерного гиперграфа $G = (V, E)$ с условием

$$|E| < \frac{1}{2r} \left(\frac{n}{(r-1)^2 \ln n} \right)^{1/2} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n \quad (12)$$

существует полноцветная раскраска множества V в r цветов.

Зафиксируем такой гиперграф G . Пусть задана произвольная раскраска множества вершин V в r цветов. Будем называть ребро хорошим в данной раскраске, если в нем присутствуют вершины каждого из r цветов. Иначе будем говорить, что ребро плохое в этой раскраске. Докажем, что для гиперграфа G найдется раскраска, в которой все его ребра будут хорошими. Для этого построим некоторую случайную раскраску и оценим вероятность того, что в ней есть плохие ребра.

3.1. Алгоритм построения случайной раскраски

Пусть σ — случайная нумерация множества вершин гиперграфа с равномерным распределением. Раскрасим каждую вершину гиперграфа независимо от других в один из r цветов с вероятностью $1/r$. Обозначим получившуюся равномерную раскраску через ξ . Построим на ее основе другую раскраску. Применим следующий алгоритм перекраски.

- (1) Рассматриваем вершины G по очереди, согласно нумерации σ .
- (2) На i -м шаге процедуры перекраски рассматриваем вершину v , такую, что $\sigma(v) = i$. Предположим, что для вершины v выполнены оба следующих условия:

- (a) вершина v принадлежит ребру e , которое содержит вершины ровно $r - 1$ цвета в раскраске ξ (пусть, без ограничения общности, отсутствует цвет α),
- (b) ни на одном из предыдущих шагов перекраски ни одна из вершин ребра e не перекрасилась в цвет α .

Тогда случайно перекрашиваем вершину v согласно следующему правилу: с вероятностью p присваиваем каждый из $r - 1$ цветов, отличных от начального цвета v , и с вероятностью $1 - (r - 1)p$ вообще не перекрашиваем вершину v .

Если же хотя бы одно из перечисленных выше условий не выполнено, то мы также не перекрашиваем v и переходим к рассмотрению следующей вершины.

Обозначим получившуюся после рассмотрения всех вершин G случайную раскраску через χ .

Обозначим через $\mathcal{F}_e$ событие, заключающееся в том, что ребро e плохое в раскраске χ . Чтобы оценить вероятность этого события, разобьем его в сумму более простых событий. Рассмотрим ситуации, в которых ребро e может оказаться плохим в раскраске χ .

- (1) Ребро e в раскраске ξ содержит вершины не более чем $r - 2$ различных цветов. Обозначим это событие через A_e^1 .
- (2) Ребро e в раскраске ξ содержит вершины ровно $r - 1$ различных цветов и после перекраски в нем не появился недостающий последний цвет. Обозначим это событие через A_e^2 .
- (3) Ребро e в раскраске ξ содержит вершины ровно $r - 1$ цветов, в процессе перекраски в нем появился недостающий последний цвет, но к моменту его появления исчез один из других $r - 1$ цветов. Обозначим это событие через A_e^3 .
- (4) Ребро e является плохим в итоговой раскраске χ , но не случилась ни одна из предыдущих ситуаций. Здесь возможны два варианта.
 - (a) Ребро e в раскраске ξ содержит вершины ровно $r - 1$ цветов, в процессе перекраски в нем появился недостающий последний цвет, и в этот момент оно стало хорошим, но в дальнейшем ребро e стало плохим в результате перекрашивания некоторых его вершин, принадлежащих некоторому другому ребру f , которое также являлось плохим в ξ .
 - (b) Ребро e является хорошим в раскраске ξ и плохим в итоговой раскраске, то есть оно испортилось в результате перекрашивания некоторых его вершин, принадлежащих некоторому другому ребру f , которое являлось плохим в ξ .

Обе приведенные ситуации можно обобщить следующим образом. В ребре e были вершины некоторого цвета α в раскраске ξ , но в раскраске χ в e нет вершин этого цвета, причем последняя из них перекрасилась вследствие того, что принадлежало некоторому другому плохому ребру. Если v — последняя (относительно случайной нумерации σ) вершина ребра e , которая покрашена в цвет α в раскраске ξ , тогда существует некоторое ребро f , $v \in f$, которое было покрашено ровно в $r - 1$ цвет в ξ , и до момента рассмотрения v этот недостающий цвет в ребре f не появился. Обозначим данное событие через $B_{e,f}$.

Подведем предварительные итоги. Мы показали, что для каждого ребра e событие $\mathcal{F}_e$ лежит в объединении

$$\mathcal{F}_e \subset A_e^1 \cup A_e^2 \cup A_e^3 \cup \bigcup_{f \neq e} B_{e,f}. \quad (13)$$

Далее мы оценим вероятности этих событий.

3.2. Вероятностная интерпретация

В предыдущем разделе мы привели алгоритм построения правильной раскраски вершин гиперграфа. Однако в дальнейших доказательствах нам понадобится определение случайной раскраски в терминах случайных величин. Действительно, раскраску ξ множества вершин гиперграфа V (без ограничения общности считаем, что $V = \{1, \dots, w\}$) можно рассматривать как набор независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_w$, принимающих значения $1, \dots, r$ с одной и той же вероятностью, равной $1/r$. Введем набор одинаково распределенных случайных величин $\eta_1, \dots, \eta_w$, распределение которых задается следующими условными вероятностями:

$$\mathbf{P}(\eta_i = k \mid \xi_i = j) = p, \quad j \neq k, \quad j = 1, \dots, r,$$

и

$$\mathbf{P}(\eta_i = 0 \mid \xi_i = j) = 1 - (r - 1)p.$$

Кроме того, будем считать, что случайная нумерация σ не зависит от набора $\{\xi_1, \dots, \xi_w\}$. Саму нумерацию σ можно также рассматривать как набор случайных величин $\sigma_1, \dots, \sigma_w$.

Пусть $i \in V$ — произвольная вершина гиперграфа. Обозначим через D_i событие, заключающееся в том, что вершину i следует перекрашивать:

$$D_i = \bigcup_{\substack{e \in E: \\ i \in e}}^r \bigcup_{j=1}^r \left(\left\{ \sum_{s \in e} I\{\xi_s \neq j\} (1 - I\{\sigma_s < \sigma_i, \eta_s = j\}) = n \right\} \cap \left\{ \bigcap_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r \left(\sum_{s \in e} I\{\xi_s = k\} > 0 \right) \right\} \right).$$

Тогда раскраска χ есть набор случайных величин $\chi_1, \dots, \chi_w$, задаваемых равенством

$$\chi_i = \xi_i I\{\bar{D}_i \cup \{\eta_i = 0\}\} + \eta_i I\{D_i \cap \{\eta_i \neq 0\}\},$$

а интересующие нас события записываются следующим образом:

$$A_e^1 = \bigcup_{\alpha, \beta=1}^r \bigcap_{s \in e} \{\xi_s \neq \alpha, \xi_s \neq \beta\} = \tilde{A}_e^1, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} A_e^2 &= \bigcup_{\alpha=1}^r \bigcap_{s \in e} \left(\{\xi_s \neq \alpha, \chi_s \neq \alpha\} \cap \left\{ \bigcap_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r \left(\sum_{s \in e} I\{\xi_s = k\} > 0 \right) \right\} \right) \\ &\subseteq \bigcup_{\alpha=1}^r \bigcap_{s \in e} \{\xi_s \neq \alpha, \eta_s \neq \alpha\} = \tilde{A}_e^2, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
A_e^3 \subseteq \bigcup_{\substack{\alpha \neq \beta \\ \alpha, \beta = 1}}^r \bigcup_{u \in e} \bigcap_{s \in e} (\{ \sigma_s > \sigma_u, \xi_s \neq \alpha, \beta \} \\
\cup \{ \sigma_s < \sigma_u, \xi_s = \beta, \eta_s \notin \{0, \beta, \alpha\} \} \\
\cup \{ \sigma_s < \sigma_u, \xi_s \neq \alpha, \beta, \eta_s \neq \alpha, \beta \} \\
\cup \{ \xi_u \neq \alpha, \eta_u = \alpha \}) = \tilde{A}_e^3.
\end{aligned} \tag{16}$$

Поясним данное соотношение. Пусть в ребре e не было цвета α в раскраске ξ , а в процессе перекраски из него исчез цвет β . Пусть u — первая (согласно нумерации σ) вершина в ребре e , перекрасившаяся в цвет α . Если произошло событие A_e^3 , то все вершины, следующие за u по нумерации σ , должны быть окрашены не в цвет α и не в цвет β в начальной раскраске ξ . Вершины, идущие по нумерации до u , либо имеют цвет β и перекрашиваются в один из $r - 2$ цветов (исключая цвет α), либо имеют цвет, отличный от α и β , в обеих раскрасках.

Рассмотрим теперь событие $B_{e,f}$. Верно соотношение

$$\begin{aligned}
B_{e,f} \subseteq \bigcup_{\alpha, \gamma = 1}^r \bigcup_{v \in e \cap f} \left(\{ \xi_v = \alpha, \eta_v \notin \{0, \alpha\} \} \cap \bigcap_{s \in f \setminus \{v\}} \{ \xi_s \neq \gamma \} \right. \\
\cap \bigcap_{s \in f \setminus e} [\{ \sigma_s < \sigma_v, \eta_s \neq \gamma \} \cup \{ \sigma_s > \sigma_v \}] \\
\cap \bigcap_{s \in e} [\{ \sigma_s > \sigma_v, \xi_s \neq \alpha \} \cup \{ \sigma_s < \sigma_v, \xi_s \neq \alpha \} \\
\cup \{ \sigma_s < \sigma_v, \xi_s = \alpha, \eta_s \notin \{0, \alpha\} \}] \\
\left. \cap \bigcap_{s \in e \cap f} (\{ \sigma_s < \sigma_v, \xi_s \neq \gamma, \xi_s \neq \alpha, \eta_s \neq \gamma, \eta_s \neq \alpha \} \right. \\
\left. \cup \{ \sigma_s < \sigma_v, \xi_s = \alpha, \eta_s \neq \gamma \} \cup \{ \sigma_s > \sigma_v, \xi_s \neq \gamma, \xi_s \neq \alpha \} \right) \\
= \tilde{B}_{e,f},
\end{aligned} \tag{17}$$

где v — некоторая вершина из $e \cap f$. Поясним данное соотношение. Действительно, пусть выполнено событие $B_{e,f}$. Тогда в ребре e в процессе перекраски исчезли вершины некоторого цвета α . Пусть v — последняя по нумерации σ вершина цвета α в e в раскраске ξ , тогда по определению события $B_{e,f}$ найдется ребро f , окрашенное в $(r - 1)$ -й цвет в раскраске ξ (пусть в нем отсутствует цвет $\gamma \neq \alpha$), такое, что $v \in e \cap f$. Кроме того, ни одна вершина, предшествующая v по нумерации σ в ребре f , не перекрасилась в цвет γ , и вершина v поменяла свой цвет. Также все вершины ребра e не должны быть окрашены в цвет α в итоговой раскраске χ . При этом все вершины ребра e , идущие по нумерации после вершины v , не окрашены в цвет α уже в раскраске ξ . Если же для вершины $u \in e$ выполнено $\sigma(u) < \sigma(v)$, то либо $\xi_u \neq \alpha$, либо вершина u имеет цвет α в раскраске ξ , но перекрасилась в другой цвет (то есть $\xi_u = \alpha, \eta_u \neq 0$).

Перейдем теперь непосредственно к оцениванию вероятностей указанных событий.

3.3. Оценки вероятностей событий

Разобьем оценки вероятностей описанных событий на несколько лемм.

Лемма 1. *Верны неравенства*

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_e^1) &\leq \mathbf{P}(\tilde{A}_e^1) = \binom{r}{2} \left(\frac{r-2}{r} \right)^n, \\ \mathbf{P}(A_e^2) &\leq \mathbf{P}(\tilde{A}_e^2) = r \left(\frac{r-1}{r} \right)^n (1-p)^n.\end{aligned}$$

Утверждение очевидно в силу соотношений (14) и (15).

Лемма 2. *Верно неравенство*

$$\mathbf{P}(A_e^3) \leq \mathbf{P}(\tilde{A}_e^3) = (r-1)^2 \left(\frac{r-2}{r} \right)^{n-1} (1 - (1-p)^n).$$

Доказательство. Пусть произошло событие $\tilde{A}_e^3$, и пусть в ребре e не было цвета α в раскраске ξ , а в процессе перекраски из него исчез цвет β . Зафиксируем нумерацию вершин σ . Тогда в силу (16) найдется вершина u — первая (согласно нумерации σ) вершина в ребре e , перекрасившаяся в цвет α . Пусть ее номер в ребре e равен t . Таким образом, из (16) получаем цепочку соотношений

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\tilde{A}_e^3 \mid \sigma) &\leq r(r-1) \sum_{t=1}^n \frac{r-1}{r} p \left(\frac{r-2}{r} \right)^{n-t} \left(\frac{1}{r}(r-2)p + \frac{r-2}{r}(1-2p) \right)^{t-1} \\ &= (r-1)^2 \left(\frac{r-2}{r} \right)^{n-1} p \sum_{t=1}^n (1-p)^{t-1} \\ &= (r-1)^2 \left(\frac{r-2}{r} \right)^{n-1} (1 - (1-p)^n).\end{aligned}$$

В итоге,

$$\mathbf{P}(\tilde{A}_e^3) = \mathbf{EP}(\tilde{A}_e^3 \mid \sigma) \leq (r-1)^2 \left(\frac{r-2}{r} \right)^{n-1} (1 - (1-p)^n).$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Верно неравенство*

$$\mathbf{P}(B_{e,f}) \leq \mathbf{P}(\tilde{B}_{e,f}) = (r-1)^4 \left(\frac{r-1}{r} \right)^{2n} p$$

Доказательство. Пусть

$$|e \cap f| = h,$$

а v — произвольная вершина из $e \cap f$. Разобьем событие $\tilde{B}_{e,f}$ на части в зависимости от

вершины v . Введем событие $\tilde{B}_{e,f}(v)$:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{e,f}(v) = \bigcup_{\alpha, \gamma=1}^r & \left(\{ \xi_v = \alpha, \eta_v \notin \{0, \alpha\} \} \cap \bigcap_{s \in f \setminus \{v\}} \{ \xi_s \neq \gamma \} \right. \\ & \cap \bigcap_{s \in f \setminus e} [\{ \sigma_s < \sigma_v, \eta_s \neq \gamma \} \cup \{ \sigma_s > \sigma_v \}] \\ & \cap \bigcap_{s \in e} [\{ \sigma_s > \sigma_v, \xi_s \neq \alpha \} \cup \{ \sigma_s < \sigma_v, \xi_s \neq \alpha \} \\ & \quad \cup \{ \sigma_s < \sigma_v, \xi_s = \alpha, \eta_s \notin \{0, \alpha\} \}] \\ & \left. \cap \bigcap_{s \in e \cap f} (\{ \sigma_s < \sigma_v, \xi_s \neq \gamma, \xi_s \neq \alpha, \eta_s \neq \gamma, \eta_s \neq \alpha \} \right. \\ & \quad \cup \{ \sigma_s < \sigma_v, \xi_s = \alpha, \eta_s \neq \gamma \} \\ & \quad \left. \cup \{ \sigma_s > \sigma_v, \xi_s \neq \gamma, \xi_s \neq \alpha \}) \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Заметим, что из (17) следует, что

$$\tilde{B}_{e,f} = \bigcup_{v \in e \cap f} \tilde{B}_{e,f}(v). \quad (19)$$

Введем также

$$\begin{aligned} t &= t(v, \sigma) = |\{u \in e \cap f : \sigma(u) > \sigma(v)\}|, \\ j &= j(v, \sigma) = |\{u \in f \setminus e : \sigma(u) < \sigma(v)\}|, \\ i &= i(v, \sigma) = |\{u \in e \setminus f : \sigma(u) < \sigma(v)\}|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$h - 1 - t = |\{u \in e \cap f : \sigma(u) < \sigma(v)\}|.$$

Зафиксируем случайную нумерацию σ . Тогда с учетом новых обозначений из соотношения (18) получаем следующую оценку условной вероятности события $\tilde{B}_{e,f}(v)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tilde{B}_{e,f}(v) \mid \sigma) &\leq r(r-1) \frac{1}{r} (r-1) p (1-p)^j \left(\frac{r-1}{r} \right)^{n-h} \\ &\quad \times \left(\frac{r-2}{r} (1-2p) + \frac{1}{r} (r-2)p \right)^{h-t-1} \left(\frac{r-2}{r} \right)^t \\ &\quad \times \left(\frac{r-1}{r} \right)^{n-h-i} \left(\frac{r-1}{r} + \frac{1}{r} (r-1)p \right)^i \\ &= r(r-1) \left(\frac{r-1}{r} \right)^{2n-2h+1} \left(\frac{r-2}{r} \right)^{h-1} \\ &\quad \times p(1-p)^j (1-p)^{h-1-t} (1+p)^i \\ &\leq r(r-1) \left(\frac{r-1}{r} \right)^{2n-2h+1} \left(\frac{r-2}{r} \right)^{h-1} p(1-p)^j (1+p)^i. \end{aligned}$$

Последнее неравенство выполнено в силу того, что $(1-p)^{h-1-t}$ оценивается сверху числом 1. Таким образом, в последнем полученном выражении только величины $i = i(\sigma)$,

$j = j(\sigma)$ зависят от σ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tilde{B}_{e,f}(v)) &= \mathbf{EP}(\tilde{B}_{e,f}(v) \mid \sigma) \\ &\leq r(r-1) \left(\frac{r-1}{r}\right)^{2n-2h+1} \left(\frac{r-2}{r}\right)^{h-1} p \mathbf{E}(1-p)^{j(\sigma)} (1+p)^{i(\sigma)}. \end{aligned}$$

В силу того, что σ имеет равномерное распределение на множестве всех возможных нумераций множества вершин, а ребра e и f имеют одинаковую мощность n , величина $\mathbf{E}(1-p)^{j(\sigma)} (1+p)^{i(\sigma)}$ оценивается сверху единицей. Доказательство этого несложного утверждения можно найти, например, в [5], а также в книге [15] (см. §3.2). В итоге, учитывая (19), мы получаем следующую верхнюю оценку вероятности события $\tilde{B}_{e,f}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tilde{B}_{e,f}) &\leq \sum_{v \in e \cap f} \mathbf{P}(\tilde{B}_{e,f}(v)) \\ &\leq \sum_{v \in e \cap f} r(r-1) \left(\frac{r-1}{r}\right)^{2n-2h+1} p \left(\frac{r-2}{r}\right)^{h-1} \\ &= hr(r-1) \left(\frac{r-1}{r}\right)^{2n-2h+1} p \left(\frac{r-2}{r}\right)^{h-1}. \end{aligned} \quad (20)$$

Легко видеть, что максимум правой части (20) по h достигается при $h = r^2 - 2r$. Действительно, отношение правых частей при h и $h+1$ равно $h(r-1)^2 / [(h+1)r(r-2)]$. Данное отношение не превосходит 1, если $h \leq r^2 - 2r$. Следовательно, максимальное значение оцениваемой вероятности достигается при $h = r^2 - 2r$. В итоге, для любых ребер e и f

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tilde{B}_{e,f}) &\leq r^2(r-1)(r-2) \left(\frac{r-1}{r}\right)^{2n+1} p \left(\frac{r(r-2)}{(r-1)^2}\right)^{r^2-2r} \\ &\leq r^2(r-1)(r-2) \left(\frac{r-1}{r}\right)^{2n+1} p \leq (r-1)^4 \left(\frac{r-1}{r}\right)^{2n} p. \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

3.4. Завершение доказательства

Пусть $\mathcal{F}$ — событие, заключающееся в том, что гиперграф G имеет плохое ребро в случайной раскраске χ . Тогда, в силу (13) и лемм 1–3, вероятность этого события оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathcal{F}) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_e \mathcal{F}_e\right) \leq \sum_e \mathbf{P}(\mathcal{F}_e) \\ &\leq \sum_e (\mathbf{P}(\tilde{A}_e^1) + \mathbf{P}(\tilde{A}_e^2) + \mathbf{P}(\tilde{A}_e^3)) + \sum_e \sum_{f \neq e} (\mathbf{P}(\tilde{B}_{e,f})) \\ &\leq |E| \frac{r(r-1)}{2} \left(\frac{r-2}{r}\right)^n + |E|r \left(\frac{r-1}{r}\right)^n (1-p)^n \\ &\quad + |E|(r-1)^2 \left(\frac{r-2}{r}\right)^{n-1} (1-(1-p)^n) \\ &\quad + |E|^2(r-1)^4 \left(\frac{r-1}{r}\right)^{2n} p. \end{aligned} \quad (21)$$

Нам необходимо подобрать значение параметра p так, чтобы гарантировать выполнение неравенства $\mathbf{P}(\mathcal{F}) < 1$. В этом случае с положительной вероятностью в случайной раскраске χ все ребра гиперграфа G будут хорошими и теорема будет доказана.

Возьмем

$$p = \frac{\ln n}{2n}.$$

и оценим каждое из слагаемых в правой части (21). Напомним, что по условию $n \geq 3$, $r \leq n/(2 \ln n)$ и $|E|$ удовлетворяет неравенству (12). Следовательно, первое слагаемое в правой части (21) удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} |E| \frac{r(r-1)}{2} \left(\frac{r-2}{r} \right)^n &\leq \frac{r(r-1)}{2} \left(\frac{r-2}{r-1} \right)^n \frac{1}{2r} \left(\frac{n}{(r-1)^2 \ln n} \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{4} e^{-n/(r-1)} \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/2} \leq \frac{1}{4} e^{-2 \ln n} \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{4(n^3 \ln n)^{1/2}} < \frac{1}{20} = 0,05. \end{aligned} \quad (22)$$

Третье слагаемое оценивается аналогично с помощью (22):

$$\begin{aligned} |E| (r-1)^2 \left(\frac{r-2}{r} \right)^{n-1} (1 - (1-p)^n) &\leq |E| 2r(r-1) \left(\frac{r-2}{r} \right)^n \\ &\leq 4 \cdot 0,05 = 0,2. \end{aligned} \quad (23)$$

Для второго и четвертого слагаемых справедливы следующие простые неравенства:

$$\begin{aligned} |E| r \left(\frac{r-1}{r} \right)^n (1-p)^n &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/2} (1-p)^n \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{1/2} e^{-pn} = \frac{1}{2(\ln n)^{1/2}} < \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} |E|^2 (r-1)^4 \left(\frac{r-1}{r} \right)^{2n} p &\leq \frac{1}{4r^2} \left(\frac{r}{r-1} \right)^{2n} \frac{n}{(r-1)^2 \ln n} (r-1)^4 \left(\frac{r-1}{r} \right)^{2n} p \\ &\leq \frac{1}{4} \frac{n}{\ln n} p = \frac{1}{8}. \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом, из неравенств (21), (22), (24), (23) и (25) получаем, что

$$\mathbf{P}(\mathcal{F}) < 0,05 + 0,2 + 0,5 + 0,125 < 1.$$

Следовательно, с положительной вероятностью в случайной раскраске χ все ребра гиперграфа G будут хорошими. Таким образом, для гиперграфа G существует полноцветная раскраска в r цветов. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Отметим, что константа $1/2$ в правой части оценки (7) не является оптимальной в асимптотике. В частности, из доказательства теоремы 1 следует, что ее можно заменить выражением, не превосходящим $\sqrt{2}$. Однако нас в первую очередь интересует порядок роста оценки, а не точное вычисление констант при растущих множителях.

4. Достаточное условие существования полноцветной r -раскраски

Вопрос о существовании полноцветной r -раскраски у равномерных гиперграфов можно изучать не только рассматривая ограничения на количество ребер, но и на другие характеристики гиперграфа. Одной из таких характеристик является максимальная степень ребра гиперграфа. Напомним, что степенью ребра f в гиперграфе H называется количество других ребер H , которые пересекают e . Максимальную степень ребра в гиперграфе H будем обозначать через $\Delta_e(H)$.

В 1973 г. в [6] П. Эрде́ш и Л. Ловас получили следующее достаточное условие существования полноцветной r -раскраски у n -равномерного гиперграфа.

Теорема 2 ([6]). Пусть $n, r \geq 2$ и H — n -равномерный гиперграф. Если

$$\Delta_e(H) \leq \frac{r^{n-1}}{4(r-1)^n},$$

то для H существует полноцветная r -раскраска.

Отметим, что доказательство данной теоремы опирается на известное утверждение теории вероятностей, называемое локальной леммой и полученное в той же работе [6].

Позднее результат теоремы 2 был улучшен Шабановым (см. [9]) для достаточно широкой области значений параметра r .

Теорема 3 ([9]). Пусть $n, r \geq 2$ и H — n -равномерный гиперграф, причем

$$\Delta_e(H) \leq \frac{\sqrt{12}-3}{8r} \left(\frac{n}{(r-1)^2 \ln n} \right)^{1/3} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n. \quad (26)$$

Если $r \leq n/(8 \ln n)$, то для H существует полноцветная r -раскраска.

Основным результатом настоящего параграфа является следующая теорема, дающая новое достаточное условие существования полноцветной r -раскраски гиперграфа в терминах ограничения на максимальную степень вершины в гиперграфе.

Теорема 4. Пусть $n \geq 3$, $r \geq 2$, и $r \leq n/(2 \ln n)$. Если n -равномерный гиперграф H удовлетворяет условию

$$\Delta_e(H) \leq \frac{\sqrt{11}-3}{4r} \left(\frac{n}{(r-1)^2 \ln n} \right)^{1/2} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n - 1, \quad (27)$$

то для H существует полноцветная r -раскраска.

Сравним новый результат с предыдущими. Если $r^2 = o(n/\ln n)$, то ограничение (27) на $\Delta_e(H)$ в теореме 4, очевидно, асимптотически в $(n/((r-1)^2 \ln n))^{1/6}$ раз лучше ограничения (26) на $\Delta_e(H)$ в теореме 3. В то же время, если $r \gg (n/\ln n)^{1/2}$, то наша оценка (27) становится асимптотически слабее классического результата Эрде́ша и Ловаса.

В заключение отметим, что достаточные условия существования полноцветных раскрасок у равномерных гиперграфов в терминах ограничений на максимальную степень ребра находят применения в абстрактной теории автоматов (подробнее об этом см. [14]).

4.1. Доказательство теоремы 4

Для доказательства нам понадобится классическое утверждение, носящее название локальной леммы. Впервые оно было доказано в работе П. Эрдеша и Л. Ловаса [6]. Мы сформулируем его в специальном виде, удобном для дальнейших рассуждений.

Теорема 5. Пусть на некотором вероятностном пространстве задан набор событий $Q_1, \dots, Q_N$. Пусть $S_1, \dots, S_N$ — такие подмножества множества $\mathbb{R}_N = \{1, \dots, N\}$, что для любого $i = 1, \dots, N$ событие Q_i не зависит от алгебры, порожденной событиями $\{Q_j: j \in \mathbb{R}_N \setminus S_i\}$. Если для каждого $i = 1, \dots, N$ выполнено неравенство

$$\sum_{j \in S_i} \mathbf{P}(Q_j) \leq 1/4, \quad (28)$$

то

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^N \bar{Q}_j\right) > 0.$$

Итак, пусть задан произвольный n -равномерный гиперграф $H = (V, E)$, удовлетворяющий условию (27) теоремы 4. Рассмотрим такую же случайную раскраску $\{\chi_s\}_{s \in V}$ для H , зависящую от параметра p , как и в доказательстве теоремы 1. Необходимо показать, что для H существует полноцветная r -раскраска. Для этого достаточно доказать, что случайная раскраска $\{\chi_s\}_{s \in V}$ будет с положительной вероятностью (при некотором выборе параметра p) полноцветной r -раскраской для H .

Введем системы событий

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^1 &= \{\tilde{A}_e^1, e \in E\}, & \mathcal{A}^2 &= \{\tilde{A}_e^2, e \in E\}, \\ \mathcal{A}^3 &= \{\tilde{A}_e^3, e \in E\}, & \mathcal{B} &= \{\tilde{B}_{e,f}, e, f \in E\}, \end{aligned}$$

где события $\tilde{A}_e^1, \tilde{A}_e^2, \tilde{A}_e^3$ и $\tilde{B}_{e,f}$ были определены в §3.2 (см. (14), (15), (16), (17)). В силу соотношений (13), (14), (15), (16), (17),

$$\{\{\chi_s\}_{s \in V} \text{ есть полноцветная } r\text{-раскраска для } H\} \supset \bigcap_{Q \in \mathcal{A}^1 \cup \mathcal{A}^2 \cup \mathcal{A}^3 \cup \mathcal{B}} \bar{Q}.$$

Остается показать, что вероятность последнего события строго больше нуля при некотором выборе параметра p . Определим для каждого события $Q \in \mathcal{A}^1 \cup \mathcal{A}^2 \cup \mathcal{A}^3 \cup \mathcal{B}$ такое подмножество событий $S(Q) \subset \mathcal{A}^1 \cup \mathcal{A}^2 \cup \mathcal{A}^3 \cup \mathcal{B}$, что Q не зависит от алгебры, порожденной $\mathcal{A}^1 \cup \mathcal{A}^2 \cup \mathcal{A}^3 \cup \mathcal{B} \setminus S(Q)$, и выполнено условие (28) локальной леммы, которое в наших обозначениях выглядит как

$$\sum_{\tilde{Q} \in S(Q)} \mathbf{P}(\tilde{Q}) \leq \frac{1}{4}.$$

Необходимо рассмотреть ряд случаев.

Случай 1. Пусть сначала $Q \in \mathcal{A}^1$, то есть $Q = \tilde{A}_e^1$ для некоторого $e \in E$. В силу (14), событие $\tilde{A}_e^1$ лежит в алгебре, порожденной случайными величинами $\{\xi_s, \eta_s: s \in e\}$. Поэтому оно не зависит от всех событий $\tilde{A}_f^1, \tilde{A}_f^2, \tilde{A}_f^3$, если $f \cap e = \emptyset$, и от всех событий

$\tilde{B}_{g,f}$ при условии $g \cap e = \emptyset$ и $f \cap e = \emptyset$, а также от алгебры, порожденной этими событиями, потому что данная алгебра лежит в алгебре, порожденной случайной нумерацией σ и $\{\xi_s, \eta_s : s \in V \setminus e\}$. Таким образом, в качестве $S(\tilde{A}_e^1)$ достаточно взять подмножество $\mathcal{A}^1$, состоящее из событий $\tilde{A}_f^1$, $f \cap e \neq \emptyset$, подмножество $\mathcal{A}^2$, состоящее из событий $\tilde{A}_f^2$, $f \cap e \neq \emptyset$, подмножество $\mathcal{A}^3$, состоящее из событий $\tilde{A}_f^3$, $f \cap e \neq \emptyset$, и подмножество $\mathcal{B}$, состоящее из событий $\tilde{B}_{g,f}$ с условием либо $f \cap e \neq \emptyset$, либо $g \cap e \neq \emptyset$. Ясно, что событий первых трех видов не более $\Delta_e(H) + 1$, а четвертого — не более, чем $2(\Delta_e(H) + 1)^2$. Таким образом, используя леммы 1–3, получаем следующую оценку суммы вероятностей:

$$\begin{aligned} \sum_{Q \in S(\tilde{A}_e^1)} \mathbf{P}(Q) &\leq \sum_{f: f \cap e \neq \emptyset} \mathbf{P}(\tilde{A}_f^1) + \sum_{f: f \cap e \neq \emptyset} \mathbf{P}(\tilde{A}_f^2) + \sum_{f: f \cap e \neq \emptyset} \mathbf{P}(\tilde{A}_f^3) \\ &\quad + \sum_{f, g: (f \cap e \neq \emptyset) \cup (g \cap e \neq \emptyset)} (\mathbf{P}(\tilde{B}_{f,g}) + \mathbf{P}(\tilde{B}_{g,f})) \\ &\leq (\Delta_e(H) + 1) \left[\frac{r(r-1)}{2} \left(\frac{r-2}{r} \right)^n + r \left(\frac{r-1}{r} \right)^n (1-p)^n \right. \\ &\quad \left. + (r-1)^2 \left(\frac{r-2}{r} \right)^{n-1} (1 - (1-p)^n) \right] \\ &\quad + 2(\Delta_e(H) + 1)^2 (r-1)^4 \left(\frac{r-1}{r} \right)^{2n} p = S_1. \end{aligned}$$

Выберем параметр p таким же, как в доказательстве теоремы 1:

$$p = \frac{\ln n}{2n}.$$

В силу условия теоремы, что $r \leq n/(2 \ln n)$, такой выбор параметра p является корректным: $rp \leq 1$. Таким образом, мы можем воспользоваться оценками (22), (23), (24) и (25) из доказательства теоремы 1 (ограничение (27) на $\Delta_e(H) + 1$ лишь на константу отличается от ограничения (12) на число ребер $|E|$). В итоге получаем верхнюю оценку величины S_1 :

$$S_1 < \frac{3}{2} \frac{\sqrt{11} - 3}{4} + \left(\frac{\sqrt{11} - 3}{4} \right)^2 < \frac{1}{4}. \quad (29)$$

Случай $Q \in \mathcal{A}^2$ полностью аналогичен случаю $Q \in \mathcal{A}^1$.

Случай 2. Пусть $Q \in \mathcal{A}^3$, то есть $Q = \tilde{A}_e^3$ для некоторого $e \in E$. Событие $\tilde{A}_e^3$ лежит в алгебре, порожденной случайными величинами $\{\xi_s, \eta_s : s \in e\}$, а также набором индикаторов $\{I\{\sigma_s < \sigma_t\} : s, t \in e\}$. Поэтому оно не зависит от всех событий $\tilde{A}_f^1$, $\tilde{A}_f^2$, $\tilde{A}_f^3$, если $f \cap e = \emptyset$, и от всех событий $\tilde{B}_{g,f}$ при условии $g \cap e = \emptyset$ и $f \cap e = \emptyset$, а также от алгебры, порожденной этими событиями, потому что данная алгебра лежит в алгебре, порожденной случайными величинами $\{\xi_s, \eta_s : s \in V \setminus e\}$ и индикаторами $\{I\{\sigma_s < \sigma_t\} : s, t \in V \setminus e\}$. Таким образом, в качестве $S(\tilde{A}_e^1)$ достаточно взять подмножество $\mathcal{A}^1$, состоящее из событий $\tilde{A}_f^1$, $f \cap e \neq \emptyset$, подмножество $\mathcal{A}^2$, состоящее из событий $\tilde{A}_f^2$, $f \cap e \neq \emptyset$, подмножество $\mathcal{A}^3$, состоящее из событий $\tilde{A}_f^3$, $f \cap e \neq \emptyset$, и подмножество $\mathcal{B}$, состоящее из событий $\tilde{B}_{g,f}$ с условием либо $f \cap e \neq \emptyset$, либо $g \cap e \neq \emptyset$. По условию теоремы, событий первых

трех видов не более $\Delta_e(H) + 1$, а четвертого — не более, чем $2(\Delta_e(H) + 1)^2$. Используя леммы 1–3, получаем следующую оценку суммы вероятностей:

$$\begin{aligned}
 \sum_{Q \in S(A_e)} \mathbf{P}(Q) &\leq \sum_{f: f \cap e \neq \emptyset} \mathbf{P}(\tilde{A}_f^1) + \sum_{f: f \cap e \neq \emptyset} \mathbf{P}(\tilde{A}_f^2) + \sum_{f: f \cap e \neq \emptyset} \mathbf{P}(\tilde{A}_f^3) \\
 &\quad + \sum_{f, g: (f \cap e \neq \emptyset) \cup (g \cap e \neq \emptyset)} (\mathbf{P}(\tilde{B}_{f, g}) + \mathbf{P}(\tilde{B}_{g, f})) \\
 &\leq (\Delta_e(H) + 1) \left[\frac{r(r-1)}{2} \left(\frac{r-2}{r} \right)^n + r \left(\frac{r-1}{r} \right)^n (1-p)^n \right. \\
 &\quad \left. + (r-1)^2 \left(\frac{r-2}{r} \right)^{n-1} (1 - (1-p)^n) \right] \\
 &\quad + 2(\Delta_e(H) + 1)^2 (r-1)^4 \left(\frac{r-1}{r} \right)^{2n} p = S_1 < \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

Последнее неравенство выполнено в силу (29).

Случай 3. Остается разобрать случай, когда $Q \in \mathcal{B}$, то есть $Q = \tilde{B}_{e, f}$. Из определения события $\tilde{B}_{e, f}$ (17) следует, что оно лежит в алгебре, порожденной случайными величинами $\{\xi_s, \eta_s: s \in e \cup f\}$, а также набором индикаторов $\{I\{\sigma_s < \sigma_t\}: s, t \in e \cup f\}$. Отсюда получаем, что данное событие не зависит от всех событий $\tilde{A}_g^i$, если $g \cap (e \cup f) = \emptyset$, $i = 1, \dots, 3$, и от всех событий $\tilde{B}_{g, h}$ при условии $(g \cup h) \cap (e \cap f) = \emptyset$, а также от алгебры, порожденной этими событиями, потому что данная алгебра лежит в алгебре, порожденной случайными величинами $\{\xi_s, \eta_s: s \in V \setminus (e \cup f)\}$ и индикаторами $\{I\{\sigma_s < \sigma_t\}: s, t \in V \setminus (e \cup f)\}$. Таким образом, в качестве $S(\tilde{B}_{e, f})$ достаточно взять подмножество $\mathcal{A}^i$, состоящее из событий $\tilde{A}_g^i$ для таких g , что $g \cap (e \cup f) \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, 3$, и подмножество $\mathcal{B}$, состоящее из событий $\tilde{B}_{g, h}$ с условием $(g \cup h) \cap (e \cup f) \neq \emptyset$. По условию теоремы, событий первого типа не больше чем $2(\Delta_e(H) + 1)$, второго — не больше чем $4(\Delta_e(H) + 1)^2$. Как и в первом случае, сумма вероятностей оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \sum_{Q \in S(A_e)} \mathbf{P}(Q) &\leq \sum_{g: g \cap (e \cup f) \neq \emptyset} \mathbf{P}(\tilde{A}_g^1) + \sum_{g: g \cap (e \cup f) \neq \emptyset} \mathbf{P}(\tilde{A}_g^2) \\
 &\quad + \sum_{g: g \cap (e \cup f) \neq \emptyset} \mathbf{P}(\tilde{A}_g^3) + \sum_{g, h: (g \cup h) \cap (e \cup f) \neq \emptyset} (\mathbf{P}(\tilde{B}_{g, h}) + \mathbf{P}(\tilde{B}_{h, g})) \\
 &\leq 2(\Delta_e(H) + 1) \left[\frac{r(r-1)}{2} \left(\frac{r-2}{r} \right)^n + r \left(\frac{r-1}{r} \right)^n (1-p)^n \right. \\
 &\quad \left. + (r-1)^2 \left(\frac{r-2}{r} \right)^{n-1} (1 - (1-p)^n) \right] \\
 &\quad + 4(\Delta_e(H) + 1)^2 (r-1)^4 \left(\frac{r-1}{r} \right)^{2n} p = S_2.
 \end{aligned}$$

Используя приведенные ранее оценки (22), (23), (24) и (25), приходим к искомому неравенству:

$$S_2 < 3 \frac{\sqrt{11} - 3}{4} + 2 \left(\frac{\sqrt{11} - 3}{4} \right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, для системы событий $\mathcal{A}^1 \cup \mathcal{A}^2 \cup \mathcal{A}^3 \cup \mathcal{B}$ выполняется условие (28) локальной леммы. Из нее следует, что с положительной вероятностью не случится ни одно из этих событий, поэтому для H существует полноцветная r -раскраска. Теорема 4 доказана.

5. Экстремальная задача о степени вершины

Задача о нахождении величины $p(n, r)$ — это задача о нахождении минимального числа ребер в n -равномерном гиперграфе, для которого не существует полноцветной r -раскраски. Подобную задачу можно поставить и для других характеристик гиперграфа, например, для максимальной степени вершины. Напомним, что степенью вершины в гиперграфе называется количество ребер этого гиперграфа, которые содержат данную вершину. Будем обозначать максимальную степень вершины в гиперграфе H через $\Delta(H)$.

По аналогии с величиной $p(n, r)$, введем величину $\Delta_p(n, r)$, равную минимально возможному значению $\Delta(H)$, где H — n -равномерный гиперграф, не имеющий полноцветной r -раскраски. Заметим, что из теоремы 4 вытекает следующая нижняя оценка величины $\Delta_p(n, r)$.

Следствие 1. Пусть $n \geq 3$, $r \geq 2$, и $r \leq n/(2 \ln n)$. Тогда выполняется неравенство

$$\Delta_p(n, r) \geq \frac{\sqrt{11} - 3}{4r} \frac{1}{(r-1)\sqrt{n \ln n}} \left(\frac{r}{r-1} \right)^n. \quad (30)$$

Основным результатом данного параграфа является верхняя оценка величины $\Delta_p(n, r)$.

Теорема 6. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что для всех $n \geq n_0$ и $r \geq 2$ с условием $r \leq \frac{1}{3}n^{2/3}$ выполняется неравенство

$$\Delta_p(n, r) \leq (1 + \varepsilon) \frac{n \ln r}{r} e \left(\frac{r}{r-1} \right)^n. \quad (31)$$

Доказательство. Доказательство основано на рассмотрении биномиальной модели случайного гиперграфа. Пусть $K_N^{(n)}$ — полный n -равномерный гиперграф на N вершинах, тогда случайный гиперграф $H(N, n, p)$ есть подгиперграф $K_N^{(n)}$, полученный путем случайного включения ребер $K_N^{(n)}$: каждое ребро независимо от других включается в $H(N, n, p)$ с вероятностью p и не включается с вероятностью $1 - p$. Данная модель случайного гиперграфа — это естественное обобщение классической модели случайного графа $G(n, p)$, предложенной в 60-х годах П. Эрдешем и А. Реньи (см. [16]). Подробнее об исследованиях случайных графов и гиперграфов см. [17, 18, 19].

Оценим вероятность того, что случайный гиперграф $H(N, n, p)$ допускает полноцветную r -раскраску. Рассмотрим произвольную раскраску σ_i , $i = 1, \dots, r^N$, множества вершин в r цветов. Пусть E_i — соответствующее ей множество плохих ребер, то есть множество ребер $K_N^{(n)}$, которые в раскраске σ_i не содержат вершины хотя бы одного из r

цветов. Обозначим через $v_j(i)$, $j = 1, \dots, r$, количество вершин цвета j в раскраске σ_i . По формуле включения–исключения получаем равенство

$$|E_i| = \sum_{k=1}^{r-1} (-1)^{r-k+1} S_k(i),$$

где

$$S_k(i) = \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_k): \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq r}} \binom{v_{j_1}(i) + \dots + v_{j_k}(i)}{n}.$$

Легко видеть, что вероятность того, что данная раскраска σ_i является полноцветной для гиперграфа $H(N, n, p)$ равняется $(1-p)^{|E_i|}$. В [9] было показано, что верно неравенство

$$\begin{aligned} \min_i |E_i| &= \min_i \sum_{k=1}^{r-1} (-1)^{r-k+1} S_k(i) \\ &\geq r \binom{N - N/r - 1}{n} - \binom{r}{2} \binom{N - 2N/r + 2}{n}. \end{aligned} \quad (32)$$

Выберем значение параметра N следующим образом:

$$N = \left\lceil \frac{n^2}{2r} \right\rceil.$$

В [9] было показано, что при таком выборе параметра N и условии $r \leq \frac{1}{3}n^{2/3}$ правая часть соотношения (32) асимптотически эквивалентна своему первому слагаемому, то есть существует такая функция $\psi_1(n)$, не зависящая от r и стремящаяся к 1 с ростом n , что

$$r \binom{N - N/r - 1}{n} - \binom{r}{2} \binom{N - 2N/r + 2}{n} \geq r \binom{N - N/r - 1}{n} \psi_1(n).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(H(N, n, p) \text{ не допускает полноцветной } r\text{-раскраски}) &\leq \sum_{i=1}^{r^N} (1-p)^{|E_i|} \\ &\leq r^N (1-p)^{r \binom{N - N/r - 1}{n} \psi_1(n)} \leq r^N \exp \left\{ -pr \binom{N - N/r - 1}{n} \psi_1(n) \right\}. \end{aligned} \quad (33)$$

Теперь выберем значение параметра p . Пусть $\delta_1 > 0$, тогда положим

$$p = \frac{(1 + \delta_1) N \ln r}{r \binom{N - N/r - 1}{n} \psi_1(n)}.$$

В силу такого выбора p , из (33) получаем итоговую оценку вероятности существования полноцветной r -раскраски у $H(N, n, p)$:

$$\mathbf{P}(H(N, n, p) \text{ допускает полноцветную } r\text{-раскраску}) \leq r^{-\delta_1 N}. \quad (34)$$

Перейдем к рассмотрению максимальной степени вершины в случайной гиперграфе $H(N, n, p)$. Пусть v — произвольная вершина гиперграфа $H(N, n, p)$. Обозначим через X_v ее степень, тогда случайная величина X_v имеет биномиальное распределение $\text{Bin}\left(\binom{N-1}{n-1}, p\right)$. Далее нам понадобится классическая вероятность уклонения биномиальной случайной величины от своего среднего значения: если ξ — биномиальная случайная величина, то для любого $\delta_2 > 0$

$$\mathbf{P}(\xi - \mathbf{E}\xi \geq \delta_2 \mathbf{E}\xi) \leq e^{-\delta_2^2 \mathbf{E}\xi/2}.$$

Доказательство этого несложного факта можно найти, например, в книге [18]. Применим данное утверждение к X_v :

$$\mathbf{P}(X_v - \mathbf{E}X_v \geq \delta_2 \mathbf{E}X_v) \leq e^{-\delta_2^2 \mathbf{E}X_v/2}. \quad (35)$$

Рассмотрим подробнее $\mathbf{E}X_v$. С одной стороны, учитывая, что $\psi_1(n) \leq 1$ и $r \leq \frac{1}{3}n^{2/3}$, получаем, что

$$\mathbf{E}X_v = \binom{N-1}{n-1} p = \frac{(1 + \delta_1)N(\ln r) \binom{N-1}{n-1}}{r \binom{N-N/r-1}{n} \psi_1(n)} \geq \frac{n \ln r}{r} \geq 3n^{1/3} \ln r, \quad (36)$$

а с другой стороны, в [9] было показано, что при нашем выборе параметра $N = \lceil n^2/2r \rceil$ и ограничении $r \leq \frac{1}{3}n^{2/3}$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X_v &= \binom{N-1}{n-1} p = \frac{(1 + \delta_1)N(\ln r) \binom{N-1}{n-1}}{r \binom{N-N/r-1}{n} \psi_1(n)} \\ &\leq \frac{(1 + \delta_1)n \ln r}{r \psi_1(n)} e \left(\frac{r}{r-1} \right)^n \psi_2(n), \end{aligned} \quad (37)$$

где $\psi_2(n)$ — некоторая функция, не зависящая от r и стремящаяся к 1 при $n \rightarrow \infty$.

Из неравенств (35), (36) и (37) получаем неравенство

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\Delta(H(N, n, p)) \geq (1 + \delta_2) \frac{(1 + \delta_1)n \ln r}{r \psi_1(n)} e \left(\frac{r}{r-1} \right)^n \psi_2(n)\right) \\ \leq N e^{-\delta_2^2 \mathbf{E}X_v/2} \leq N r^{-\frac{3}{2}\delta_2^2 n^{1/3}/2} = \left\lceil \frac{n^2}{2r} \right\rceil r^{-\frac{3}{2}\delta_2^2 n^{1/3}}. \end{aligned} \quad (38)$$

Итак, пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем числа $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ и $n_0 \in \mathbf{N}$ так, чтобы для любого $n > n_0$ и любого $r \geq 2$ с условием $r \leq \frac{1}{3}n^{2/3}$ выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} (1 + \delta_2)(1 + \delta_1) \frac{\psi_2(n)}{\psi_1(n)} &\leq 1 + \varepsilon, \quad r^{-\delta_1 N} < \frac{1}{3}, \\ \left\lceil \frac{n^2}{2r} \right\rceil r^{-\frac{3}{2}\delta_2^2 n^{1/3}} &< \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Такой выбор параметров, с учетом (34) и (38), гарантирует, что с вероятностью по крайней мере $1/3$ случайный гиперграф $H(N, n, p)$ не допускает полноцветных r -раскрасок и при этом его максимальная степень вершины удовлетворяет неравенству

$$\Delta(H(N, n, p)) \leq (1 + \varepsilon) \frac{n \ln r}{r} e \left(\frac{r}{r-1} \right)^n,$$

что и доказывает искомое соотношение (31). Теорема 6 доказана.

Замечание 2. Отметим, что если отказаться от ограничения $r < \frac{1}{3}n^{2/3}$ в условии теоремы 6, то можно обосновать асимптотически более слабую оценку $\Delta_p(n, r)$ нежели (31). Рассуждая так же, как и в доказательстве теоремы 6, можно показать, что при всех достаточно больших n и всех $r < n$ выполнено

$$\Delta_p(n, r) \leq 2n \ln r \left(\frac{r}{r-1} \right)^n.$$

Список литературы

1. Kostochka A. V., On a theorem by Erdős, Rubin and Taylor on choosability of complete bipartite graphs. *J. Comb.* (2002) **9**, №1.
2. Kostochka A. V., Color-critical graphs and hypergraphs with few edges: a survey. In: *More Sets, Graphs and Numbers* (Győri E., Katona G. O. H., Lovász L., eds.). Springer, Berlin, 2006, pp. 175–198.
3. Erdős P., Hajnal A., On a property of families of sets. *Acta Math. Acad. Sci. Hungary* (1961) **12**, №1–2, 87–123.
4. Erdős P., On a combinatorial problem, II. *Acta Math. Acad. Sci. Hungary* (1964) **15**, №3–4, 445–447.
5. Radhakrishnan J., Srinivasan A., Improved bounds and algorithms for hypergraph two-coloring. *Random Structures and Algorithms* (2000) **16**, №1, 4–32.
6. Erdős P., Lovász L., Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions. *Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai* (1973) **10**, 609–627.
7. Шабанов Д. А., Об одной комбинаторной задаче Эрдёша. *Докл. Акад. наук* (2004) **396**, №2, 166–169.
8. Шабанов Д. А., Экстремальные задачи для раскрасок равномерных гиперграфов. *Изв. РАН. Сер. матем.* (2007) **71**, №6, 183–222.
9. Шабанов Д. А., О существовании полноцветных раскрасок для равномерных гиперграфов. *Матем. сб.* (2010) **201**, №4, 137–160.
10. Визинг В. Г., Раскраска вершин графа в предписанные цвета. *Дискрет. анализ* (1976) **29**, 3–10.
11. Erdős P., Rubin A. L., Taylor H., Choosability in graphs. *Proc. West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing* (1980) **26**, 125–157.
12. Alon N., Choice number of graphs: a probabilistic approach. *Combinatorics, Probability and Computing* (1992) **1**, 107–114.
13. Shabanov D. A., On a generalization of Rubin's theorem. *J. Graph Theory* (2011) **67**, №3, 226–234.
14. Gécseg F., Imreh B., Pluhár A., On the existence of finite isomorphic complete systems of automata. *J. Automata, Languages and Combinatorics* (1998) **3**, №2, 77–84.
15. Alon N., Spencer J. H., *The probabilistic method*. Wiley, New York, 1992.
16. Erdős P., Rényi A., On the evolution of random graphs. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* (1960) **5**, №1–2, 17–61.
17. Bollobás B., *Random graphs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
18. Janson S., Luczak T., Ruciński A., *Random graphs*. Wiley, New York, 2000.
19. Karoński M., Luczak T., Random hypergraphs. *Bolyai Soc. Math. Stud.* (1996) **2**, 283–293.

Статья поступила 9.09.2011.