Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Топчий, Асимптотика производных от функции восстановления для распределений без первого момента с правильно меняющимися хвостами степени $\beta \in (1/2, 1]$, *Дискрет. матем.*, 2012, том 24, выпуск 2, 123–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1189>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 14:18:17

Асимптотика производных от функции восстановления для распределений без первого момента с правильно меняющимися хвостами степени $\beta \in (1/2, 1]$

© 2012 г. В. А. Топчий

Для распределений на $\mathbf{R}$ с бесконечным средним и правильно меняющимися хвостами степени $\beta \in (1/2, 1]$, методами явного обращения преобразования Фурье для функции восстановления найдены достаточные условия, когда две первые производные от функции восстановления эквивалентны формальным производным от главного члена функции восстановления.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 11-01-00139, и Программы ИМ СО РАН «Современные проблемы теоретической математики: Развитие методов исследования стохастических моделей совокупностей частиц».

1. Основные результаты

В [1] описаны асимптотические свойства приращений функций восстановления

$$V(t) = V_{\mathcal{F}}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}^{*k}(t)$$

для распределений $\mathcal{F}(t)$ с бесконечным средним, сосредоточенных на положительной полупрямой (необязательно абсолютно непрерывных), а в [2] эти результаты обобщены на распределения на всей числовой прямой. В теореме В в [2] приводятся гипотетические утверждения для асимптотики приращений $V(t)$ с абсолютно непрерывными распределениями $\mathcal{F}(t)$ с плотностью

$$f(t) = \mathcal{F}'(t).$$

В настоящей работе мы изучаем асимптотические свойства плотности функции восстановления

$$v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{*k}(t)$$

и ее производной $v'(t)$ при $t \rightarrow \pm\infty$. Здесь и далее символ $\pm$ используется для одновременной записи двух соотношений, соответствующих замене в них $\pm$ на $+$ или на $-$. Значения пределов функций $F(t)$ при $t \rightarrow \pm\infty$ обозначаются $F(\pm\infty)$. Для распределений $\mathcal{F}(t)$ с носителем $\mathbf{R}$, вместо $V(t)$ естественно изучать величину

$$\partial V(t) = \partial^\Delta V(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \partial \mathcal{F}^{*k}(t),$$

где $\Delta > 0$ фиксировано, а оператор $\partial = \partial^\Delta$ первоначально определен для произвольных функций распределения $F(t)$ равенством

$$\partial F(t) = \partial^\Delta F(t) = F(t + \Delta) - F(t).$$

Пусть распределение $\mathcal{F}(t)$ абсолютно непрерывно, и, как и в [2], при $t \geq 0$ верны соотношения

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}\mathcal{F}(t) &= \mathcal{F}(-t) + 1 - \mathcal{F}(t) = t^{-\beta} L(t), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - \mathcal{F}(t)}{\mathfrak{D}\mathcal{F}(t)} &= p_+, \end{aligned} \quad (1)$$

где $p_+ \in [0, 1]$, $L(t)$ — медленно меняющаяся при $t \rightarrow \infty$ функция, $\beta \in (0, 1]$, а при $\beta = 1$ всегда

$$\int_0^\infty t^{-1} L(t) dt = \infty$$

(то есть первый момент бесконечен). Обозначим

$$p_- = 1 - p_+, \quad p = p_+ - p_-.$$

Далее используются меры (распределения), принимающие значения двух знаков. Они называются зарядами, если представимы в виде разности двух обычных конечных мер. Для зарядов $F(t)$ всегда определены $F(\pm\infty) \in \mathbf{R}$. Далее полагаем $F(-\infty) = 0$. Расширим определение оператора $\mathfrak{D}$ и введем новый оператор $\mathfrak{D}^-$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}F(t) &= F(-t) + F(+\infty) - F(t), \\ \mathfrak{D}^-F(t) &= F(+\infty) - F(t) - F(-t). \end{aligned}$$

По аналогии с классическими распределениями, при $t \geq 0$ величины $F(-t)$ и $F(+\infty) - F(t)$ назовем, соответственно, левым и правым хвостами заряда. Заметим, что второе соотношение из (1) эквивалентно соотношению

$$\mathfrak{D}^- \mathcal{F}(t) = (p + o(1))t^{-\beta} L(t).$$

Для распределений, сосредоточенных на $\mathbf{R}^+$, условия (1) превращаются в

$$1 - \mathcal{F}(t) = t^{-\beta} L(t), \quad \mathcal{F}(0) = 0. \quad (2)$$

При условии (2) с $\beta \in (0, 1/2]$ асимптотика $v(t)$ и $v'(t)$ исследована в [3, 4], где доказано, что условие (i) из теоремы В в [2] достаточно для формального дифференцирования асимптотического выражения для $V(t)$, а немного усиленное условие (iii) из теоремы В в [2] — для повторного дифференцирования обеих частей асимптотического

соотношения, что определяет асимптотику $v'(t)$. Распространение этих результатов на распределения, удовлетворяющие условию (1), носит технический характер. Методы исследования асимптотического поведения функций восстановления в случаях $\beta \in (0, 1/2]$ и $\beta \in (1/2, 1]$ концептуально различны. Поэтому далее рассматриваются только распределения, удовлетворяющие условию (1) с $\beta \in (1/2, 1]$. Определения и свойства характеристических функций из [5, гл. XV] и правильно (медленно) меняющихся функций из [5, гл. VIII, §§8–9] используются без ссылок.

Для $t \geq 0$ обозначим

$$m(t) = \int_0^t \mathfrak{D}\mathcal{F}(u) du \sim \begin{cases} \frac{t^{1-\beta} L(t)}{1-\beta} & \text{при } \beta \in (1/2, 1) \\ L_1(t) & \text{при } \beta = 1, \end{cases} \quad (3)$$

где

$$L_1(t) = \int_0^t u^{-1} L(u) du = m(t) \rightarrow \infty$$

при $t \rightarrow \infty$. По лемме из [5, гл. VIII, §9], функция $L_1(t)$ должна быть медленно меняющейся на бесконечности, а по теореме 1 из того же параграфа

$$L(t) = o(m(t)),$$

или

$$L(t) = o(L_1(t)).$$

Из теорем 1 и 5 в [1] и теоремы А в [2] при ограничении (1) приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Функция восстановления для распределения $\mathcal{F}(t)$, удовлетворяющего условию (2), обладает следующими свойствами:*

$$V(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{F}^{*j}(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} C_{\beta} \frac{t}{m(t)} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \begin{cases} \frac{\sin(\pi\beta)t^{\beta}}{\pi\beta L(t)} & \text{при } \beta \in (1/2, 1) \\ \frac{t}{L_1(t)} & \text{при } \beta = 1, \end{cases}$$

где

$$C_{\beta}^{-1} = \Gamma(\beta)\Gamma(2-\beta),$$

или

$$C_{\beta}^{-1} = \frac{\sin(\pi\beta)}{\pi(1-\beta)}, \quad \beta \neq 1, \quad C_1 = 1,$$

и

$$\partial V(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \begin{cases} \Delta \frac{\sin(\pi\beta)t^{\beta-1}}{\pi L(t)} & \text{при } \beta \in (1/2, 1) \\ \Delta L_1^{-1}(t) & \text{при } \beta = 1. \end{cases} \quad (4)$$

Если же $\mathcal{F}(t)$ удовлетворяет условию (1), то при $t \rightarrow \pm\infty$

$$\partial V(t) = \begin{cases} \Delta \frac{p_{\pm} + o(1)}{\pi K L(|t|)} \sin(\pi\beta) |t|^{\beta-1} & \text{при } \beta \in (1/2, 1) \\ \Delta \frac{p_{\pm} + o(1)}{L_1(|t|)} & \text{при } \beta = 1, p \neq 0, \end{cases} \quad (5)$$

где

$$K = 1 - 4p_+ p_- \sin^2(\pi\beta/2).$$

Представления (4) и (5) не описывают асимптотику $v(t)$. Для ее получения нужен двойной предельный переход. Далее мы приведем достаточные условия для указанного перехода и докажем его справедливость.

Отметим, что соотношения из первой строки (5) справедливы и при $\beta \in (0, 1/2]$, если, в дополнение к условию (1), для некоторой постоянной $C > 0$ и при всех $t \in \mathbf{R}$ выполняется неравенство

$$\partial \mathcal{F}(|t|) \leq C |t|^{-1-\beta} L(|t|).$$

Условия А. Распределение $\mathcal{F}(t)$ и его плотность $f(t) = \mathcal{F}'(t)$ абсолютно непрерывны, $|f'(t)|$ интегрируема, $m(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$,

$$f(t) \underset{t \rightarrow \pm\infty}{=} (p_{\pm} + o(1)) \beta |t|^{-\beta-1} L(|t|), \quad (6)$$

где $\beta \in (1/2, 1]$, и для некоторых $C_{\pm} \geq p_{\pm}$

$$\text{Var}_u f(\pm u) \underset{u \rightarrow \infty}{=} (C_{\pm} + o(1)) \beta t^{-\beta} L(t). \quad (7)$$

По теореме 1 из [5, гл. VIII, §9], условие (1) следует из (6), которое для распределений на положительной полуоси эквивалентно соотношению

$$L'(t) \underset{t \rightarrow \infty}{=} o(t^{-1}) L(t).$$

Абсолютная непрерывность $f(t)$ и интегрируемость $|f'(t)|$ влекут равенство

$$f(t) = \int_{-\infty}^t [f'(u)]^+ du - \int_{-\infty}^t [f'(u)]^- du, \quad (8)$$

где функционалы $[\cdot]^+$ и $[\cdot]^-$ обозначают положительную и отрицательную часть от стоящего в скобках выражения. Из (8) следует ограниченность функции $f(t)$ и ее вариации, то есть $f(t)$ представима в виде разности двух ограниченных монотонных функций, и в силу (1)

$$\lim_{t \rightarrow +0} (t^{-\beta} L(t))' = 0, \quad L(t) \underset{t \rightarrow +0}{\sim} t^{\beta}. \quad (9)$$

Ограниченность функции $f(t)$ и ее вариации совместно с (7) влечет ограниченность функции $tf(t)$ и ее вариации, что принципиально для исследований $v(t)$.

Замечание 1. В условиях А соотношение (7) можно заменить на одно из традиционных, но более ограничительных: функция $|tf'(t)|$ интегрируема на $\mathbf{R}$, или $f(t)$ равномерно ограничена и $tf(\pm t)$ не возрастают при достаточно больших t .

В случае замены условия (7) на интегрируемость $|tf'(t)|$, ограниченность вариации функции $tf(t)$ следует из абсолютной сходимости интеграла от $tf'(t)$ и представления

$$tf(t) = \int_{-\infty}^t f(u) du + \int_{-\infty}^t u[f'(u)]^+ du - \int_{-\infty}^t u[f'(u)]^- du.$$

Ограниченность вариации функции $tf(t)$ при втором варианте условий из замечания 1 очевидна в силу интегрируемости $|f'(t)|$.

Опишем асимптотику плотности восстановления, что важно для основной задачи — изучения производной от этой плотности.

Теорема 2. Пусть функция распределения $\mathcal{F}(t)$ удовлетворяет условиям А и выполнено соотношение $m(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$, тогда при $t \rightarrow \pm\infty$

$$v(t) = \begin{cases} \frac{p_{\pm} + o(1)}{\pi KL(|t|)} \sin(\pi\beta) |t|^{\beta-1} & \text{при } \beta \in (1/2, 1) \\ \frac{p_{\pm} + o(1)}{L_1(|t|)} & \text{при } \beta = 1, p \neq 0. \end{cases} \quad (10)$$

Усилим условия (А). Обозначим

$$\mathcal{F}_p(t) = \mathcal{F}(t) + tf(t),$$

а ее плотность

$$f_p(t) = tf'(t) + 2f(t).$$

Если верно соотношение (6), то при $\beta \in (1/2, 1)$ функция $\mathfrak{D}\mathcal{F}_p(t)$ имеет хвост, асимптотически пропорциональный хвосту $\mathfrak{D}\mathcal{F}(t)$, а при $\beta = 1$ хвост $\mathfrak{D}\mathcal{F}_p(t) = L'(t)$, вообще говоря, не является правильно меняющимся и имеет принципиально другой порядок убывания относительно хвоста $\mathfrak{D}\mathcal{F}(t)$. Отметим, что формально

$$\mathfrak{D}f_p(t) = L''(t).$$

Этим мотивирована вторая часть условий В.

Условия В. Распределение $\mathcal{F}(t)$, его плотность $f(t)$ и $f'(t)$ абсолютно непрерывны, $|f''(t)|$ интегрируема, $\beta \in (1/2, 1]$, $m(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$,

$$f'(t) \underset{t \rightarrow \pm\infty}{=} -(p_{\pm} + o(1))(\beta + 1)\beta t^{-\beta-2} L(t), \quad (11)$$

при $\beta \in (1/2, 1)$ для некоторых $C_{1\pm} \geq p_{\pm}$ верны соотношения

$$\text{Var } u^2 f'(\pm u) \underset{u > t}{=} (C_{1\pm} + o(1))(\beta + 1)\beta t^{-\beta} L(t). \quad (12)$$

Если $\beta = 1$, то функция

$$L_p(t) = |L'(t)|t = \text{sign}\{L'(t)\}L'(t)t$$

является медленно меняющейся при $t \rightarrow \infty$, $p \neq 0$,

$$\mathcal{F}_p(t) \underset{t \rightarrow \pm\infty}{=} (p_{\pm} + o(1))L'(|t|), \quad (13)$$

и для некоторых $C_{2\pm} \geq p_{\pm}$ верны соотношения

$$\text{Var}_{u>t} \mathcal{F}_p(\pm u) \underset{t \rightarrow \pm\infty}{=} (C_{2\pm} + o(1))L_p(t)/t. \quad (14)$$

Кроме этого, если $L(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то

$$f_p(\pm t) \underset{t \rightarrow \pm\infty}{=} (p_{\pm} + o(1))L'(|t|)/t, \quad (15)$$

и для некоторых $C_{3\pm} \geq p_{\pm}$

$$\text{Var}_{u>t} f_p(\pm u) \underset{t \rightarrow \pm\infty}{=} -(C_{3\pm} + o(1))L'(t). \quad (16)$$

Заметим, что для распределений на $\mathbf{R}^+$ (11) эквивалентно условию

$$L''(t) \underset{t \rightarrow \infty}{=} o(t^{-2})L(t).$$

При $\beta = 1$, по теореме 1 в [5, гл.VIII, §9], определение $L_p(t)$ эквивалентно оценкам

$$L'(t) = o(t^{-1}L(t))$$

или

$$L_p(t) = o(L(t)),$$

а (15) для распределений на $\mathbf{R}^+$ эквивалентно соотношению

$$L'_p(t) = o(t^{-1}L_p(t)).$$

Проверим, что условия А следуют из условий В. Абсолютная интегрируемость $f'(t)$ является простым следствием из (11). Соотношения (11) и (12) позволяют рассмотреть положительную и отрицательную полуоси и представить $t^2 f'(t)$ как разности двух убывающих на $\pm\infty$ функций с асимптотиками порядка $|t|^{-\beta}L(|t|)$. Тогда и $tf'(t)$ будут разностями двух убывающих на $\pm\infty$ функций с асимптотикой порядка $|t|^{-1-\beta}L(|t|)$, что вместе с представлениями

$$tf(-t) = - \int_{-\infty}^{-t} f(u) du - \int_{-\infty}^{-t} uf'(u) du$$

и

$$tf(t) = - \int_t^{\infty} f(u) du - \int_t^{\infty} uf'(u) du,$$

где $t > 0$, доказывает (6) и (7). Аналогично, при $\beta = 1$ условия (13) и (14) влекут (6) и (7).

Описанные после условий А свойства $f(t)$ автоматически переносятся на $f'(t)$. Конкретнее, если верны условия В, то функция $f'(t)$ и ее вариация ограничены.

По аналогии с описанием свойств $f(t)$, ограниченность функции $f'(t)$ и ее вариации совместно с (12) немедленно влечет ограниченность функции $t^2 f'(t)$ и ее вариации, что является принципиальным для исследований производной от плотности восстановления.

Замечание 2. В условиях В при $\beta \in (1/2, 1)$, соотношение (12) можно заменить на традиционное, но более ограничительное: функция $t^2 f''(t)$ абсолютно интегрируема, или $f'(t)$ равномерно ограничена и $t^2 |f'(\pm t)|$ не возрастает при достаточно больших t . Несложно сформулировать аналоги и для условий на вариацию хвостов в случае $\beta = 1$.

Доказательство утверждений из замечания 2 аналогично следующему за замечанием 1. В случае выполнения условий В, из (1) при $\beta = 1$ следует, что

$$f_p(t) \underset{t \rightarrow \pm\infty}{=} (p_{\pm} + o(1))L''(t), \quad \mathfrak{D}f_p(t) = -L''(t),$$

что по (1) и (9) при $L(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ приводит к равенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} t f_p(t) dt = \int_0^{\infty} t L''(t) dt = - \int_0^{\infty} L'(t) dt = 0. \quad (17)$$

Теорема 3. Пусть функция распределения $\mathcal{F}(t)$ удовлетворяет условиям В и выполнено соотношение $m(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$, тогда при $t \rightarrow \pm\infty$

$$v'(t) = \begin{cases} \pm \frac{p_{\pm} + o(1)}{\pi K L(|t|)} \sin(\pi\beta)(\beta - 1)|t|^{\beta-2} & \text{при } \beta \in (1/2, 1), \\ \mp \frac{p_{\pm} + o(1)}{t m^2(|t|)} L(|t|) & \text{при } \beta = 1, p \neq 0. \end{cases} \quad (18)$$

В этой теореме наиболее сложным является случай $\beta = 1$.

Теоремы такого типа актуальны при исследовании ветвящихся процессов Беллмана–Харриса, ассоциированных с каталитическими случайными блужданиями на многомерных решетках, см. [6, 7].

2. Оценки для характеристических функций

Пусть

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(t) dt$$

есть характеристическая функция для $\mathcal{F}(t)$, тогда

$$\varphi(-x) = \bar{\varphi}(x).$$

Действительная часть характеристической функции $\Re \varphi(x)$ четна, а мнимая $\Im \varphi(x)$ нечетна, поэтому исследования их свойств проводятся только при $x > 0$. Утверждения теорем об асимптотике функций восстановления и производных от них доказываются только для $t \rightarrow +\infty$ и $p_+ > 0$, а случай $t \rightarrow -\infty$ получается из изучаемого при замене распределения $\mathcal{F}(t)$ на $1 - \mathcal{F}(-t)$, что соответствует замене p_+ на p_- и наоборот в условии (1) и утверждениях теорем.

Далее при описании главных членов действительной и мнимой частей выражений используется символ $\cong$, интерпретируемый как раздельную эквивалентность (или оценки) для действительной и мнимой частей функций из комплексной области при $x \rightarrow +0$.

Приведем известные свойства характеристических функций. Утверждение, что для функции распределения $F_0(t)$ выполнено условие (1), означает, что оно верно при замене в нем $\mathcal{F}(t)$ на $F_0(t)$ и $L(t)$ на медленно меняющуюся $L_0(t)$, а аналог $m(t)$ обозначим $m_0(t)$.

Теорема 4. В утверждениях теоремы считаем, что $x \rightarrow +0$.

(1) Если у распределения $F_0(t)$ среднее a конечно, то (см. [8, гл. 7, (1.1)])

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) - 1 &\sim ixa(1 + o(1)), \\ \varphi_0'(x) &\sim ia.\end{aligned}\tag{19}$$

(2) Если для распределения $F_0(t)$ выполняется условие (1), то (см. [2, лемма 1]) при $\beta \in (0, 1)$

$$1 - \varphi_0(x) \cong \left(\cos \frac{\pi\beta}{2} - i(p + o(1)) \sin \frac{\pi\beta}{2} \right) \Gamma(1 - \beta)x^\beta L_0(x^{-1}),$$

а при $\beta = 1$, если, дополнительно,

$$m_0(t) = \int_0^t u^{-1} L_0(u) du \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty,$$

то

$$\Re(1 - \varphi_0(x)) \sim \frac{1}{2}\pi L_0(x^{-1})x, \quad \Im \varphi_0(x) = x(p + o(1))m_0(x^{-1}).\tag{20}$$

Приведем лемму 4 из [5, гл. XV, §4, с. 575]. Условие, что существуют интегрируемые производные из [5] будет выполнено, если дифференцируемая функция абсолютно непрерывна и имеет ограниченную вариацию.

Лемма 1. Если распределение $\mathcal{F}(t)$ абсолютно непрерывно, то

$$|\varphi(x)| = o(1) \quad \text{при } x \rightarrow \infty,\tag{21}$$

если плотность $f(t)$ абсолютно непрерывна и $|f'(t)|$ интегрируема, то

$$|\varphi(x)| = o(x^{-1}), \quad |\varphi'(x)| = o(x^{-1}) \quad \text{при } x \rightarrow \infty,\tag{22}$$

а если и $f'(t)$ абсолютно непрерывна и $|f''(t)|$ интегрируема, то

$$|\varphi(x)| = o(x^{-2}), \quad |\varphi'(x)| = o(x^{-2}) \quad \text{при } x \rightarrow \infty.\tag{23}$$

Функции ограниченной вариации будем интерпретировать как распределение заряда. Заряд (меру) интервала $[a, b]$ для функции ограниченной вариации

$$k(t) = k_1(t) - k_2(t),$$

где $k_i(t)$ ограничены и не убывают (или не возрастают), считаем равным $k(b) - k(a)$. Распределение (функция) $k(t)$ определяют одну и ту же меру при добавлении к ней произвольной постоянной или к обеим компонентам $k_i(t)$ одинаковой ограниченной монотонной функции. Поэтому полагаем, что $k_i(-\infty) = 0$, а мера оси будет $\mathfrak{K} = k(\infty)$. Это эквивалентно представлению

$$k(t) = M_1 F_{k,1}(t) - M_2 F_{k,2}(t),$$

где $F_{k,i}(t)$ — вероятностные распределения, а M_i таковы, что

$$M_1 - M_2 = \mathfrak{R}, \quad M_1 + M_2 = \operatorname{Var}_{t \in \mathbb{R}} k(t).$$

Если $\mathfrak{D}k(t)$ правильно меняется и вариации $k(t)$ на множествах, соответствующих хвостам на $\pm\infty$, асимптотически пропорциональны $\mathfrak{D}k(t)$, либо бесконечно малы относительно них, то компоненты $F_{k,i}(t)$ можно выбрать с хвостами, асимптотически пропорциональными $\mathfrak{D}k(t)$ на $\pm\infty$, соответственно. Один из хвостов $k(t)$ будет бесконечно мал относительно другого, если $p_+ = 0$ или $p_+ = 1$. Далее для единообразия предполагается, что хвосты компонент разложения для $k(t)$ асимптотически пропорциональны на $\pm\infty$.

Проинтегрируем по частям производную

$$\varphi'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} i e^{itx} t f(t) dt$$

и получим

$$\varphi'(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx} d(t f(t))}{x} = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{f(t) + t f'(t)}{x} dt. \quad (24)$$

В последних соотношениях все интегралы сходятся в силу условия (6) и ограниченности вариации функции $t f(t)$.

Интегрирование по частям распределений, удовлетворяющих условиям А, приводит к равенству

$$\varphi(x) = -i x^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f'(t) dt. \quad (25)$$

Из части 2 теоремы 4, условия (1) и того факта, что

$$K = 1 - 4p_+ p_- \sin^2 \frac{\pi\beta}{2},$$

приходим к следующим утверждениям.

Лемма 2. Если для $\mathcal{F}(t)$ выполнено условие (1) с $\beta = 1$, то при $x \rightarrow +0$

$$\Re(1 - \varphi(x)) \sim \frac{1}{2} \pi x L(x^{-1}), \quad (26)$$

$$\Im \varphi(x) = (p + o(1)) x m(x^{-1}), \quad (27)$$

$$|1 - \varphi(x)|^2 = (1 - \Re \varphi(x))^2 + (\Im \varphi(x))^2 \sim p^2 x^2 m^2(x^{-1}), \quad (28)$$

$$1 - |\varphi(x)|^2 = 2(1 - \Re \varphi(x)) - |1 - \varphi(x)|^2 \sim \pi x L(x^{-1}). \quad (29)$$

Лемма 3. Если для $\mathcal{F}(t)$ выполнено условие (1) с $\beta \in (1/2, 1)$, то при $x \rightarrow +0$

$$1 - \varphi(x) \cong \left(\cos \frac{\pi\beta}{2} - i(p + o(1)) \sin \frac{\pi\beta}{2} \right) \Gamma(1 - \beta) x^\beta L(x^{-1}), \quad (30)$$

$$|1 - \varphi(x)|^2 \sim K \Gamma^2(1 - \beta) x^{2\beta} L^2(x^{-1}),$$

$$1 - |\varphi(x)|^2 \sim 2 \cos \frac{\pi\beta}{2} \Gamma(1 - \beta) x^\beta L(x^{-1}).$$

Если верны условия А, то в силу (24) $\varphi_1(x) = x\varphi'(x)$ является преобразованием Фурье для заряда $\mathcal{F}_1(t) = -t\mathbf{f}(t)$ нулевой массы, при этом

$$\mathfrak{D}\mathcal{F}_1(t) \underset{t \rightarrow \infty}{=} (1 + o(1))\beta t^{-\beta} L(t).$$

Соотношение (6) позволяет утверждать, что

$$\mathcal{F}_1(t) \underset{t \rightarrow \pm\infty}{=} -(p_{\pm} + o(1))\beta |t|^{-\beta} L(|t|), \quad (31)$$

а если дополнительно учесть условие (7), то для некоторой постоянной $A > 0$ имеет место представление

$$\mathcal{F}_1(t) = A\mathcal{F}_{1,1}(t) - A\mathcal{F}_{1,2}(t), \quad (32)$$

где $\mathcal{F}_{1,i}(t)$ — классические функции распределения с хвостами на $\pm\infty$, асимптотически пропорциональными хвосту $\mathfrak{D}\mathcal{F}(t)$.

Лемма 4. Если $\beta = 1$ и выполнены условия А, то при $x \rightarrow +0$

$$\Re(\varphi'(x)) \sim -\frac{1}{2}\pi L(x^{-1}), \quad (33)$$

$$\Im(\varphi'(x)) = (p + o(1))m(x^{-1}), \quad (34)$$

$$(|1 - \varphi(x)|^2)' \sim 2p^2 x m^2(x^{-1}), \quad (35)$$

$$(|\varphi(x)|^2)' \sim -\pi L(x^{-1}). \quad (36)$$

Лемма 5. Если выполнены условия А с $\beta \in (1/2, 1)$, то при $x \rightarrow +0$

$$\varphi'(x) \cong -\beta \left(\cos \frac{\pi\beta}{2} - i(p + o(1)) \sin \frac{\pi\beta}{2} \right) \Gamma(1 - \beta) x^{\beta-1} L(x^{-1}), \quad (37)$$

$$(|1 - \varphi(x)|^2)' \sim 2\beta K \Gamma^2(1 - \beta) x^{2\beta-1} L^2(x^{-1}), \quad (38)$$

$$(|\varphi(x)|^2)' \sim -2\beta \cos \frac{\pi\beta}{2} \Gamma(1 - \beta) x^{\beta-1} L(x^{-1}). \quad (39)$$

Доказательство лемм 4 и 5. Далее преобразования Фурье для $\mathcal{F}_*(t)$ будем обозначать через $\varphi_*(x)$. Применяя к распределениям из (32) часть 2 теоремы 4, с учетом (31) получаем, что главные члены действительной и мнимой частей в окрестности нуля у $\varphi_1(x)$ и $\beta(\varphi(x) - 1)$ совпадают. Это, по определению $\varphi_1(x)$, позволяет получить первые части лемм 2 и 3 для $\varphi'(x)$. Соотношения (35) и (36) (или (38) и (39) в лемме 5) получаем после дифференцирования выражений, стоящих за знаком равенства в (28) и (29):

$$(|1 - \varphi(x)|^2)' = -2(1 - \Re \varphi(x)) \Re \varphi'(x) + 2 \Im \varphi(x) \Im \varphi'(x), \quad (40)$$

$$(1 - |\varphi(x)|^2)' = -2 \Re \varphi'(x) - (|1 - \varphi(x)|^2)' \quad (41)$$

и применения оценок (26), (27), (33) и (34) (или (30), (37) в лемме 5).

Следствие 1. Если выполнены условия А и $\beta \in (1/2, 1]$, то при $x \rightarrow +0$

$$\frac{(|1 - \varphi(x)|^2)'}{|1 - \varphi(x)|^2} \sim 2\beta x^{-1}.$$

Только для случая $\beta = 1$ и $p \neq 0$ введем обозначения

$$a(x) = \frac{\Im \varphi(x)}{x},$$

$$b(x) = \frac{|1 - \varphi(x)|^2}{x^2}.$$

Определение $L_p(t)$ при $\beta = 1$ из условий В означает асимптотическую монотонность $L(t)$ на бесконечности, что определим как *возрастание или *убывание $L(t)$. Если предел при $t \rightarrow \infty$ у $L(t)$ равен нулю, положительный конечный или бесконечный, то будем называть ее *нулевой, *постоянной или *бесконечной, соответственно. Из определения $L_p(t)$ следует, что *нулевая $L(t)$ всегда *убывающая, *бесконечная — всегда *возрастающая, а *постоянная бывает как *убывающей, так и *возрастающей.

По лемме 2, при $x \rightarrow +0$

$$a(x) \sim pm(x^{-1}),$$

$$b(x) \sim p^2 m^2(x^{-1}).$$

Пусть

$$g = \lim_{t \rightarrow +\infty} L(t),$$

тогда $g < \infty$ для *нулевых и *постоянных $L(t)$. Отметим, что для *постоянных $L(t)$, что соответствует $g \in \mathbf{R}^+$, выполнено соотношение $m(t) \sim g \ln t$, если $t \rightarrow +\infty$, и $a(x) \sim -pg \ln x$, а $b(x) \sim p^2 g^2 \ln^2 x$ при $x \rightarrow +0$.

Лемма 6. Пусть $\beta = 1$ и выполнены условия В, тогда при $x \rightarrow +0$ для *нулевых и *постоянных функций $L(t)$ верны оценки

$$a'(x) = -pgx^{-1} + o(x^{-1}), \quad (x^{-1}(1 - \Re \varphi(x)))' = o(x^{-1}), \quad (42)$$

и для этих же классов функций верно, что

$$b'(x) = (2p^2 g^2 + o(1))x^{-1}m(x^{-1}), \quad (43)$$

а для *возрастающих функций $L(t)$ верны оценки

$$a'(x) \sim -px^{-1}L(x^{-1}), \quad (x^{-1}(1 - \Re \varphi(x)))' \sim \pi x^{-1}L_p(x^{-1})/2, \quad (44)$$

$$b'(x) \sim -2p^2 x^{-1}m(x^{-1})L(x^{-1}). \quad (45)$$

Доказательство. Вывод соотношений (42) и (44) основан на представлении

$$\left(\frac{1 - \varphi(x)}{x} \right)' = \frac{-x\varphi'(x) + \varphi(x) - 1}{x^2} = \frac{\varphi_1(x) + \varphi(x) - 1}{x^2}. \quad (46)$$

В числителе (46) стоит выражение $\varphi_1(x) + \varphi(x)$, являющееся характеристической функцией заряда массы 1 с (обобщенной) функцией распределения

$$\mathcal{F}_p(t) = \mathcal{F}(t) - \mathcal{F}_1(t).$$

По определению,

$$\mathfrak{D}\mathcal{F}_1(t) = L(t)/t - L'(t)$$

и

$$\mathfrak{D}\mathcal{F}_p(t) = L'(t) = \text{sign}\{L'(t)\}L_p(t)/t,$$

а ее плотностью будет

$$\mathfrak{D}f_p(t) = L''(t).$$

При этом

$$1 - \mathcal{F}_p(t) \underset{t \rightarrow \infty}{=} (p_+ + o(1))L'(t),$$

а

$$\mathcal{F}_p(-t) \underset{t \rightarrow \infty}{=} (p_- + o(1))L'(t),$$

и в случае $g < \infty$ средним для заряда $\mathcal{F}_p(t)$ будет

$$\int_0^\infty \mathfrak{D}\mathcal{F}_p(t) dt = g.$$

Представления (14), знакопостоянство $L'(t)$ и асимптотическое убывание $L_p(t)/t$ на бесконечности влекут возможность представить хвосты заряда $\mathcal{F}_p(t)$ в окрестностях $\pm\infty$ как разности двух монотонно убывающих к нулю функций вида $(c. + o(1))L_p(|t|)/|t|$. Это, как и в случае с (32), позволяет получить

$$\mathcal{F}_p(t) = A_1\mathcal{F}_{p,1}(t) - A_2\mathcal{F}_{p,2}(t), \quad (47)$$

где $\mathcal{F}_{p,i}(t)$, $i = 1, 2$, есть стандартные функции распределения с хвостами, равными $(c_{i\pm} + o(1))L_p(|t|)/|t|$, причем $A_1, A_2 \geq 0$,

$$A_1 - A_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{sign}\{L'(t)\}.$$

Применяя к этим распределениям с *нулевыми и *постоянными $L(t)$ формулу (19), получаем соотношение (42). В случае $g = \infty$, воспользовавшись (20) для $\mathcal{F}_{p,i}(t)$ и (46), приходим к (44). Представление

$$b'(x) = \left(\frac{|1 - \varphi(x)|^2}{2x^2} \right)' = \frac{1 - \Re \varphi(x)}{x} \left(\frac{1 - \Re \varphi(x)}{x} \right)' + a(x)a'(x) \quad (48)$$

приводит к (43) и (45), если дополнительно воспользоваться леммой 2 и (42) или (44) соответственно.

Оценки (42) и (43) при $g = 0$ грубоваты и нуждаются в уточнении. Дело в том, что распределения $\mathcal{F}_{p,i}(t)$, $i = 1, 2$, с *нулевой функцией $L(t)$ и характеристическими функциями $\varphi_{p,i}(x)$ имеют хвосты порядка $|t|^{-1}L_p(|t|)$, конечные моменты $g_{p,i}$, при этом $A_1g_{p,1} - A_2g_{p,2} = 0$, и после вычисления характеристической функции для $\mathcal{F}_p(t)$ как линейной комбинации $\mathcal{F}_{p,i}(t)$ аналогами оценок (27) и (28) по доказываемой ниже лемме 8 будут

$$\Re(1 - \varphi_p(x)) \sim -\frac{1}{2}\pi x L_p(x^{-1}), \quad \Im \varphi_p(x) = p x L(x^{-1})(1 + o(1)).$$

Из последних оценок, представления (47) для $\mathcal{F}_p(t)$, упомянутых выше свойств характеристических функций для мер получаем, естественным образом модифицируя доказательство леммы 6, следующее утверждение.

Лемма 7. Пусть $\beta = 1$ и выполнены условия В, тогда при $x \rightarrow +0$ для *нулевых функций $L(t)$ остаются верными оценки (44) и (45).

Лемма 8. Если для распределения $F_0(t)$ выполняется условие (1) с $\beta = 1$, но соответствующее ему среднее

$$g_0 = \int_{-\infty}^{\infty} u^{-1} L_0(u) du$$

конечно и $L'_0(t) = o(L_0(t)/t)$ для $t \rightarrow \infty$, то при $x \rightarrow +0$

$$\begin{aligned} \Re(1 - \varphi_0(x)) &\sim \frac{1}{2} \pi x L_0(x^{-1}), \\ \Im \varphi_0(x) &= x g_0 + x(p + o(1)) \bar{m}_0(x^{-1}), \end{aligned} \quad (49)$$

где

$$\bar{m}_0(t) = \int_t^{\infty} u^{-1} L_0(u) du.$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что $\bar{m}_0(t)$ является медленно меняющейся при $t \rightarrow \infty$ и $L_0(t) = o(\bar{m}_0(t))$ (см. теорему 1 в [5, гл. VIII, §9]).

По определению, после интегрирования по частям получаем

$$\begin{aligned} 1 - \varphi_0(x) + i x g_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{itx} + itx) dF_0(t) \\ &= x \int_0^{\infty} \frac{\sin(tx) L_0(t)}{t} dt + i x \int_0^{\infty} (1 - \cos(tx)) \mathfrak{D}^- F_0(t) dt. \end{aligned} \quad (50)$$

Зафиксируем произвольное $0 < \varepsilon < \pi/6$, тогда при $x \rightarrow +0$

$$x \int_0^{\varepsilon/x} \sin(tx) t^{-1} L_0(t) dt \leq x^2 \int_0^{\varepsilon/x} L_0(t) dt \sim \varepsilon x L_0(x^{-1}), \quad (51)$$

и в силу неравенства

$$1 - \cos(tx) \leq \sin(tx),$$

справедливого в области интегрирования, и неравенства

$$|1 - F_0(t) - F_0(-t)| \leq t^{-1} L_0(t),$$

верны оценки

$$x \left| \int_0^{\varepsilon/x} (1 - \cos(tx)) \mathfrak{D}^- F_0(t) dt \right| \leq x^2 \int_0^{\varepsilon/x} L_0(t) dt \sim \varepsilon x L_0(x^{-1}). \quad (52)$$

По определению,

$$i x \int_{\varepsilon/x}^{\infty} \frac{L_0(t)}{t} dt \sim i x \bar{m}_0(x^{-1}). \quad (53)$$

Учитывая, что

$$\Gamma(\beta) \Gamma(1 - \beta) = \frac{\pi}{\sin(\pi\beta)}$$

при $\beta \in (0, 1)$, получаем, что

$$\int_0^\infty \frac{\cos t \, dt}{t^\beta} = \frac{\pi}{2 \cos(\pi\beta/2) \Gamma(\beta)} \quad \text{при } \beta \in (0, 1), \quad (54)$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin t \, dt}{t^\beta} = \frac{\pi}{2 \sin(\pi\beta/2) \Gamma(\beta)} \quad \text{при } \beta \in (0, 2) \quad (55)$$

(см. [9, гл. XIV, §5, с. 539 и с. 531]).

Пусть $N > \varepsilon$ — некоторое фиксированное число. Оно будет фигурировать в пределах интегралов, содержащих тригонометрические функции, и мы будем полагать, что оно имеет вид $2k\pi$, если одним из сомножителей в интегрируемом выражении является $\sin tx$, и $2k\pi - \pi/2$, если одним из сомножителей является $\cos tx$, где $k \in \mathbb{N}$. Используя свойства медленно меняющихся функций и выбирая в соответствии с только что принятыми договоренностями разные N для интегралов от действительных и мнимых частей функций, при $x \rightarrow +0$ и $n \in \mathbb{N}$ получаем

$$x \int_{\varepsilon/x}^{N/x} e^{itx} \frac{L_0(t)}{t} dt \cong x L_0(x^{-1}) \int_\varepsilon^N \frac{\cos t + i \sin t}{t} dt + o(x L_0(x^{-1})), \quad (56)$$

а используя дополнительно следующее из теоремы о среднем значении и соотношения $L'_0(t) = o(L_0(t)/t)$ неравенство

$$\left| \frac{L_0(t)}{t} - \frac{L_0(t + \pi/x)}{t + \pi/x} \right| = O(1/x) \frac{L_0(t)}{t^2},$$

приходим к оценке

$$x \int_{(N+2n\pi)/x}^{(N+2(n+1)\pi)/x} e^{itx} \frac{L_0(t)}{t} dt = O(1) \int_{(N+2n\pi)/x}^{(N+2(n+1)\pi)/x} \frac{L_0(t)}{t^2} dt.$$

Суммируя левые и правые части из последних соотношений, получаем равенство

$$x \int_{N/x}^\infty e^{itx} \frac{L_0(t)}{t} dt = O(1) \int_{N/x}^\infty \frac{L_0(t)}{t^2} dt = N^{-1} O(x L_0(x^{-1})). \quad (57)$$

Действительная часть в последнем интеграле из (56) оценивается как $\ln N + |\ln \varepsilon|$, а мнимая при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $N \rightarrow \infty$ в силу (55) сходится к $-\pi/2$. Таким образом, из (50)–(53), (56) и (57) при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $N \rightarrow \infty$ получаем утверждение леммы 8.

Изучим асимптотику в нуле производной от $\varphi_p(x)$ для *нулевых функций $L(t)$. Запишем аналог (24) для $\mathcal{F}_p(t)$ (формально плотность $f(t)$ заменена на плотность заряда $f_p(t)$):

$$\begin{aligned} \varphi_{p,0}(x) &= x \varphi'_p(x) = - \int_{-\infty}^\infty e^{itx} d(t f_p(t)) \\ &= - \int_{-\infty}^\infty (f_p(t) + t f'_p(t)) e^{itx} dt. \end{aligned}$$

Соответствующий $\varphi_{p,0}(x)$ заряд $\mathcal{F}_{p,0}(t)$ в силу (17) имеет нулевую массу, так что, учитывая дополнительно (15), получаем равенство

$$\mathfrak{D} \mathcal{F}_{p,0}(t) = \mathfrak{D}(f_p(t)t) = L''(t)t \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} -L'(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \mathfrak{D} \mathcal{F}_p(t).$$

В частности,

$$-\mathcal{F}_{p,0}(t) \underset{t \rightarrow \infty}{=} -(p_+ + o(1))L'(t) \underset{t \rightarrow \infty}{=} (p_+ + o(1))\mathfrak{D}\mathcal{F}_p(t).$$

Следовательно, в силу (15) и (16), по аналогии с (32), мера $\mathcal{F}_{p,0}(t)$ допускает представление

$$\mathcal{F}_{p,0}(t) = A_{p,1}\mathcal{F}_{p,3}(t) - A_{p,2}\mathcal{F}_{p,4}(t),$$

где $\mathcal{F}_{p,i}(t)$, $i = 3, 4$, — обычные функции распределения с хвостами, асимптотически пропорциональными хвосту $\mathfrak{D}\mathcal{F}_p(t)$. Распределения $\mathcal{F}_{p,3}(t)$ и $\mathcal{F}_{p,4}(t)$ удовлетворяют условиям леммы 8, то есть для них верно (49). Учитывая представление для $\mathcal{F}_{p,0}(t)$, тот факт, что его среднее равно нулю, и определение $\mathcal{F}_{p,0}(t)$ (как и для $\mathcal{F}_p(t)$), можно показать, что при $x \rightarrow +0$ для *нулевых функций $L(t)$ верны оценки

$$\begin{aligned} \Re(\varphi'_1(x) + \varphi(x)') &\sim \frac{\pi}{2}L_p(x^{-1}), \\ \Im(\varphi'_1(x) + \varphi(x)') &= (p + o(1))L(x^{-1}). \end{aligned} \quad (58)$$

Лемма 9. Пусть $\beta = 1$ и выполнены условия В, $p \neq 0$, тогда при $x \rightarrow +0$ для *постоянных функций $L(t)$ верны оценки

$$a''(x) = gp x^{-2} + o(x^{-2}), \quad (x^{-1}(1 - \Re \varphi(x)))'' = o(x^{-2}), \quad (59)$$

$$b''(x) = -2p^2 g^2 x^{-2} \ln x + o(x^{-2}m(x^{-1})), \quad (60)$$

а для *нулевых и *возрастающих функций $L(t)$ верны оценки

$$a''(x) \sim p x^{-2}L(x^{-1}), \quad (x^{-1}(1 - \Re \varphi(x)))'' \sim -\pi x^{-2}L_p(x^{-1})/2, \quad (61)$$

$$b''(x) \sim 2p^2 x^{-2}m(x^{-1})L(x^{-1}). \quad (62)$$

Доказательство. Соотношение (46) позволяет записать формулу

$$(x^{-1}(1 - \varphi(x)))'' = -2 \frac{(x^{-1}(1 - \varphi(x)))'}{x} + \frac{(\varphi_1(x) + \varphi(x))'}{x^2}. \quad (63)$$

Асимптотика знаменателя первой дроби в правой части (63) задается соотношениями (44), а при $g \in (0, \infty)$ в знаменателе второй дроби стоит производная в окрестности нуля от характеристической функции распределения со средним g , поэтому он в силу (19) будет асимптотически равен постоянной ig . Таким образом, при $g \in (0, \infty)$ правая часть (63) имеет асимптотику $-igx^{-2}$, что эквивалентно (59).

Для доказательства (61) при $g = \infty$ применим к $(\varphi_1(x) + \varphi(x))'$ два первых соотношения из леммы 4, а при $g = 0$ используем асимптотические формулы (58). Для получения (60) и (62) продифференцируем представление (48) и воспользуемся леммами 2 и 6 и формулами (59) и (61).

Леммы 6, 7 и 9 уточняют оценки для $a'(x)$ и $a''(x)$, которые без допущения (14) в силу оценок (27) и (34) получаются равными $o(1)x^{-1}m(x^{-1})$ и $o(1)x^{-2}m(x^{-1})$, соответственно, а в случае *нулевых функций $L(t)$ принципиальным для получения главного члена асимптотики является более ограничительное условие (16). Аналогично, для $b'(x)$ и $b''(x)$ главные члены асимптотических разложений не находятся без допущений (14) и (16).

Дифференцируя дроби и учитывая леммы 2, 6 и 9, получаем следующее утверждение.

Следствие 2. Пусть $x \rightarrow +0$ и выполнено условие (1), тогда

$$a(x)b(x)^{-1} \sim p^{-1}m^{-1}(x^{-1}),$$

и если выполнены условия В, то

$$\begin{aligned} \left(\frac{a(x)}{b(x)}\right)' &\sim p^{-1} \frac{L(x^{-1})}{xm^2(x^{-1})}, \\ \left(\frac{a(x)}{b(x)}\right)'' &\sim p^{-1} \frac{-L(x^{-1})}{x^2m^2(x^{-1})}. \end{aligned} \quad (64)$$

В частности, для *постоянных функций $L(t)$ правые части в (64) имеют вид $x^{-1}g^{-1}\ln^{-2}x$ и $x^{-2}g^{-1}\ln^{-2}x$, соответственно.

Лемма 10. Если выполнены условия В с $\beta = 1$, то при $x \rightarrow +0$

$$\Re(x\varphi'(x))' \sim -\frac{1}{2}\pi L(x^{-1}), \quad (65)$$

$$\Im(x\varphi'(x))' \sim pm(x^{-1}), \quad (66)$$

$$(x(|1 - \varphi(x)|^2)')' \sim 4p^2xm^2(x^{-1}), \quad (67)$$

$$(x(|\varphi(x)|^2)')' \sim -\pi L(x^{-1}). \quad (68)$$

Лемма 11. Если выполнены условия В с $\beta \in (1/2, 1)$, то при $x \rightarrow +0$

$$(x\varphi'(x))' \cong -\beta^2 \left(\cos \frac{\pi\beta}{2} - i(p + o(1)) \sin \frac{\pi\beta}{2} \right) \Gamma(1 - \beta)x^{\beta-1}L(x^{-1}), \quad (69)$$

$$(x(|1 - \varphi(x)|^2)')' \sim 4\beta^2 K \Gamma^2(1 - \beta)x^{2\beta-1}L^2(x^{-1}), \quad (70)$$

$$(x(|\varphi(x)|^2)')' \sim -2\beta^2 \cos \frac{\pi\beta}{2} \Gamma(1 - \beta)x^{\beta}L(x^{-1}). \quad (71)$$

Доказательство лемм 10 и 11. При выполнении условий В аналогом представления (24) будет

$$\begin{aligned} -x\varphi_1'(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d(t\mathfrak{f}(t) + t^2\mathfrak{f}'(t)) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\mathfrak{f}(t) + 3t\mathfrak{f}'(t) + t^2\mathfrak{f}''(t))e^{itx} dt, \end{aligned} \quad (72)$$

где в первом интеграле, как отмечено после условий В, под знаком дифференциала стоит функция ограниченной вариации и интеграл сходится абсолютно, а во втором — первые два слагаемых из стоящих в скобках есть абсолютно интегрируемые функции. Следовательно, и третья функция абсолютно интегрируема. Как и ранее,

$$\varphi_2(x) = x\varphi_1'(x)$$

есть преобразование Фурье для заряда

$$\mathcal{F}_2(t) = -t\mathcal{F}_1'(t)$$

нулевой массы с абсолютно интегрируемой плотностью, приведенной в последнем интеграле из (72).

В силу (11),

$$\mathcal{F}_2(t) \underset{t \rightarrow \pm\infty}{=} -(p_{\pm} + o(1))\beta^2 |t|^{-\beta} L(|t|) \sim -(p_{\pm} + o(1))\beta^2 \mathcal{D}\mathcal{F}(t),$$

что является аналогом (31). Это представление совместно с (12) позволяет по той же схеме, что и в случае вывода (32), получить равенство

$$\mathcal{F}_2(t) = A_2 \mathcal{F}_{2,1}(t) - A_2 \mathcal{F}_{2,2}(t),$$

где $\mathcal{F}_{2,i}(t)$, $i = 1, 2$, являются обычными функциями распределения с хвостами, асимптотически пропорциональными $\mathcal{D}\mathcal{F}(t)$.

Применим вторую часть теоремы 4 к распределениям $\mathcal{F}_{2,i}(t)$, $i = 1, 2$, и вычислим характеристическую функцию их линейной комбинации. В итоге получаем, что асимптотика в окрестности нуля действительных и мнимых частей $(x\varphi'(x))'$ совпадает с аналогами для $\beta^2(\varphi(x) - 1)$ и верны асимптотические представления (65), (66) и (69).

Для доказательства (67) и (70) воспользуемся (40) и получим

$$\begin{aligned} (x(|1 - \varphi(x)|^2))' &= 2x(\Re \varphi'(x))^2 - 2\Re(x\varphi'(x))'\Re(1 - \varphi(x)) \\ &\quad + 2\Im(x\varphi'(x))'\Im \varphi(x) + 2x(\Im \varphi'(x))^2. \end{aligned} \quad (73)$$

На последнем шаге к правой части (73) нужно применить по два первых соотношения из лемм 2, 4 и 10 или 3, 5 и 11.

Для вывода (68) и (71) необходимо воспользоваться представлением

$$(x(|\varphi(x)|^2))' = 2\Re(x\varphi'(x))' + 2(x(|1 - \varphi(x)|^2))',$$

следующим из (41) и (73), и теми же аргументами, что и в предшествующем доказательстве соотношений (67) и (70).

Распределение $\mathcal{F}_2(t)$, соответствующее $\varphi_2(x)$, по условию В будет абсолютно непрерывным, следовательно, его компоненты можно выбрать абсолютно непрерывными, и для них справедливо (21), а для $\varphi_1(x) = x\varphi'(x)$ в силу представления (24) справедливо (22). В итоге, представление (72) позволяет получить, что

$$\varphi_1'(x) = (x\varphi'(x))' = o(x^{-1})$$

при $x \rightarrow \infty$. Приведем лемму, содержащую последний результат, и основанные на лемме 1 и представлениях из (28) и (29) оценки, необходимые для исследования выражения (90).

Лемма 12. Пусть выполнены условия В, тогда при $x \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= o(x^{-2}), \quad (|1 - \varphi(x)|^2)' = o(x^{-2}), \quad (|1 - \varphi(x)|^2)'' = o(x^{-2}), \\ (|\varphi(x)|^2)' &= o(x^{-2}), \quad (|\varphi(x)|^2)'' = o(x^{-2}). \end{aligned}$$

Замечание 3. В силу ограниченности характеристических функций и представлений (24) и (72), все выражения из левых частей утверждений лемм 2–11 будут ограничены при значениях аргумента, отделенных от нуля. Следовательно, во всех этих утверждениях условие $x \rightarrow +0$ можно заменить на $x \in (0, 1]$, а знак асимптотической эквивалентности — на равенство $O(1) \dots$

3. Доказательство теоремы 2

По определению, верны два исходных представления

$$\begin{aligned} v(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{f}^{*k}(t) = \mathfrak{f}(t) + v^{(2)}(t) \\ &= \mathfrak{f}(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx} \varphi^2(x) dx}{1 - \varphi(x)}, \\ v'(t) &= \mathfrak{f}'(t) + (v^{(2)}(t))' \\ &= \mathfrak{f}'(t) + \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{-itx} \varphi^2(x) dx}{1 - \varphi(x)}. \end{aligned}$$

Смена знака x у $\varphi(x)$ приводит к комплексному сопряжению, поэтому

$$\begin{aligned} v^{(2)}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{|x| \leq B/t} \frac{e^{-itx} \varphi^2(x) dx}{1 - \varphi(x)} + \frac{1}{2\pi} \int_{B/t}^{\infty} \left(\frac{e^{-itx} \varphi^2(x)}{1 - \varphi(x)} + \frac{e^{itx} \bar{\varphi}^2(x)}{1 - \bar{\varphi}(x)} \right) dx \\ &= I_{1,1}(t) + \frac{1}{\pi} \int_{B/t}^{\infty} \Re \frac{e^{-itx} (\varphi^2(x) - \varphi(x)|\varphi(x)|^2)}{|1 - \varphi(x)|^2} dx \\ &= I_{1,1}(t) + I_{1,2}(t). \end{aligned} \tag{74}$$

Обозначим

$$J(x) = \frac{\varphi^2(x) - \varphi(x)|\varphi(x)|^2}{|1 - \varphi(x)|^2}.$$

Применим к $I_{1,1}(t)$ следствие из [2] с $g(\theta) \equiv 1$. Для $\beta = 1$ оно верно при $m(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$, что у нас входит в условие (1).

Учитывая (54), (55) и тот факт, что в наших обозначениях постоянная K из [2] допускает представление

$$K = 1 - 4p_+ p_- \sin^2(\pi\beta/2),$$

получаем, что

$$I_{1,1}(t) \sim \begin{cases} C(B) \frac{\sin(\pi\beta)t^{\beta-1}}{K\pi L(t)} \frac{1+p}{2} & \text{при } \beta \in (1/2, 1) \\ C(B) \frac{1}{m(t)} \frac{1+p}{2} & \text{при } \beta = 1, \end{cases} \tag{75}$$

где $C(B)$ сходится к 1 при неограниченном росте B , а $(1+p)/2 = p_+$.

Далее в формулах с двумя строками, объединенными фигурными скобками, аналогичными (75), область изменения β будем опускать, подразумевая, что первая строка в фигурной скобке всегда соответствует случаю $\beta \in (1/2, 1)$, а вторая — случаю $\beta = 1$.

С помощью лемм 2 и 4 или 3 и 5 (в зависимости от β) найдем асимптотику и верхние

оценки для $J(x)$ и $J'(x)$ при малых значениях аргумента:

$$\begin{aligned}
 J(x) &= \frac{(\varphi(x) - 1) + (1 - |\varphi(x)|^2)}{|1 - \varphi(x)|^2} \varphi(x) \cong \frac{(\varphi(x) - 1) + (1 - |\varphi(x)|^2)}{|1 - \varphi(x)|^2} \\
 &\cong \begin{cases} \frac{\cos(\pi\beta/2) + i(p + o(1)) \sin(\pi\beta/2)}{Kx^\beta \Gamma(1 - \beta)L(x^{-1})} \\ \frac{i}{pxm(x^{-1})} + \frac{\pi L(x^{-1})}{2p^2xm^2(x^{-1})} \end{cases} = \begin{cases} \frac{O(1)}{x^\beta L(x^{-1})} \\ \frac{O(1)}{xm(x^{-1})} \end{cases} \\
 &= \frac{O(1)}{xm(x^{-1})}.
 \end{aligned} \tag{76}$$

Производная от $J(x)$ равна

$$J'(x) = \frac{(\varphi^2(x))' - (\varphi(x)|\varphi(x)|^2)'}{|1 - \varphi(x)|^2} - J(x) \frac{(|1 - \varphi(x)|^2)'}{|1 - \varphi(x)|^2}, \tag{77}$$

что в соответствии с (76), обоснованиями и обозначениями из его вывода и следствием 1 позволяет записать цепочку оценок

$$\begin{aligned}
 J'(x) &\cong -\frac{\beta J(x)}{x} \cong \begin{cases} -\beta \frac{\cos(\pi\beta/2) + i(p + o(1)) \sin(\pi\beta/2)}{Kx^{\beta+1} \Gamma(1 - \beta)L(x^{-1})} \\ \frac{-i}{px^2m(x^{-1})} - \frac{\pi L(x^{-1})}{2p^2x^2m^2(x^{-1})} \end{cases} \\
 &= \frac{O(1)}{x^2m(x^{-1})}.
 \end{aligned} \tag{78}$$

С помощью интегрирования по частям $I_{1,2}(t)$ можно оценить сверху следующим образом:

$$I_{1,2}(t) = \frac{1}{t} \int_{B/t}^{\infty} \Im(e^{-itx} J'(x)) dx + t^{-1} \Im(e^{-iB} J(B/t)). \tag{79}$$

Пусть B кратно 2π , тогда в силу (76) верна оценка

$$t^{-1} \Im J(B/t) \underset{t \rightarrow \infty}{=} \frac{O(1)}{Bm(t)} \tag{80}$$

ввиду того, что $m(t)$ и $L(t)$ медленно меняются на бесконечности.

Рассмотрим $J(x)$ и $J'(x)$ при значениях аргумента, отделенных от нуля. Представления (76), (77), (40) и (41) и замечание 3 влекут отделенность от нуля знаменателей и ограниченность всех числителей и сомножителя при второй дроби в $J(x)$ и $J'(x)$, если аргумент отделен от нуля, то есть все выражение в этом случае ограничено, а учитывая дополнительно лемму 1, легко получить, что

$$J(x) \underset{x \rightarrow \infty}{=} o(x^{-2}), \quad J'(x) \underset{x \rightarrow \infty}{=} o(x^{-2}). \tag{81}$$

Тем самым мы доказали, что для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует конечная постоянная $C_\varepsilon > 0$ такая, что

$$\left| \int_{\varepsilon}^{\infty} \Im(e^{-itx} J'(x)) dx \right| \leq C_\varepsilon. \tag{82}$$

Итак, из соотношений (3), (78), (79), (80) и (82) получается оценка

$$I_{1,2}(t) = \frac{O(1)}{t} \int_{B/t}^{\varepsilon} \frac{1}{x^{2m}(x^{-1})} dx + O(t^{-1}) = \frac{O(1)}{B^{\beta} m(t)}. \quad (83)$$

Следовательно, устремляя B к бесконечности в (75) и (83) и учитывая дополнительно (74) и (6), приходим к соотношению (10).

4. Доказательство теоремы 3

Из представления (76) следует, что

$$J(x)x = o(1)$$

при $x \rightarrow +0$, что совместно с (81) позволяет произвести интегрирование по частям последнего слагаемого в исходном представлении для $v'(t)$ и по аналогии с (74) получить

$$\begin{aligned} (v^{(2)}(t))' &= \int_0^{\infty} \frac{-\Im(e^{-itx} J(x))x dx}{\pi} = \int_0^{\infty} \frac{-\Re(e^{-itx} (J(x)x)') dx}{t\pi} \\ &= \int_0^{B/t} \frac{-\Re(e^{-itx} (J(x)x)')}{t\pi} dx - \int_{B/t}^{\infty} \frac{\Re(e^{-itx} (J(x)x)')}{t\pi} dx \\ &= I_{1,1}^0(B/t) + I_{1,2}^0(B/t) \\ &= \frac{I_{1,1}^0(B/t) + I_{1,1}^0((B+\pi)/t)}{2} + \frac{I_{1,2}^0(B/t) + I_{1,2}^0((B+\pi)/t)}{2}. \end{aligned} \quad (84)$$

Формулы (84) удобны при $\beta \in (1/2, 1)$. При этом доказательства аналогичны приведенным в разделе 3. В силу представления (78), верна эквивалентность

$$(J(x)x)' \sim (1-\beta)J(x)$$

при $x \rightarrow +0$, и очевидно, что

$$I_{1,1}^0(B/t) = \int_{|x| < B/t} \frac{-e^{-itx} (J(x)x)'}{2t\pi} dx,$$

поэтому по следствию из [2], следуя схеме доказательства первого соотношения из (75), получаем, что

$$I_{1,1}^0(B/t) \sim I_{1,1}^0((B+\pi)/t) \sim C_1(B) \frac{\sin(\pi\beta)t^{\beta-1}}{K\pi L(t)} p_+, \quad (85)$$

где $C_1(B)$ сходится к 1 при неограниченном росте B .

Случай $\beta = 1$ существенно сложнее, и интегралы с $\Re J(x)$ и $\Im J(x)$ необходимо

оценивать в различных окрестностях нуля:

$$\begin{aligned}
 (v^{(2)}(t))' &= - \left(\int_0^{u_{\Im}} + \int_{u_{\Re}}^{\infty} \right) \frac{\sin(tx) \Im(J(x)x)'}{t\pi} dx \\
 &\quad + \left(\int_0^{u_{\Re}} + \int_{u_{\Im}}^{\infty} \right) \frac{\cos(tx) \Re(J(x)x)'}{t\pi} dx \\
 &= I_1^{\Im}(t, u_{\Im}) + I_2^{\Im}(t, u_{\Im}) + I_1^{\Re}(t, u_{\Re}) + I_2^{\Re}(t, u_{\Re}) \\
 &= \frac{I_1^{\Im}(t, u_{\Im}) + I_1^{\Im}(t, u_{\Im} + \pi/t)}{2} + \frac{I_2^{\Im}(t, u_{\Im}) + I_2^{\Im}(t, u_{\Im} + \pi/t)}{2} \\
 &\quad + \frac{I_1^{\Re}(t, \pi/(2t)) + I_1^{\Re}(t, 3\pi/(2t))}{2} + \frac{I_2^{\Re}(t, \pi/(2t)) + I_2^{\Re}(t, 3\pi/(2t))}{2}, \quad (86)
 \end{aligned}$$

где $u_{\Re} = \pi/(2t)$, а $u_{\Im}$ является функцией от t , которую мы выберем позднее.

Анализ $I_2^{\Im}(t, \{u_{\Im}\}^*)$, $I_2^{\Re}(t, \{u_{\Re}\}^*)$ и $I_{1,2}^0(\{B/t\}^*)$ ведется по одной и той же схеме, где функционал $\{\cdot\}^*$ означает, что рассматриваются два случая: либо указанный аргумент, либо к нему добавлено π/t . Обозначим

$$I_2^s(t, u) = I_2^{\Im}(t, u) + I_2^{\Re}(t, u).$$

Отметим, что

$$I_{1,2}^0(\{B/t\}^*) = I_2^s(t, \{B/t\}^*).$$

Пусть выбрано произвольное множество

$$D = D(t) = [u(t), \infty),$$

которое далее будет конкретизировано в зависимости от β . Исследуем

$$\begin{aligned}
 I_D(t) &= \frac{I_2^s(t, u(t)) + I_2^s(t, u(t) + \pi/t)}{2} \\
 &= \int_D \Re \frac{e^{-itx} ((J(x + \pi/t)(x + \pi/t))' - (J(x)x)')}{2\pi t} dx. \quad (87)
 \end{aligned}$$

В случае $\beta = 1$ последний интеграл удобно разбить на два:

$$\begin{aligned}
 I_D^{\Re}(t) &= \frac{I_2^{\Re}(t, u(t)) + I_2^{\Re}(t, u(t) + \pi/t)}{2}, \\
 I_D^{\Im}(t) &= I_D(t) - I_D^{\Re}(t).
 \end{aligned}$$

Воспользуемся теоремой о среднем для разности производных в (87). Обозначим

$$y = x + \theta\pi/t,$$

где $\theta = \theta(x, t) \in [0, 1]$, тогда вместо этой разности под интегралом появится сомножитель π/t и вторая производная

$$(J(y)y)'' = 2J'(y) + J''(y)y = J'(y) + (J'(y)y)'. \quad (88)$$

Иными словами, соотношение (87) принимает вид

$$I_D(t) = \int_D \Re \frac{e^{-itx} (J(y)y)''}{2t^2} dx. \quad (89)$$

Разобьем области интегрирования $D = D(t) = [u(t), \infty)$ на две части:

$$D = D_1 + D_2 = D_1(t) + D_2(t) = [u(t), \varepsilon) + [\varepsilon, \infty),$$

где $\varepsilon \in (0, 1)$ — варьируемая постоянная. Интегралы из правой части (87) по множествам D_i обозначим $I_{D_i}(t)$ ($I_{D_i}^{\Re}(t)$ или $I_{D_i}^{\Im}(t)$).

Начнем с оценок интеграла $I_{D_2}(t)$. Подынтегральное выражение имеет вид (88). При доказательстве теоремы 2 (раздел 3) в (81) мы на основании второй части леммы 1 (выполнены условия А) получили оценки $J(x)$ и $J'(x)$, однако в условиях теоремы 3 выполнены условия В, и по третьей части леммы 1 становится справедливой оценка

$$J(x) \underset{x \rightarrow \infty}{=} O(x^{-4}), \quad J'(x) \underset{x \rightarrow \infty}{=} O(x^{-4}).$$

При выполнении условий В, $J'(x)$ будет ограничена вне любой окрестности нуля (см. (77) и (78)). Воспользуемся (77) и получим, что

$$\begin{aligned} J''(y) = J(y) & \frac{(|1 - \varphi(y)|^2)''}{|1 - \varphi(y)|^2} + \frac{(|1 - \varphi(y)|^2)'}{|1 - \varphi(y)|^2} \\ & + J(y) \frac{((|1 - \varphi(y)|^2)')^2}{|1 - \varphi(y)|^4} - \frac{(\varphi^2(y))' - (\varphi(y)|\varphi(y)|^2)'}{|1 - \varphi(y)|^2} \\ & + \frac{(\varphi^2(y) - \varphi(y)|\varphi(y)|^2)''}{|1 - \varphi(y)|^2} - J'(y) \frac{(|1 - \varphi(y)|^2)'}{|1 - \varphi(y)|^2}. \end{aligned} \quad (90)$$

Все выражения в (90) ограничены на D_2 по замечанию 3, и при $x \rightarrow \infty$ леммы 1 и 12 позволяют получить оценку

$$J''(y) = o(x^{-4}).$$

Рассуждения, следующие за представлением (87), приводят к оценке

$$I_{D_2}(t) = t^{-2} \int_{D_2} o(x^{-3}) dx = O(1)t^{-2}. \quad (91)$$

Вычислим асимптотику выражения из (88) при $y \rightarrow +0$. Воспользуемся соотношениями (77), (78) и представим

$$\begin{aligned} (J'(y)y)' &= \frac{(2\varphi(y) - |\varphi(y)|^2)(y\varphi'(y))' - \varphi(y)(y(|\varphi(y)|^2)')'}{|1 - \varphi(y)|^2} \\ &+ 2y\varphi'(y) \frac{\varphi'(y) - (|\varphi(y)|^2)'}{|1 - \varphi(y)|^2} + yJ'(y) \frac{(|1 - \varphi(y)|^2)'}{|1 - \varphi(y)|^2} \\ &- J(y) \frac{(y(|1 - \varphi(y)|^2)')'}{|1 - \varphi(y)|^2} - J'(y) \frac{y(|1 - \varphi(y)|^2)'}{|1 - \varphi(y)|^2} \\ &= \sum_{j=1}^5 U_j(y). \end{aligned} \quad (92)$$

Леммы 2, 3, 4, 5, 10 и 11 и представления (76) и (78) показывают, что

$$\begin{aligned} 2U_3(y) &\cong 2U_5(y) \cong 4U_1(y) \cong -U_4(y), \\ -U_4(y) &\cong \begin{cases} 4\beta^2 \frac{\cos(\pi\beta/2) + i(p + o(1)) \sin(\pi\beta/2)}{Ky^{\beta+1}\Gamma(1-\beta)L(y^{-1})} \\ \frac{4i}{y^2 pm(y^{-1})} + \frac{2\pi L(y^{-1})}{p^2 y^2 m^2(y^{-1})}, \end{cases} \\ U_2(y) &\underset{y \rightarrow +0}{=} \begin{cases} \frac{-2\beta^2(1 + o(1))}{y} \\ \frac{-2(1 + o(1))}{y}. \end{cases} \end{aligned}$$

Представления (91), (78) и (92) с последующими асимптотическими разложениями для $U_i(y)$ позволяют получить следующие соотношения:

$$(J(y)y)'' \cong \begin{cases} (\beta - 1)\beta \frac{\cos(\pi\beta/2) + i(p + o(1)) \sin(\pi\beta/2)}{Ky^{\beta+1}\Gamma(1-\beta)L(y^{-1})} \\ \frac{i o(1)}{pm(y^{-1})} + \frac{o(1)L(y^{-1})}{p^2 y^2 m^2(y^{-1})}. \end{cases} \quad (93)$$

Тем самым завершено доказательство первой части (18) (случай $\beta \in (1/2, 1)$). В самом деле, для $D_1 = [\{B/t\}^*, \varepsilon)$ из (89) и (93) следует

$$\begin{aligned} I_{D_1}^{\Re}(t) &= \frac{O(1)}{t^2} \int_{D_1} \frac{dx}{x^{\beta+1} L(x^{-1})} \\ &= \frac{O(1)}{B\beta t^{2-\beta} L(t)} \end{aligned} \quad (94)$$

при $\beta \in (1/2, 1)$. Устремляя B к бесконечности в (85) и (94) и учитывая дополнительно исходное представление для $v'(t)$, (84), (91) и (11), получаем первую часть соотношения (18).

Перейдем к случаю $\beta = 1$. Фиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, 1)$. Учитывая то, что $\sin(tx) \Re J(x)x$ в нуле можно по непрерывности определить нулем, произведем интегрирование по частям, а затем воспользуемся (76), неравенством $\sin x \leq x$ при $x \in (0, \varepsilon/t)$ и определением медленно меняющихся функций, и получим, что

$$\begin{aligned} I_1^{\Re}\left(t, \left\{\frac{\pi}{2t}\right\}^*\right) &= \int_0^{\{\pi/(2t)\}^*} \frac{\cos(tx) \Re(J(x)x)'}{t\pi} dx \\ &= \int_0^{\{\pi/(2t)\}^*} \frac{\sin(tx) \Re J(x)x}{\pi} dx \\ &= \frac{O(\varepsilon^2)L(t)}{tm^2(t)} + \frac{L(t)}{2p^2 m^2(t)} \int_{\varepsilon/t}^{\{\pi/(2t)\}^*} \sin(tx) dx. \end{aligned}$$

Так как $\varepsilon \in (0, 1)$ произвольно, мы можем выбрать его сколь угодно малым (устремить к нулю), тогда последнее представление можно переписать в виде

$$I_1^{\Re}\left(t, \left\{\frac{\pi}{2t}\right\}^*\right) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{L(t)}{2p^2 tm^2(t)}. \quad (95)$$

Более того,

$$I_1^{\Re} \left(t, \left\{ \frac{\pi}{2t} \right\}^* \right) + I_2^{\Re} \left(t, \left\{ \frac{\pi}{2t} \right\}^* \right) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{L(t)}{2p^2 t m^2(t)}. \quad (96)$$

В самом деле, для $D_1 = [\{\pi/(2t)\}^*, \varepsilon)$ по второй части оценки (93)

$$I_{D_1}^{\Re}(t) = \frac{o(1)}{t^2} \int_{D_1} \frac{L(x^{-1}) dx}{x^2 m^2(x^{-1})} = \frac{o(1)L(t)}{t m^2(t)},$$

и, учитывая (91) и (95), немедленно приходим к (96).

Фиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, 1)$ и определим кусочно-непрерывную функцию $u_{\mathfrak{Z}}(t)$, такую, что

$$u_{\mathfrak{Z}}(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\varepsilon m^2(t)}{t L(t)}$$

и $t u_{\mathfrak{Z}}(t)$ дает остаток π при делении на 2π . Иными словами,

$$t u_{\mathfrak{Z}}(t) = (2N + 1)\pi,$$

где $N = N(t)$ — целое и

$$N(t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\varepsilon m^2(t)}{2\pi L(t)}.$$

Тогда для $D_1 = [\{u_{\mathfrak{Z}}(t)\}^*, \varepsilon)$ по второй части соотношения (93)

$$I_{D_1}^{\mathfrak{Z}}(t) = \frac{o(1)L(t)}{t m^2(t)},$$

что, совместно с (91), приводит к соотношению

$$I_D^{\mathfrak{Z}}(t) = \frac{o(1)L(t)}{t m^2(t)},$$

и, следовательно, учитывая дополнительно (87) и (96), мы можем переписать соотношение (86) в виде

$$2(v^{(2)}(t))' = I_1^{\mathfrak{Z}}(t, u_{\mathfrak{Z}}(t)) + I_1^{\mathfrak{Z}} \left(t, u_{\mathfrak{Z}}(t) + \frac{\pi}{t} \right) + \frac{(1 + o(1))L(t)}{p^2 t m^2(t)}. \quad (97)$$

Отметим, что в силу тождества из (28)

$$\begin{aligned} \Im J(x) &= \frac{\Im \varphi(x)(2 - |\varphi(x)|^2)}{|1 - \varphi(x)|^2} \\ &= \Im \varphi(x) \frac{1 + 2(1 - \Re \varphi(x))}{|1 - \varphi(x)|^2} - \Im \varphi(x). \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \left(\frac{x \Im \varphi(x)}{|1 - \varphi(x)|^2} \right)', \\ J_0(x) &= (x \Im J(x))' - J_1(x). \end{aligned}$$

По определению,

$$\begin{aligned} I_1^{\mathfrak{Z}}(t, u) &= - \int_0^u \frac{\sin(tx)(J_1(x) + J_0(x))}{t\pi} dx \\ &= I_{1,1}^{\mathfrak{Z}}(t, u) + I_{1,0}^{\mathfrak{Z}}(t, u). \end{aligned}$$

В силу (27) и (34), при малых значениях аргумента

$$(\Im \varphi(x)x)' \sim 2p^2 x m(x^{-1}) = o(1).$$

С другой стороны, леммы 2 и 4 и следствие 2 легко приводят к оценке

$$\begin{aligned} \left(x \Im \varphi(x) \frac{1 - \Re \varphi(x)}{|1 - \varphi(x)|^2} \right)' &= \left(\frac{a(x)(1 - \Re \varphi(x))}{b(x)} \right)' \\ &= \frac{O(1)L(x^{-1})}{m(x^{-1})} = o(1). \end{aligned}$$

Эта оценка, неравенство $\sin x \leq x$ и стандартные свойства правильно меняющихся функций позволяют получить соотношение

$$I_{1,0}^{\mathfrak{Z}}(t, \{u_{\mathfrak{Z}}(t)\}^*) = o(1) \int_0^{\{u_{\mathfrak{Z}}(t)\}^*} x dx = o(1) \frac{m^4(t)}{t^2 L^2(t)} = \frac{o(1)L(t)}{tm^2(t)}.$$

Рассмотрим $I_{1,1}^{\mathfrak{Z}}(t, \{u_{\mathfrak{Z}}(t)\}^*)$:

$$I_{1,1}^{\mathfrak{Z}}(t, \{u_{\mathfrak{Z}}(t)\}^*) = \left(\int_0^{\pi/t} + \int_{\pi/t}^{\{u_{\mathfrak{Z}}(t)\}^*} \right) \frac{\sin(tx)}{\pi t} \left(\frac{a(x)}{b(x)} \right)' dx.$$

По определению $u_{\mathfrak{Z}}(t)$, для любого фиксированного натурального N_0 и $\vartheta \in (0, 1)$ справедливо представление

$$\begin{aligned} I_{1,1}^{\mathfrak{Z}}(t, u_{\mathfrak{Z}}(t)) + I_{1,1}^{\mathfrak{Z}}\left(t, u_{\mathfrak{Z}}(t) + \frac{\pi}{t}\right) &= 2 \int_0^{\vartheta/t} \frac{\sin tx}{\pi t} \left(\frac{a(x)}{b(x)} \right)' dx \\ &\quad + \left(\int_{\vartheta/t}^{2N_0\pi/t} + \int_{\vartheta/t}^{(2N_0+1)\pi/t} \right) \frac{\sin tx}{\pi t} \left(\frac{a(x)}{b(x)} \right)' dx \\ &\quad + \int_{2N_0\pi/t}^{u_{\mathfrak{Z}}(t)} \frac{\sin tx}{\pi t} \left(\left(\frac{a(x)}{b(x)} \right)' - \left(\frac{a(x + \pi/t)}{b(x + \pi/t)} \right)' \right) dx \\ &= I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) + I_4(t). \end{aligned}$$

Применяя теорему о среднем и соотношения (64), получаем, что при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in (2N_0\pi/t, u_{\mathfrak{Z}}(t))$ выполнено соотношение

$$\left(\frac{a(x + \pi/t)}{b(x + \pi/t)} \right)' - \left(\frac{a(x)}{b(x)} \right)' = \frac{\pi}{t} \left(\frac{a(x + \theta\pi/t)}{b(x + \vartheta\pi/t)} \right)'' = \frac{O(1)}{t} \frac{L(x^{-1})}{x^2 m^2(x^{-1})},$$

где $\theta = \theta(x) \in (0, 1)$. Используя полученную оценку и свойства интегралов от правильно меняющихся функций, видим, что при $t \rightarrow \infty$ справедливо равенство

$$I_4(t) = \frac{O(1)}{tN_0} \frac{L(t)}{m^2(t)}.$$

Из неравенства $\sin x \leq x$, первого из соотношений (64) при $t \rightarrow \infty$ и $x \in (0, \vartheta/t)$ получаем, что при $t \rightarrow \infty$ справедливо равенство

$$I_1(t) = \frac{\vartheta O(1)}{t} \frac{L(t)}{m^2(t)}.$$

С другой стороны, для $x \in (\vartheta/t, (2N_0 + 1)\pi/t)$ первое из соотношений (64) принимает вид

$$\left(\frac{a(x)}{b(x)} \right)' \sim \frac{L(t)}{xm^2(t)},$$

и следовательно,

$$I_2(t) + I_3(t) \sim \frac{L(t)}{\pi t m^2(t)} \left(\int_{\vartheta}^{N_0\pi} + \int_{\vartheta}^{(2N_0+1)\pi} \right) \frac{\sin x}{x} dx.$$

Соотношение (97) со следующими за ним оценками с учетом того, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

при убывании к нулю ϑ и неограниченном росте N_0 позволяют преобразовать (97) к виду

$$(v^{(2)}(t))' = \frac{(1 + o(1))L(t)}{tm^2(t)}.$$

Полученная оценка совместно с исходным представлением для $v'(t)$ и условиями В завершает доказательство второй части (18), а, следовательно, и теоремы 3.

Список литературы

1. Erickson K. B., Strong renewal theorems with infinite mean. *Trans. Amer. Math. Soc.* (1970) **151**, 263–291.
2. Erickson K. B., A renewal theorem for distribution on $\mathbf{R}^1$ without expectation. *Bull. Amer. Math. Soc.* (1971) **77**, 406–410.
3. Topchii V., Renewal measure density for distributions with regularly varying tails of order $\alpha \in (0, 1/2]$. *Lect. Notes Statist.* (2010) **197**, 109–118.
4. Топчий В. А., Производная плотности восстановления с бесконечным моментом. *Сибирские электронные матем. известия* (2010) **7**, 340–349.
5. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, **2**. Мир, Москва, 1984.
6. Topchii V. A., Vatutin V. A., Two-dimensional limit theorem for a critical catalytic branching random walk. In: *Mathematics and Computer Science III. Algorithms, Trees, Combinatorics and Probabilities* (Drmota M. et al., eds.). Birkhäuser, Basel, 2004, pp. 387–395.
7. Ватутин В. А., Топчий В. А., Каталитические ветвящиеся случайные блуждания на $\mathbb{Z}^d$ с ветвлением в нуле. *Математические труды* (2011) **14**, №2, 28–72.
8. Боровков А. А., *Теория вероятностей*. URSS, Москва, 2009.
9. Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, **2**. Физматгиз, Москва, 1959.

Статья поступила 29.09.2011.

Переработанный вариант поступил 25.05.2012.