Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Г. Омелянов, О числе независимых множеств в поврежденных графах Кэли, *Дискрет. матем.*, 2005, том 17, выпуск 3, 105–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm119>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 12:52:40

О числе независимых множеств в поврежденных графах Кэли

© 2005 г. К. Г. Омелянов

Графом Кэли, порожденным множеством A , назовем граф $\Gamma_A(V)$ на множестве натуральных чисел V такой, что пара чисел $(u, v) \in V \times V$ является ребром тогда и только тогда, когда $|u - v| \in A$ или $u + v \in A$. Класс графов $G = (V, E)$, состоящих из цепей и циклов и таких, что $|V| = n$, $|E| = m$, обозначим через $\mathcal{G}_2(n, m)$. В статье дается оценка числа независимых множеств в графах Кэли $\Gamma_A(V)$ таких, что

$$A = \left\{ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - t, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - f \right\}, \quad V \subseteq \left[\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + t \right] \cup [n - t + 1, n],$$

где $n, t, f \in \mathbb{N}$ и $f < t < n/4$. Попутно описывается граф с наибольшим числом независимых множеств в классе $\mathcal{G}_2(n, m)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 04-01-00359.

Подмножество S вершин графа Γ называется независимым, если подграф, порожденный множеством S , не содержит ребер. Семейство независимых множеств графа Γ обозначим через $I(\Gamma)$. Для любых действительных чисел p и q обозначим через $[p, q]$ множество натуральных чисел x таких, что $p \leq x \leq q$. Назовем длиной цепи число ее вершин, изолированную вершину будем считать цепью длины один. Обозначим через $\sigma(G)$ наибольшую из степеней вершин графа G . Класс графов $G = (V, E)$, состоящих из цепей и циклов и таких, что $|V| = n$, $|E| = m$, обозначим через $\mathcal{G}_2(n, m)$. Графом Кэли, порожденным множеством A , назовем граф $\Gamma_A(V)$ на множестве натуральных чисел V такой, что пара чисел $(u, v) \in V \times V$ является ребром тогда и только тогда, когда $|u - v| \in A$ или $u + v \in A$.

В [1] графы Кэли использовались для решения задачи о числе множеств, свободных от сумм, в группах. В [2], [3] и [4] оценки числа независимых множеств в графах Кэли использовались для доказательства гипотезы Камерона–Эрдеша о числе множеств, свободных от сумм, в отрезке натуральных чисел $[1, n]$. Рассматриваемые в данной работе графы Кэли возникли при вычислении констант в асимптотиках из гипотезы Камерона–Эрдеша. Основным результатом работы является теорема 1, дающая оценку числа независимых множеств в графах Кэли специального вида, попутно в теореме 2 описывается граф с наибольшим числом независимых множеств в классе $\mathcal{G}_2(n, m)$. Теорема 2 частично (при $k = 2$) подтверждает предположение Н. Алона о структуре k -регулярных графов с максимальным числом независимых множеств.

Теорема 1. Пусть $n, t, f \in \mathbf{N}$ и $f < t < n/4$, положим

$$A = \left\{ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - t, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - f \right\}, \quad V = \left[\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + t \right] \cup [n - t + 1, n].$$

Пусть граф $\Gamma_A^m(V)$ получен из графа $\Gamma_A(V)$ удалением t произвольных вершин. Тогда

$$|I(\Gamma_A^m(V))| \leq \left(\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \right)^t \left(\frac{2\sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} \right)^f \left(\frac{4}{3 + \sqrt{5}} \right)^m, \quad (1)$$

где $|I(G)|$ — число независимых множеств в графе G .

Доказательство. Проведем доказательство следующим образом. Оценим сначала число независимых множеств в графе $\Gamma_A(V)$. Затем выясним, насколько уменьшается число независимых множеств в графе $\Gamma_A(V)$ при удалении из него произвольных t вершин.

Положим $r = t - f$ и $\tilde{r} = t - r \lfloor t/r \rfloor$. Нетрудно заметить, что граф $\Gamma_A(V)$ представляет собой объединение r попарно непересекающихся цепей, $\tilde{r}$ из которых имеют длину $2 \lfloor t/r \rfloor + 2$, а остальные $r - \tilde{r}$ имеют длину $2 \lfloor t/r \rfloor$. Обозначим через $S(\lambda)$ число независимых множеств в цепи длины λ . Заметим, что оно равно члену последовательности Фибоначчи с номером $\lambda + 2$. Напомним, что последовательность Фибоначчи $\{F_k\}$ задается рекуррентным соотношением $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ и начальными условиями $F_1 = F_2 = 1$. Положив

$$\alpha = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

находим, что

$$S(\lambda) = S(\lambda - 1) + S(\lambda - 2), \quad (2)$$

откуда

$$S(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^{\lambda+2} + (-1)^{\lambda+1} \beta^{\lambda+2}). \quad (3)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |I(\Gamma_A(V))| &= [S(2 \lfloor t/r \rfloor + 2)]^{\tilde{r}} [S(2 \lfloor t/r \rfloor)]^{r - \tilde{r}} \\ &\leq \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \right]^r [\alpha^{2 \lfloor t/r \rfloor + 4}]^{\tilde{r}} [\alpha^{2 \lfloor t/r \rfloor + 2}]^{r - \tilde{r}} \leq \left(\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \right)^t \left(\frac{2\sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} \right)^f. \end{aligned} \quad (4)$$

Оценим теперь число независимых множеств, остающихся в графе $\Gamma_A(V)$ при удалении произвольных t вершин. Для этого определим вершину в цепи G длины λ , при удалении которой в графе остается наибольшее количество независимых множеств. Пусть при удалении вершины G распадается на две цепи длины μ и $\lambda - \mu - 1$ соответственно. Таким образом, нам требуется найти

$$\begin{aligned} &\max_{\mu \in [0, \lambda-1]} S(\mu) S(\lambda - \mu - 1) \\ &= \max_{\mu \in [0, \lambda-1]} \frac{1}{5} [\alpha^{\lambda+3} + (-1)^{\lambda+1} \beta^{\lambda+3} + (-1)^{\lambda+\mu} \alpha^{\mu+2} \beta^{\lambda-\mu+1} + (-1)^{\mu+1} \alpha^{\lambda-\mu+1} \beta^{\mu+2}]. \end{aligned}$$

Рассмотрев четыре случая значений переменных λ и μ в зависимости от их четности, получаем, что максимум $S(\mu)S(\lambda - \mu - 1)$ достигается при значениях $\mu = 1$ и $\mu = \lambda - 2$ вне зависимости от четности λ . Нетрудно видеть, что отношение $S(1)S(\lambda - 2)/S(\lambda)$ для четных λ стремится к $\rho = 4/(3 + \sqrt{5})$ снизу при $\lambda \rightarrow \infty$. Действительно, положив $\gamma = \beta/\alpha$, находим, что

$$\begin{aligned}\frac{S(1)S(\lambda - 2)}{S(\lambda)} &= \frac{2}{\alpha^2}((\alpha^\lambda - \beta^\lambda)/(\alpha^\lambda - \beta^2\beta^\lambda/\alpha^2)) \\ &= \rho(1 - (1 - \beta^2/\alpha^2)\beta^\lambda)/(\alpha^\lambda - \beta^2\beta^\lambda/\alpha^2)) \\ &= \rho(1 - \gamma^\lambda(1 - \gamma^2)/(1 - \gamma^{\lambda+2})).\end{aligned}$$

Обозначим через G_m граф, получающийся из цепи G четной длины λ при удалении произвольных m вершин. Докажем, что

$$|I(G_m)| \leq |I(G)|\rho^m. \quad (5)$$

Пусть $m \leq \lambda/2$. Пользуясь тем, что для любых двух цепей длин $k, l \geq 2$ выполнено неравенство

$$S(k)S(l) \leq S(1)S(k + l - 1),$$

будем последовательно заменять в графе G_m пары таких цепей на цепь длины $k + l - 1$ и изолированную вершину. В результате таких преобразований получим граф Γ_m , состоящий из изолированных вершин и одной цепи. При этом будет справедливо неравенство $|I(G_m)| \leq |I(\Gamma_m)|$. Граф Γ_m может быть получен из цепи G последовательным удалением вершин $v_2, v_4, \dots, v_{2m}$. При каждом таком удалении число независимых множеств будет уменьшаться не менее чем в $1/\rho$ раз, следовательно,

$$|I(G_m)| \leq |I(\Gamma_m)| \leq |I(G)|\rho^m.$$

Пусть $m > \lambda/2$. Получим граф G_m из цепи G , последовательно удаляя вершины $v_2, v_4, \dots, v_\lambda$ и, затем, удаляя любые другие $m - \lambda/2$ вершин. Тогда

$$|I(G_m)| \leq |I(G)|\rho^{\lambda/2}(1/2)^{m-\lambda/2} \leq |I(G)|\rho^m.$$

Таким образом, соотношение (5) доказано. Из этого соотношения и того, что граф $\Gamma_A(V)$ состоит из непересекающихся цепей четной длины, следует справедливость неравенства

$$|I(\Gamma_A^m(V))| \leq |I(\Gamma_A(V))|\rho^m. \quad (6)$$

Из неравенств (4) и (6) следует справедливость утверждения теоремы.

Обозначим через $C(k)$ число независимых множеств в цикле длины k . Заметим, что

$$C(k) = S(k - 1) + S(k - 3). \quad (7)$$

Теорема 2. Наибольшим числом независимых множеств в $\mathcal{G}_2(n, m)$ при $m \geq 4$ обладает единственный граф Γ , состоящий из $n - m$ изолированных вершин и из

$m/4$ циклов длины 4, если $m \equiv 0 \pmod{4}$,

$\lfloor m/4 \rfloor - 1$ циклов длины 4 и цикла длины 5, если $m \equiv 1 \pmod{4}$,

$\lfloor m/4 \rfloor - 1$ циклов длины 4 и цикла длины 6, если $m \equiv 2 \pmod{4}$,

$\lfloor m/4 \rfloor - 1$ циклов длины 4 и цикла длины 7, если $m \equiv 3 \pmod{4}$.

Доказательство. Пусть $G \in \mathcal{G}_2(n, m)$. Будем последовательно преобразовывать его к графу Γ так, чтобы при каждом изменении получался граф, содержащий не меньшее число независимых множеств. Все соотношения, приведенные ниже, могут быть получены с помощью формул (2) и (7).

Заметим, что любой граф G из $\mathcal{G}_2(n, m)$ можно представить как объединение непересекающихся графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ таких, что G_1 состоит из цепей, а G_2 — из циклов. Пусть $V_1 \neq \emptyset$. Из доказательства теоремы 1 следует, что среди всех графов, состоящих из цепей, наибольшим количеством независимых множеств будет обладать граф, состоящий из изолированных вершин и цепи длины $|E_1| + 1$. Преобразуем граф G_1 к такому виду.

Воспользуемся тем, что $S(4) = S(1)C(3)$ и $S(|E_1| + 1) < S(1)C(|E_1|)$ при $|E_1| > 3$. Заменим цепь длины $|E_1| + 1$ циклом длины $|E_1|$ и изолированной вершиной. При $|E_1| < 3$ граф G_2 должен содержать хотя бы один цикл, так как $m \geq 4$. Учитывая то, что $S(2)C(k) < S(1)C(k+1)$ и $S(3)C(k) < S(1)C(k+2)$ для любого $k \geq 3$, заменим цепь длины $|E_1| + 1$ и цикл длины k циклом длины $|E_1| + k$ и изолированной вершиной. Итак, мы получаем граф, состоящий из изолированных вершин и циклов.

Далее, используя то, что $C(k) < C(4)C(k-4)$ для любого $k \geq 8$, исключим из графа все циклы длины, большей семи. Учитывая, что $C^2(3) < C(6)$, $C^2(6) < C^3(4)$, $C^2(5) < C(4)C(6)$, $C^2(7) < C^2(4)C(6)$, и последовательно применяя соответствующие замены, получим граф, содержащий не более одного цикла каждой из длин 3, 5, 6 и 7. Проводя замены, задаваемые соотношениями $C(3)C(5) < C^2(4)$, $C(3)C(6) < C(4)C(5)$, $C(3)C(7) < C(4)C(6)$, $C(5)C(6) < C(4)C(7)$, $C(5)C(7) < C^3(4)$, $C(6)C(7) < C^2(4)C(5)$, получим граф, содержащий не более одного цикла длины, меньшей восьми и отличной от четырех. Проведем замену, задаваемую неравенством $C(3)C(4) < C(7)$, если граф содержит цикл длины три. Итак, в результате проведенных преобразований, получен граф Γ . Единственность графа, обладающего наибольшим числом независимых множеств, следует из того, что при преобразовании графа G в граф Γ обязательно будет использована замена, задаваемая строгим неравенством.

Автор выражает признательность своему научному руководителю А. А. Сапоженко.

Список литературы

1. Alon N., Independent sets in regular graphs and sum-free subsets of finite groups. *Israel J. Math.* (1991) **73**, №2, 247–256.
2. Омелянов К. Г., Сапоженко А. А., О числе множеств, свободных от сумм, в отрезке натуральных чисел. *Дискретная математика* (2002) **14**, №3, 3–7.
3. Омелянов К. Г., Сапоженко А. А., О числе и структуре множеств, свободных от сумм, в отрезке натуральных чисел. *Дискретная математика* (2003) **15**, №4, 13–18.
4. Сапоженко А. А., Доказательство гипотезы Камерона–Эрдеша о числе множеств, свободных от сумм. *Матем. вопросы кибернетики* (2003) **12**, 5–14.
5. Green B., The Cameron–Erdős conjecture. *Bull. London Math. Soc.* (2004) **36**, №6, 769–778.

Статья поступила 23.05.2005.