Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Чупрунов, И. Фазекаш, Об обобщенной схеме размещения со случайным числом частиц, *Дискрет. матем.*, 2012, том 24, выпуск 2, 149–153

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1190>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 06:51:14

Об обобщенной схеме размещения со случайным числом частиц

© 2012 г. А. Н. Чупрунов, И. Фазекаш

Показано, что обобщенная схема размещения с неполным комплектом частиц и другие аналоги обобщенной схемы размещения являются частными случаями обобщенной схемы размещения со случайным числом частиц.

Пусть $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ — независимые одинаково распределенные невырожденные случайные величины, принимающие значения в множестве неотрицательных целых чисел $\mathbb{N}_0$, K — неотрицательная целочисленная случайная величина, не зависящая от семейства $\{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}$. Рассмотрим случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_N$ с совместным распределением

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \mathbf{E}^K \mathbf{P}\left\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \sum_{i=1}^N \xi_i = K\right\}. \quad (1)$$

При этом предполагается, что

$$\mathbf{P}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N = K(\omega)) > 0$$

почти наверное.

Пусть

$$n = k_1 + k_2 + \dots + k_N.$$

Допустим, что распределение случайной величины K совпадает с распределением случайной величины

$$S_N = \sum_{i=1}^N \xi_i.$$

Тогда, так как

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \mathbf{P}\left\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \sum_{i=1}^N \xi_i = k\right\} = 0, \quad k \neq n,$$

получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} &= \mathbf{P}\left\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \sum_{i=1}^N \xi_i = n\right\} \mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^N \xi_i = n\right\} \\ &= \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N\}. \end{aligned}$$

Поэтому в этом случае совместное распределение случайных величин $\eta_1, \dots, \eta_N$ совпадает с совместным распределением случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_N$ и схема независимых случайных величин является частным случаем схемы (1).

Обобщенная схема размещения является другим частным случаем схемы (1). Пусть случайная величина K постоянна, т.е. $K = n$. Тогда мы получаем обобщенную схему размещения, введенную В. Ф. Колчиным в [1] (см. также монографии [2, 3]), где случайные величины $\eta'_1, \dots, \eta'_N$ имеют совместное распределение

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \mathbf{P}\left\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \sum_{i=1}^N \xi_i = n\right\}. \quad (2)$$

Обобщенная схема размещения интерпретируется как схема размещения n частиц по N ячейкам. Поэтому схему (1) можно интерпретировать как обобщенную схему размещения случайного числа K частиц по N ячейкам.

В [4] был предложен аналог обобщенной схемы размещения — случайные величины $\eta'_1, \dots, \eta'_N$, имеющие совместное распределение

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \mathbf{P}\left\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \sum_{i=1}^N \xi_i \in M\right\}, \quad (3)$$

где M — такое подмножество $\mathbf{N}_0$, что $\mathbf{P}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N \in M) > 0$.

Рассмотрим случайные величины

$$\mu_{MN}^{(r)} = \sum_{i=1}^N \mathbf{I}_{\{\eta_i=r\}}, \quad \eta_{(MN)} = \max_{1 \leq i \leq N} \eta_i,$$

где $\mathbf{I}_{\{\eta'_i=r\}}$ — индикатор события, состоящего в том, что случайная величина η'_i равна r . Здесь r — фиксированное целое неотрицательное число. Случайная величина $\mu_{MN}^{(r)}$ и случайная величина $\eta_{(MN)}$ интерпретируются как число ячеек в обобщенной схеме размещения частиц по N ячейкам, содержащих r частиц и максимальное число частиц в ячейке в предположении, что количество частиц принадлежит множеству M . Изучению случайных величин $\mu_{MN}^{(r)}$ и $\eta_{(MN)}$ в случае обобщенной схемы размещения посвящено большое количество работ (см. [2, 3] и их библиографию). При $M = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ в [4] получены предельные теоремы для случайных величин $\mu_{MN}^{(r)}$ и случайных величин $\eta_{(MN)}$.

В [5] получены предельные теоремы для числа пустых ячеек в схеме размещения различных частиц по ячейкам в случае неполных комплектов. Для модели (3) неполным комплектом являются случайные величины $\eta'_1, \dots, \eta'_l$, $l < N$, имеющие совместное распределение

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_l = k_l\} = \mathbf{P}\left\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_l = k_l \mid \sum_{i=1}^N \xi_i \in M\right\}. \quad (4)$$

Для схемы (4) справедливо представление (1).

Теорема 1. Пусть $l \leq N$, случайные величины $\eta'_1, \dots, \eta'_l$ имеют совместное распределение (4). Тогда

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_l = k_l\} = \mathbf{E}^K \mathbf{P}\left\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_l = k_l \mid \sum_{i=1}^l \xi_i = K\right\}, \quad (5)$$

где случайная величина K не зависит от семейства $\{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}$ и имеет распределение

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{K = k\} &= \mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^l \xi_i = k \mid \sum_{i=1}^N \xi_i \in M\right\} \\ &= \frac{\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^l \xi_i = k\right\} \mathbf{P}\left\{\sum_{i=l+1}^N \xi_i \in M - k\right\}}{\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^N \xi_i \in M\right\}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Доказательство. Пусть $k_1 + k_2 + \dots + k_l = n$. Тогда

$$\mathbf{P}\left\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_l = k_l \mid \sum_{i=1}^l \xi_i = k, \sum_{i=1}^N \xi_i \in M\right\} = 0, \quad k \neq n.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_l = k_l\} \\ &= \frac{\mathbf{P}\left\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_l = k_l, \sum_{i=1}^l \xi_i = n, \sum_{i=1}^N \xi_i \in M\right\}}{\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^N \xi_i \in M\right\}} \\ &= \sum_{\{k: \mathbf{P}\{K=k\} > 0\}} \frac{\mathbf{P}\left\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_l = k_l, \sum_{i=1}^l \xi_i = k, \sum_{i=1}^N \xi_i \in M\right\}}{\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^l \xi_i = k\right\}} \\ &\quad \times \frac{\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^l \xi_i = k\right\}}{\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^N \xi_i \in M\right\}} \\ &= \sum_{\{k: \mathbf{P}\{K=k\} > 0\}} \frac{\mathbf{P}\left\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_l = k_l, \sum_{i=1}^l \xi_i = k, k + \sum_{i=l+1}^N \xi_i \in M\right\}}{\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^l \xi_i = k\right\}} \\ &\quad \times \frac{\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^l \xi_i = k\right\}}{\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^N \xi_i \in M\right\}} \\ &= \sum_{\{k: \mathbf{P}\{K=k\} > 0\}} \frac{\mathbf{P}\left\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_l = k_l, \sum_{i=1}^l \xi_i = k\right\}}{\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^l \xi_i = k\right\}} \\ &\quad \times \frac{\mathbf{P}\left\{k + \sum_{i=l+1}^N \xi_i \in M\right\} \mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^l \xi_i = k\right\}}{\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^N \xi_i \in M\right\}} \\ &= \sum_{\{k: \mathbf{P}\{K=k\} > 0\}} \mathbf{P}\left\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_l = k_l \mid \sum_{i=1}^l \xi_i = k\right\} \mathbf{P}\{K = k\} \\ &= \mathbf{E}^K \mathbf{P}\left\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \sum_{i=1}^l \xi_i = K\right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Равенство (5) доказано. Равенство (6) следует из (7). Теорема доказана.

При $l = N$ из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть случайные величины $\eta'_1, \dots, \eta'_l$ имеют совместное распределение (4). Тогда

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_N = k_N\} = \mathbf{E}^K \mathbf{P}\left\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \sum_{i=1}^N \xi_i = K\right\},$$

где случайная величина K не зависит от семейства $\{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}$ и имеет распределение

$$\mathbf{P}\{K = k\} = \mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^N \xi_i = k \mid \sum_{i=1}^N \xi_i \in M\right\}. \quad (8)$$

Полагая в теореме 1 $M = \{n\}$, приходим к следующему утверждению.

Следствие 2. Пусть $l < N$ и случайные величины $\eta'_1, \dots, \eta'_N$ являются обобщенной схемой размещения n частиц по N ячейкам. Тогда

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1, \dots, \eta_l = k_l\} = \mathbf{E}^K \mathbf{P}\left\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_l = k_l \mid \sum_{i=1}^l \xi_i = K\right\},$$

где случайная величина K не зависит от семейства $\{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}$ и имеет распределение

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{K = k\} &= \mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^l \xi_i = k \mid \sum_{i=1}^N \xi_i = n\right\} \\ &= \frac{\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^l \xi_i = k\right\} \mathbf{P}\left\{\sum_{i=l+1}^N \xi_i = n - k\right\}}{\mathbf{P}\left\{\sum_{i=1}^N \xi_i = n\right\}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Пример 1. Схема размещения n различных частиц по N ячейкам является обобщенной схемой размещения n частиц по ячейкам N , с пуассоновскими случайными величинами ξ_i , имеющими параметр λ , [1]. Поэтому случайные величины $\sum_{i=1}^l \xi_i$, $\sum_{i=l+1}^N \xi_i$ и $\sum_{i=1}^N \xi_i$ — пуассоновские случайные величины с параметрами, $l\lambda$, $(N-l)\lambda$, $N\lambda$, соответственно. Следовательно, из (9) получаем

$$\mathbf{P}\{K = k\} = \binom{n}{k} \left(\frac{l}{N}\right)^k \left(1 - \frac{l}{N}\right)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Таким образом, случайная величина K — биномиальная случайная величина с параметрами $p = l/N$ и n . Случайную величину K можно интерпретировать следующим образом. Пусть I_i — индикатор события, состоящего в том, что i -я частица оказалась в одной из первых l ячеек и индикаторы I_i , $1 \leq i \leq n$, независимы. Тогда $\mathbf{P}\{I_i = 1\} = l/N$ и число частиц, которые оказались среди первых l ячеек — случайная величина $K = \sum_{i=1}^n I_i$.

Пример 2. Рассмотрим обобщенную схему размещения n частиц по N ячейкам, где случайные величины ξ_i есть биномиальные случайные величины с параметрами (m, p) , где $m \in \mathbf{N}$, $0 < p < 1$ (при $m = 1$, ξ_i — индикаторы). Тогда $\sum_{i=1}^l \xi_i$, $\sum_{i=l+1}^N \xi_i$ и $\sum_{i=1}^N \xi_i$

есть биномиальные случайные величины с параметрами (ml, p) , $(m(N-l), p)$, (mN, p) , соответственно. Следовательно, из (9) получаем

$$\mathbf{P}\{K = k\} = \frac{\binom{ml}{k} \binom{m(N-l)}{n-k}}{\binom{mN}{n}}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Таким образом, K — случайная величина, имеющая гипергеометрическое распределение с параметрами mN , ml . Случайную величину K можно интерпретировать следующим образом. В урне имеются ml белых и $m(N-l)$ черных шаров. Мы вынимаем из урны n шаров, белые среди этих шаров распределяем по первым l ячейкам, а черные — по последним $N-l$ ячейкам. Тогда случайная величина K — количество белых шаров в этой урновой модели.

Пример 3. Рассмотрим схему размещения n частиц по N ячейкам, причем все комбинации частиц равновероятны (схема размещения неразличимых частиц) и введем дополнительное условие, что в каждой ячейке содержится не менее r частиц. Это соответствует случаю (см. с. 30 в [1])

$$\mathbf{P}\{\xi_0 = k\} = p^{k-r} (1-p), \quad k = r, r+1, \dots, \quad 0 < p < 1.$$

Поэтому, используя в (9) последнюю формулу на с. 30 в [1], получаем

$$\mathbf{P}\{K = k\} = \frac{\binom{k-(r-1)l-1}{l-1} \binom{n-k-(r-1)(N-l)-1}{N-l-1}}{\binom{n-(r-1)N-1}{N-1}}, \quad rl \leq k \leq n - r(N-l).$$

Список литературы

1. Колчин В. Ф., Один класс предельных теорем для условных распределений. *Литовский матем. сборник* (1968) **8**, №1, 53–63.
2. Колчин В. Ф., *Случайные графы*. Физматлит, Москва, 2000.
3. Тимашёв А. Н., *Асимптотические разложения в вероятностной комбинаторике*. ТВП, Москва, 2011.
4. Чупрунов А. Н., Фазекаш И., Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для числа ячеек заданного объема. *Дискретная математика* (2012) **24**, №1, 140–158.
5. Хакимуллин Е. Р., Энатская Н. Ю., Предельные теоремы для числа пустых ячеек. *Дискретная математика* (1997) **9**, №2, 120–130.

Статья поступила 18.05.2011.