Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Логачев, С. В. Смышляев, В. В. Ященко, ρ -
уравновешенные булевы функции, *Дискрет. матем.*, 2012,
том 24, выпуск 2, 154–159

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1191>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 15:23:33

ρ -уравновешенные булевы функции

© 2012 г. О. А. Логачев, С. В. Смышляев, В. В. Яценко

Вводится параметризованное семейство свойств булевых функций, обобщающих свойства уравновешенности и совершенной уравновешенности. При этом свойства уравновешенности и совершенной уравновешенности входят в это семейство при некоторых крайних значениях параметра. Изучается структура соответствующего семейства множеств булевых функций, а также свойства функций из этих множеств.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 09-01-00653-а и 10-01-00475-а.

1. Введение

Одним из важнейших свойств кодирующих устройств, построенных с помощью регистров сдвига и булевых функций, является возможность получения на выходе произвольных двоичных последовательностей. Данное свойство, как было показано Сумарковым ([7]), эквивалентно понятию совершенной уравновешенности булевых функций.

В настоящей работе вводится и исследуется свойство ρ -уравновешенности булевых функций для фиксированного каркаса ρ , обобщающее, в определенном смысле, свойство совершенной уравновешенности. Формулируется и доказывается критерий ρ -уравновешенности в терминах коэффициентов Уолша–Адамара, важный для получения соотношений между коэффициентами Уолша–Адамара совершенно уравновешенных булевых функций.

Доказывается утверждение о том, что множество ρ -уравновешенных булевых функций при определенном классе каркасов ρ строго вложено в множество совершенно уравновешенных функций. Данное утверждение является обобщением представленного в [2] результата, опровергающего полученный Гоlichem в [1] критерий совершенной уравновешенности.

2. Определения и предварительные результаты

Для любого натурального n множество двоичных наборов длины n будем обозначать через $V_n = \{0, 1\}^n$; множество булевых функций от n переменных — через $\mathcal{F}_n$.

Определение 1 ([4]). Преобразованием Уолша–Адамара булевой функции f называется целочисленная функция на V_n , определяемая равенством

$$W_f(\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{x} \in V_n} (-1)^{f(\mathbf{x}) \oplus (\mathbf{x}, \mathbf{u})}$$

(суммирование производится в действительной области). Для каждого $\mathbf{u} \in V_n$ значение $W_f(\mathbf{u})$ называется коэффициентом Уолша–Адамара.

Теорема 1 ([4]). Для преобразования Уолша–Адамара справедлива формула обращения:

$$(-1)^{f(\mathbf{x})} = 2^{-n} \sum_{\mathbf{u} \in V_n} W_f(\mathbf{u}) (-1)^{(\mathbf{x}, \mathbf{u})}.$$

Обозначим через ρ набор целых положительных чисел $\rho = \{k; d_1, d_2, \dots, d_k\}$, причем $d_1 = 1, d_{i+1} > d_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, k-1$.

Пусть теперь $\mathbf{y} \in V_\infty$ — бесконечная двоичная последовательность, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots)$. Определим поднабор $\mathbf{y}_\rho \in V_k$ последовательности $\mathbf{y}$ равенством $\mathbf{y}_\rho = (y_{d_1}, y_{d_2}, \dots, y_{d_k})$.

Параметр ρ поднабора $\mathbf{y}_\rho$ задает длину $\mathbf{y}_\rho$ и позиции последовательности $\mathbf{y}$, из которых выбираются элементы $\mathbf{y}_\rho$. Поэтому параметр ρ будем называть каркасом поднабора $\mathbf{y}_\rho$.

Обозначим для функции $f \in \mathcal{F}_n$ и каркаса ρ через f_ρ следующее отображение из V_{d_k+n-1} в V_k :

$$\begin{aligned} f_\rho(x_1, x_2, \dots, x_{d_k+n-1}) \\ = (f(x_1, x_2, \dots, x_n), f(x_{d_2}, x_{d_2+1}, \dots, x_{d_2+n-1}), \dots, f(x_{d_k}, x_{d_k+1}, \dots, x_{d_k+n-1})). \end{aligned}$$

Определение 2. Функция $f \in \mathcal{F}_n$ называется ρ -уравновешенной, если отображение f_ρ уравновешено; другими словами, если все поднаборы $\mathbf{y}_\rho \in V_k$ имеют равное число образов относительно отображения f_ρ .

Рассмотрим два каркаса

$$\rho_1 = \{1; 1\}, \quad \rho_M = \{M; 1, 2, \dots, M\},$$

где $M \in \mathbb{N}$. Очевидно, что ρ_1 -уравновешенность булевых функций — это уравновешенность.

Определение 3. Булева функция $f \in \mathcal{F}_n$ называется совершенно уравновешенной, если она является ρ_M -уравновешенной при любом $M \in \mathbb{N}$.

Нетрудно показать, что данное определение является эквивалентным традиционному определению совершенной уравновешенности булевой функции в том виде, в котором оно представлено в [1, 5, 6, 7] и др.

3. Основные результаты

В [8] рассмотрено понятие сводимости свойств булевых отображений к свойствам координатных функций и показано, что свойство уравновешенности булевых отображений является сводимым. Из этого вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. Функция $f \in \mathcal{F}_n$ является ρ -уравновешенной тогда и только тогда, когда для любого ненулевого набора $\gamma = (\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \dots, \gamma^{(k)}) \in V_k$ булева функция $\sum_\gamma f_\rho \in \mathcal{F}_{d_k+n-1}$,

$$\begin{aligned} \sum_\gamma f_\rho(x_1, x_2, \dots, x_{d_k+n-1}) &= \gamma^{(1)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\oplus \gamma^{(2)} f(x_{d_2}, x_{d_2+1}, \dots, x_{d_2+n-1}) \oplus \dots \oplus \gamma^{(k)} f(x_{d_k}, x_{d_k+1}, \dots, x_{d_k+n-1}), \end{aligned}$$

является уравновешенной.

Введем на множестве каркасов отношение частичного порядка $\leq$ следующим образом: если $\rho' = \{k'; d'_1, d'_2, \dots, d'_{k'}\}$, $\rho = \{k; d_1, d_2, \dots, d_k\}$, то $\rho' \leq \rho$ тогда и только тогда, когда $k' \leq k$ и для любого $i = 1, 2, \dots, k'$ найдется $j(i) \in \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ такое, что $d'_i = d_{j(i)}$.

В качестве примера заметим, что для любого каркаса ρ выполнено $\rho_1 \leq \rho$.

В этих обозначениях из теоремы 2 легко получить следующие утверждения.

Следствие 1. Функция $f \in \mathcal{F}_n$ является ρ -уравновешенной тогда и только тогда, когда f является ρ' -уравновешенной для любого $\rho' \leq \rho$.

Следствие 2. Функция $f \in \mathcal{F}_n$ является совершенно уравновешенной тогда и только тогда, когда она является ρ -уравновешенной для любого ρ .

Предположим теперь, что для каркаса ρ найдется такое i , что $d_{i+1} \geq d_i + n$. В этом случае функция $\sum_{\gamma} f_{\rho}$ для любого набора γ является суммой двух функций от непересекающихся переменных и, тем самым, является уравновешенной тогда и только тогда, когда хотя бы одно из слагаемых уравновешено. Очевидно при этом, что уравновешенность каждого слагаемого — это ρ' -уравновешенность функции f для некоторого $\rho' \leq \rho$. Тем самым, в дальнейшем достаточно рассматривать только такие каркасы ρ , для которых $d_{i+1} < d_i + n$ для любого $i = 1, 2, \dots, k-1$. Аналогичными рассуждениями приходим к выводу, что при исследовании уравновешенности функций $\sum_{\gamma} f_{\rho}$ достаточно ограничиться такими наборами γ , при которых между любыми соседними слагаемыми обязательно есть зацепление, т.е. они имеют вид $f(x_l, x_{l+1}, \dots, x_{l+n-1}) \oplus f(x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+n-1})$, где $m \leq l + n - 1$. Кроме того, некоторые суммы $\sum_{\gamma} f_{\rho}$ и $\sum_{\gamma'} f_{\rho}$ фактически будут задавать одну и ту же функцию после соответствующей перенумерации аргументов (сдвига номеров аргументов так, чтобы первой переменной была x_1).

Критерием ρ -уравновешенности функции $f \in \mathcal{F}_n$, который приведен в теореме 2, является уравновешенность набора из $2^k - 1$ функций вида $\sum_{\gamma} f_{\rho}$. Как показывают предыдущие рассуждения, на самом деле достаточно проверить уравновешенность меньшего числа функций вида $\sum_{\gamma} f_{\rho}$. При этом необходимо рассматривать каркасы $\rho' \leq \rho$ последовательно по мере увеличения сложности суммы, поскольку это позволит упрощать получаемые соотношения.

Таким образом, необходимо исследовать на уравновешенность булевы функции, которые представляются суммами вида

$$\bigoplus_{i=1}^m f(x_{l_i}, x_{l_i+1}, \dots, x_{l_i+n-1}). \quad (1)$$

При этом набор номеров аргументов удовлетворяет следующим условиям:

- (1) $\bigcup_{i=1}^m \{l_i, l_i + 1, \dots, l_i + n - 1\} = \{1, 2, \dots, N\}$;
- (2) $l_i \neq l_j$ для любых $i \neq j$;
- (3) для любого $i \in \{2, 3, \dots, m\}$ найдется по крайней мере одно j , $j \neq i$, такое, что $l_i \in \{l_j, l_j + 1, \dots, l_j + n - 1\}$.

Введем N множеств пар индексов по следующему правилу:

$$J_k = \{(i, s), i \in \{1, 2, \dots, m\}, s \in \{0, 1, \dots, n-1\} \mid l_i + s = k\}.$$

Теорема 3. Булева функция (1) уравновешена тогда и только тогда, когда коэффициенты Уолша–Адамара функции f удовлетворяют следующему условию:

$$\sum_{i=1}^m \prod_{i=1}^m W_f(\alpha^{(i,0)}, \alpha^{(i,1)}, \dots, \alpha^{(i,n-1)}) = 0, \quad (2)$$

где суммирование осуществляется по всем наборам m булевых переменных $\alpha^{(i,s)}$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $s \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, которые удовлетворяют следующим N линейным соотношениям:

$$\bigoplus_{(i,s) \in J_k} \alpha^{(i,s)} = 0, \quad k \in \{1, 2, \dots, N\}. \quad (3)$$

Доказательство. Функция (1) уравновешена тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$\sum_{(x_1, x_2, \dots, x_N) \in V_N} (-1)^{\bigoplus_{i=1}^m f(x_{l_i}, \dots, x_{l_i+n-1})} = \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_N) \in V_N} \prod_{i=1}^m (-1)^{f(x_{l_i}, \dots, x_{l_i+n-1})} = 0.$$

Заменяем $(-1)^{f(x_{l_i}, \dots, x_{l_i+n-1})}$ по формуле обратного преобразования Уолша–Адамара (теорема 1):

$$(-1)^{f(x_{l_i}, \dots, x_{l_i+n-1})} = \frac{1}{2^n} \sum_{(\alpha^{(i,0)}, \dots, \alpha^{(i,n-1)}) \in V_n} W_f(\alpha^{(i,0)}, \dots, \alpha^{(i,n-1)}) (-1)^{\bigoplus_{s=0}^{n-1} \alpha^{(i,s)} x_{l_i+s}},$$

затем перемножаем, и в выражении $(-1)^{\bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{s=0}^{n-1} \alpha^{(i,s)} x_{l_i+s}}$ приводим подобные члены следующим образом:

$$\bigoplus_{i=1}^m \bigoplus_{s=0}^{n-1} \alpha^{(i,s)} x_{l_i+s} = \bigoplus_{k=1}^N x_k \bigoplus_{(i,s) \in J_k} \alpha^{(i,s)}.$$

Теперь меняем порядок суммирования по x_{l_i+s} и $\alpha^{(i,s)}$, пользуясь соотношением

$$\sum_{(x_1, \dots, x_N) \in V_N} (-1)^{\bigoplus_{k=1}^N x_k \bigoplus_{(i,s) \in J_k} \alpha^{(i,s)}} = \begin{cases} 2^N, & \text{если } \bigoplus_{(i,s) \in J_k} \alpha^{(i,s)} = 0, \quad k = 1, \dots, N, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и приходим к требуемому условию (2).

Пример 1. Пусть $f \in \mathcal{F}_4$. Чтобы проверить, что функция f является $\rho(3; 1, 2, 3)$ -уравновешенной, необходимо и достаточно проверить, что выполнены равенства

$$\begin{aligned} W_f(0, 0, 0, 0) &= 0, \\ \sum_{(a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}) \in V_3} W_f(0, a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}) W_f(a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, 0) &= 0, \\ \sum_{(a^{(1)}, a^{(2)}) \in V_2} W_f(0, 0, a^{(1)}, a^{(2)}) W_f(a^{(1)}, a^{(2)}, 0, 0) &= 0, \\ \sum_{(a^{(1)}, \dots, a^{(6)}) \in V_6} W_f(0, a^{(1)}, a^{(3)} \oplus a^{(4)}, a^{(5)} \oplus a^{(6)}) W_f(a^{(1)}, a^{(3)}, a^{(5)}, a^{(2)}) W_f(a^{(4)}, a^{(6)}, a^{(2)}, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_2x_3x_4 \oplus x_4$. Она является $\rho(2; 1, 2)$ -уравновешенной, так как для нее выполнены равенства $W_f(0, 0, 0, 0) = 0$ и

$$\sum_{(a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}) \in V_3} W_f(0, a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}) \cdot W_f(a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, 0) = 0.$$

С другой стороны, так как выражение $\sum_{(a^{(1)}, a^{(2)}) \in V_2} W_f(0, 0, a^{(1)}, a^{(2)}) \cdot W_f(a^{(1)}, a^{(2)}, 0, 0)$ отлично от нуля, $\rho(2; 1, 3)$ -уравновешенной данная функция не является.

Суммируя полученные результаты, приходим к следующему утверждению.

Теорема 4. *Функция $f \in \mathcal{F}_n$ является совершенно уравновешенной тогда и только тогда, когда ее коэффициенты Уолша–Адамара для любого натурального t и любого допустимого набора номеров аргументов для суммы (1) удовлетворяют соотношению (2).*

Для фиксированного n интересен вопрос, при каком наименьшем M ρ_M -уравновешенность булевой функции означает ее совершенную уравновешенность. В [3] доказано, что в качестве обладающего таким свойством M можно выбрать $M = 2^{n-2}(2^{n-1} - 1) + n$.

В [1] Голичем было доказано следующее утверждение, из которого вытекает, что в качестве M можно выбрать $M = n$.

Лемма 1 ([1]). *Булева функция $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_n$ совершенно уравновешена тогда и только тогда, когда она является ρ_n -уравновешенной.*

В доказательстве утверждения в [1] содержался существенный пробел, однако опровержений данного утверждения до работы [2] не предлагалось.

Пример 3 ([2]). Рассмотрим следующую функцию $f \in \mathcal{F}_5$:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \\ = x_2 \oplus x_3 \oplus x_5 \oplus x_1x_4 \oplus x_1x_5 \oplus x_2x_4 \oplus x_2x_5 \oplus x_3x_5 \oplus x_1x_4x_5 \oplus x_2x_4x_5. \end{aligned}$$

Данная функция ρ_5 -уравновешена и даже ρ_6 -уравновешена, но не ρ_7 -уравновешена, и следовательно, f не является совершенно уравновешенной, что противоречит лемме Голича и даже ее ослабленному варианту (с условием на ρ_{n+1} -уравновешенность вместо ρ_n -уравновешенности).

Покажем, что ни для какого сколь угодно большого $c \in \mathbf{N}$ ослабленный вариант леммы Голича с условием на ρ_{n+c} -уравновешенность не является верным.

Лемма 2. *Пусть $f \in \mathcal{F}_n$. Функция*

$$f^{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_{kn-k+1}) = f(x_1, x_{k+1}, x_{2k+1}, \dots, x_{(n-1)k+1})$$

является ρ_{kM} -уравновешенной тогда и только тогда, когда функция f является ρ_M -уравновешенной.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f^{(k)}$ является ρ_{kM} -уравновешенной. Как нетрудно убедиться, для всякого набора $(y_1, y_2, \dots, y_M) \in V_M$ верно равенство

$$|f_{\rho_{kM}}^{(k)-1}(\underbrace{y_1, y_1, \dots, y_1}_k, \underbrace{y_2, y_2, \dots, y_2}_k, \dots, \underbrace{y_M, y_M, \dots, y_M}_k)| = |f_{\rho_M}^{-1}(y_1, y_2, \dots, y_M)|^k. \quad (4)$$

Предположим противное: функция $f \in \mathcal{F}_n$ не является ρ_M -уравновешенной. Тогда существует пара наборов $(y'_1, y'_2, \dots, y'_M), (y''_1, y''_2, \dots, y''_M) \in V_M$, для которых выполнено $|f_{\rho_M}^{-1}(y'_1, y'_2, \dots, y'_M)| \neq |f_{\rho_M}^{-1}(y''_1, y''_2, \dots, y''_M)|$. Учитывая (4), получаем, что

$$\begin{aligned} & |f_{\rho_{kM}}^{(k)-1}(\underbrace{y'_1, y'_1, \dots, y'_1}_k, \underbrace{y'_2, y'_2, \dots, y'_2}_k, \dots, \underbrace{y'_M, y'_M, \dots, y'_M}_k)| \\ & \neq |f_{\rho_{kM}}^{(k)-1}(\underbrace{y''_1, y''_1, \dots, y''_1}_k, \underbrace{y''_2, y''_2, \dots, y''_2}_k, \dots, \underbrace{y''_M, y''_M, \dots, y''_M}_k)|. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $f^{(k)}$ не является ρ_{kM} -уравновешенной, что противоречит предположению.

Достаточность. Для всякого набора $(y_1, y_2, \dots, y_{kM}) \in V_{kM}$ верно равенство

$$\begin{aligned} f_{\rho_{kM}}^{(k)-1}(y_1, y_2, \dots, y_{kM}) &= \{(x_1, x_2, \dots, x_{kM+k(n-1)}) \in V_{kM+k(n-1)} \mid \\ & (x_i, x_{k+i}, \dots, x_{k(M+n-2)+i}) \in f_{\rho_M}^{-1}(y_i, y_{k+i}, \dots, y_{k(M-1)+i}), i = 1, 2, \dots, k\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть функция f является ρ_M -уравновешенной. Тогда, как следует из (5), мощность множества $f_{\rho_{kM}}^{(k)-1}(y_1, y_2, \dots, y_{kM})$ не зависит от выбора $(y_1, y_2, \dots, y_{kM}) \in V_{kM}$.

Следствие 3. Для любого $c \in \mathbb{N}$ существует $n \in \mathbb{N}$ и функция $f \in \mathcal{F}_n$, которая является ρ_{n+c} -уравновешенной и не является совершенно уравновешенной.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $c \in \mathbb{N}$. Пусть $k = \lceil (c+1)/2 \rceil$. Рассмотрим функцию f из примера 3 и соответствующую функцию $f^{(k)} \in \mathcal{F}_{4k+1}$. Тогда $n = 4k+1$ и по лемме 2, f является ρ_{6k} -уравновешенной, но не является ρ_{7k} -уравновешенной. Следовательно, f является ρ_{n+c} -уравновешенной, но не является совершенно уравновешенной.

Список литературы

1. Golić J., On the security of nonlinear filter generators. *Lect. Notes Computer Sci.* (1996) **1039**, 173–188.
2. Smyshlyaev S. V., Perfectly balanced Boolean functions and Golić conjecture. *J. Cryptology* (2012) **25**, №3, 464–483.
3. Бабаш А. В., Запреты автоматов и двоичных функций. *Труды по дискретной математике* (2006) **9**, 7–20.
4. Логачев О. А., Сальников А. А., Яценко В. В., *Булевы функции в теории кодирования и криптологии*. МЦНМО, Москва, 2004.
5. Логачев О. А., Смышляев С. В., Яценко В. В., Новые методы изучения совершенно уравновешенных булевых функций. *Дискретная математика* (2009) **21**, №2, 51–74.
6. Смышляев С. В., Барьеры совершенно уравновешенных булевых функций. *Дискретная математика* (2010) **22**, №2, 66–79.
7. Сумароков С. Н., Запреты двоичных функций и обратимость для одного класса кодирующих устройств. *Обозрение прикладной и промышленной математики* (1994) **1**, №1, 33–55.
8. Яценко В. В., Свойства булевых отображений, сводимые к свойствам их координатных функций. *Вестник МГУ, сер. матем.* (1997), №4 11–13.

Статья поступила 20.01.2012.