Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Емеличев, В. В. Коротков, Устойчивость векторной инвестиционной булевой задачи с критериями Вальда, *Дискрет. матем.*, 2012, том 24, выпуск 3, 3–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1192>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 15:31:08

Устойчивость векторной инвестиционной булевой задачи с критериями Вальда

© 2012 г. В. А. Емеличев, В. В. Коротков

Указаны нижняя и верхняя достижимые оценки радиуса устойчивости векторного булева варианта задачи портфельной оптимизации Марковица с максиминными критериями эффективности Вальда и паретовским принципом оптимальности.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, проект Ф11К-095.

1. Введение

В [1], на основе портфельной теории Марковица, была сформулирована векторная инвестиционная булева модель с минимаксными критериями рисков Сэвиджа. Получены оценки радиуса устойчивости парето-оптимального портфеля. В настоящей статье в рамках модели Марковица рассматривается векторная задача формирования портфеля инвестора, максимизирующего различные виды эффективности портфеля в условиях нестабильности экономической ситуации и неопределенности исходных данных задачи. Исследуется тот тип устойчивости инвестиционной задачи к возмущениям ее параметров, который является дискретным аналогом свойства полунепрерывности сверху по Хаусдорфу многозначного отображения, переводящего любой набор параметров инвестиционной задачи в соответствующее множество Парето. При этом непредсказуемость состояния рынка учитывается путем использования максиминных критериев Вальда. В результате проведенного параметрического анализа найдены нижняя и верхняя достижимые (неулучшаемые) оценки радиуса устойчивости задачи для случая линейной нормы l_1 в пространстве портфелей и чебышевской нормы l_∞ в критериальном пространстве и в пространстве состояний рынка. Отметим, что при таких же сочетаниях норм l_1 и l_∞ в [2] анонсированы аналогичные оценки (сверху и снизу) радиуса устойчивости векторной инвестиционной булевой задачи с минимаксными критериями рисков Сэвиджа и паретовским принципом оптимальности.

2. Постановка задачи

Рассмотрим векторный дискретный вариант задачи управления инвестициями Марковица [3]. Для этого введем ряд обозначений и определений. Пусть $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$ — альтернативные инвестиционные проекты (активы); N_m — возможные состояния рынка

(рыночные ситуации); вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in X \subseteq \mathbf{E}^n$ — инвестиционный портфель с компонентами $x_j = 1$, если инвестиционный проект $j \in N_n$ реализуется, и $x_j = 0$ в противном случае. Здесь $\mathbf{E} = \{0, 1\}$.

Существует несколько подходов к оценке экономической эффективности инвестиционных проектов (NPV, NFV, PI и др.), по разному учитывающих влияние факторов неопределенности и риска (см., например, [4, 5, 6]). Пусть N_s — виды (показатели) эффективности проекта. Инвестиционный портфель x будем оценивать величиной $\sum_{j \in N_n} e_{ijk} x_j$, где e_{ijk} — ожидаемая оценка эффективности вида $k \in N_s$ инвестиционного проекта $j \in N_n$ в случае, когда рынок находится в состоянии $i \in N_m$. В этом контексте исходными данными задачи является трехмерная матрица эффективности проектов E размера $m \times n \times s$ с элементами e_{ijk} из $\mathbf{R}$.

На множестве инвестиционных портфелей X зададим векторную целевую функцию

$$f(x, E) = (f_1(x, E_1), f_2(x, E_2), \dots, f_s(x, E_s)),$$

компонентами которой являются максиминные критерии Вальда [7]

$$f_k(x, E_k) = \min_{i \in N_m} E_{ik} x = \min_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} e_{ijk} x_j \rightarrow \max_{x \in X}, \quad k \in N_s,$$

где $E_k \in \mathbf{R}^{m \times n}$ — k -е сечение матрицы $E = [e_{ijk}] \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}$, $E_{ik} = (e_{i1k}, e_{i2k}, \dots, e_{ink})$ — i -я строка этого сечения. Таким образом, следуя критерию Вальда, инвестор в условиях нестабильности экономической ситуации проявляет крайнюю осторожность, оптимизируя эффективность портфеля $E_{ik} x$ в предположении, что рынок находится в самом невыгодном для него состоянии.

Под векторной (s -критериальной) инвестиционной булевой задачей $Z^s(E)$, $s \geq 1$, будем понимать задачу поиска множества Парето, состоящего из парето-оптимальных инвестиционных портфелей

$$P^s(E) = \{x \in X: P^s(x, E) = \emptyset\},$$

где

$$\begin{aligned} P^s(x, E) &= \{x' \in X: x' \succ_E x\}, \\ x' \succ_E x &\iff g(x', x, E) \geq \mathbf{0}^{(s)} \text{ \& } g(x', x, E) \neq \mathbf{0}^{(s)}, \\ g(x', x, E) &= (g_1(x', x, E_1), g_2(x', x, E_2), \dots, g_s(x', x, E_s))^T, \\ g_k(x', x, E_k) &= f_k(x', E_k) - f_k(x, E_k) \\ &= \max_{i \in N_m} \min_{i' \in N_m} (E_{i'k} x' - E_{ik} x), \quad k \in N_s, \\ \mathbf{0}^{(s)} &= (0, 0, \dots, 0)^T \in \mathbf{R}^s. \end{aligned}$$

Легко также видеть, что в частном случае при $m = 1$ наша задача $Z^s(E)$ превращается в векторную булеву задачу с линейными критериями (на максимум). Такой случай можно интерпретировать, как ситуацию, при которой состояние рынка не вызывает сомнений.

В пространстве портфелей $\mathbf{R}^n$ зададим линейную норму l_1 , а в пространстве состояний

рынка $\mathbf{R}^m$ и критериальном пространстве эффективности $\mathbf{R}^s$ — чебышевскую норму l_∞ :

$$\begin{aligned}\|E_{ik}\|_1 &= \sum_{j \in N_n} |e_{ijk}|, & i \in N_m, \quad k \in N_s, \\ \|E_k\|_\infty &= \max_{i \in N_m} \|E_{ik}\|_1 = \max_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} |e_{ijk}|, & k \in N_s, \\ \|E\|_\infty &= \max_{k \in N_s} \|E_k\|_\infty = \max_{k \in N_s} \max_{i \in N_m} \|E_{ik}\|_1 \\ &= \max_{k \in N_s} \max_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} |e_{ijk}|.\end{aligned}$$

Таким образом, для любых индексов $i \in N_m$ и $k \in N_s$ верны неравенства

$$\|E_{ik}\|_1 \leq \|E_k\|_\infty \leq \|E\|_\infty.$$

Кроме того, для всякого сечения $E_k \in \mathbf{R}^{m \times n}$ и любых портфелей $x, x' \in X$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned}E_{ik}x - E_{i'k}x' &\geq -\|E_{ik}\|_1 - \|E_{i'k}\|_1 \\ &\geq -2\|E_k\|_\infty, \quad i, i' \in N_m, \quad k \in N_s.\end{aligned}\tag{1}$$

Следуя [8, 9, 10], радиусом устойчивости задачи $Z^s(E)$, $s \geq 1$, назовем число

$$\rho = \rho(m, n, s) = \begin{cases} \sup \Xi & \text{если } \Xi \neq \emptyset, \\ 0 & \text{если } \Xi = \emptyset, \end{cases}$$

где

$$\Xi = \{\varepsilon > 0: P^s(E + E') \subseteq P^s(E) \text{ для всех } E' \in \Omega(\varepsilon)\}$$

и

$$\Omega(\varepsilon) = \{E' \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}: \|E'\|_\infty < \varepsilon\}$$

— множество возмущающих матриц, $P^s(E + E')$ — множество Парето возмущенной задачи $Z^s(E + E')$. Тем самым, радиус устойчивости задачи задает предельный уровень возмущений элементов матрицы E , не приводящих к появлению новых парето-оптимальных портфелей.

Ясно, что при выполнении равенства

$$P^s(E) = X$$

радиус устойчивости задачи $Z^s(E)$ равен бесконечности. Поэтому в дальнейшем этот случай будем исключать из рассмотрения, а задачу $Z^s(E)$, для которой множество $X \setminus P^s(E)$ непусто, будем называть нетривиальной.

3. Оценки радиуса устойчивости

Для нетривиальной задачи $Z^s(E)$ положим

$$\varphi = \varphi(m, n, s) = \min_{x \notin P^s(E)} \max_{x' \in P^s(x, E)} \min_{k \in N_s} \max_{i \in N_m} \min_{i' \in N_m} (E_{i'k}x' - E_{ik}x).$$

Поскольку для любого портфеля $x \notin P^s(E)$ множество $P^s(x, E)$ непусто, то формула

$$x' \underset{E}{>} x$$

верна для всех $x \notin P^s(E)$ и $x' \in P^s(x, E)$. Поэтому $\varphi \geq 0$.

Теорема 1. Для радиуса устойчивости $\rho(m, n, s)$ векторной нетривиальной инвестиционной задачи $Z^s(E)$, $s \geq 1$, справедливы оценки

$$\frac{1}{2}\varphi(m, n, s) \leq \rho(m, n, s) \leq n\varphi(m, n, s).$$

Доказательство. Для доказательства теоремы 1 сначала убедимся в справедливости неравенства $\rho \geq \varphi/2$. Это неравенство очевидно, если $\varphi = 0$. Пусть $\varphi > 0$. Согласно определению числа φ , для любого портфеля $x \notin P^s(E)$ существует такой портфель $x^0 \in P^s(x, E)$, что

$$\max_{i \in N_m} \min_{i' \in N_m} (E_{i'k}x^0 - E_{ik}x) \geq \varphi, \quad k \in N_s.$$

Отсюда, учитывая (1), для любой матрицы $E' \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}$ и всякого индекса $k \in N_s$ получаем

$$\begin{aligned} g_k(x^0, x, E_k + E'_k) &= \max_{i \in N_m} \min_{i' \in N_m} (E_{i'k}x^0 - E_{ik}x + E'_{i'k}x^0 - E'_{ik}x) \\ &\geq \max_{i \in N_m} \min_{i' \in N_m} (E_{i'k}x^0 - E_{ik}x) - 2\|E'_k\|_\infty \\ &\geq \varphi - 2\|E'_k\|_\infty. \end{aligned}$$

Поэтому, полагая $E' \in \Omega(\varphi/2)$, т.е., $\|E'_k\|_\infty < \varphi/2$, $k \in N_s$, получаем что

$$g_k(x^0, x, E_k + E'_k) > 0, \quad k \in N_s;$$

это означает, что $x^0 \underset{E+E'}{>} x$, т.е. $x \notin P^s(E + E')$. Резюмируя и учитывая, что $x \notin P^s(E)$, заключаем, что $P^s(E + E') \subseteq P^s(E)$ для всех $E' \in \Omega(\varphi/2)$. Следовательно, справедливо неравенство

$$\rho(m, n, s) \geq \varphi(m, n, s)/2.$$

Далее, докажем неравенство $\rho \leq n\varphi$. Согласно определению числа φ , существует такой портфель $x^* \notin P^s(E)$, что для любого портфеля $x \in P^s(x^*, E)$ найдется индекс $l = l(x) \in N_s$, удовлетворяющий условию

$$\max_{i \in N_m} \min_{i' \in N_m} (E_{i'l}x - E_{il}x^*) \leq \varphi. \quad (2)$$

Полагая $\varepsilon > n\varphi$, рассмотрим возмущающую матрицу $E^0 = [e_{ijk}^0] \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}$, элементы которой определим следующим образом:

$$e_{ijk}^0 = \begin{cases} \delta & \text{если } i \in N_m, x_j^* = 1, k \in N_s, \\ -\delta & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где

$$\varphi < \delta < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Тогда справедливы равенства

$$\|E^0\|_\infty = \|E_k^0\|_\infty = \|E_{ik}^0\|_1 = n\delta, \quad i \in N_m, \quad k \in N_s.$$

Поэтому $E^0 \in \Omega(\varepsilon)$. Кроме того, все строки E_{ik}^0 , $i \in N_m$, любого сечения E_k^0 , $k \in N_s$, одинаковы и состоят из компонент δ и $-\delta$. Обозначив такую строку через A , получаем, что

$$A(x - x^*) = -\delta\|x - x^*\|_1 \leq -\delta < -\varphi \leq 0. \quad (3)$$

Отсюда, учитывая (2) и строение возмущающей матрицы E^0 , выводим, что для любого портфеля $x \in P^s(x^*, E)$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} g_l(x, x^*, E_l + E_l^0) &= \min_{i \in N_m} (E_{il} + A)x - \min_{i \in N_m} (E_{il} + A)x^* \\ &= \max_{i \in N_m} \min_{i' \in N_m} (E_{i'l}x - E_{il}x^*) + A(x - x^*) < 0. \end{aligned}$$

В результате получаем, что для любого $x \in P^s(x^*, E)$

$$x \notin P^s(x^*, E + E^0). \quad (4)$$

Допустим теперь, что портфель $x \notin P^s(x^*, E)$. Тогда возможны лишь следующие два случая.

Случай 1: $g(x, x^*, E) = 0^{(s)}$. Тогда для любого $k \in N_s$ соотношения (3) влекут

$$\begin{aligned} g_k(x, x^*, E_k + E_k^0) &= \min_{i \in N_m} (E_{ik} + A)x - \min_{i \in N_m} (E_{ik} + A)x^* \\ &= g_k(x, x^*, E_k) + A(x - x^*) < 0. \end{aligned}$$

Case 2. Существует такой индекс $p \in N_s$, что $g_p(x, x^*, E_p) < 0$. Тогда, вновь используя (3), получаем, что

$$g_p(x, x^*, E_p + E_p^0) < 0.$$

Таким образом, $x \notin P^s(x^*, E + E^0)$, если $x \notin P^s(x^*, E)$. Этот факт вместе с (4) дает $P^s(x^*, E + E^0) = \emptyset$, т.е. x^* является парето-оптимальным портфелем возмущенной задачи $Z^s(E + E^0)$. Отсюда, так как $x^* \notin P^s(E)$, заключаем, что для любого $\varepsilon > n\varphi$ найдется такое $E^0 \in \Omega(\varepsilon)$, что $P^s(E + E^0) \not\subseteq P^s(E)$. Следовательно, справедливо неравенство

$$\rho(m, n, s) \leq n\varphi(m, n, s).$$

Теорема 1 доказана.

Следствие 1. Радиус устойчивости $\rho(m, n, s)$ равен нулю тогда и только тогда, когда $\varphi(m, n, s) = 0$.

4. Достижимость нижней оценки

Покажем, что нижняя оценка радиуса устойчивости задачи, указанная теоремой 1, является достижимой.

Теорема 2. При $m \geq 2$ и $n \geq 2$ существует такой класс векторных инвестиционных задач $Z^s(E)$, $s \geq 1$, что для радиуса устойчивости любой задачи этого класса справедлива формула

$$\rho(m, n, s) = \varphi(m, n, s)/2. \quad (5)$$

Доказательство. Для доказательства равенства $\rho = \varphi/2$ согласно теореме 1 достаточно выделить класс задач, для которых $\rho \leq \varphi/2$. Дальнейшее изложение и посвятим этому, считая, что $\varphi > 0$.

Будем рассматривать класс задач $Z^s(E)$ с условиями

$$X = \{x^0, x^*\}, \quad P^s(x^*, E) = \{x^0\}, \quad (6)$$

то есть

$$x^0 \underset{E}{>} x^*, \quad x^* \notin P^s(E).$$

Тогда существует такой индекс $l \in N_s$, что

$$g_l(x^0, x^*, E_l) = \varphi > 0. \quad (7)$$

Будем также считать, что

$$(E_{i(x^0)l} - E_{i(x^*)l})x^* > \varphi/2, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} i(x^0) &= \arg \min \{E_{il}x^0 : i \in N_m\}, \\ i(x^*) &= \arg \min \{E_{il}x^* : i \in N_m\}. \end{aligned}$$

Тогда очевидно, что $i(x^0) \neq i(x^*)$, поскольку $\varphi > 0$.

Далее будем предполагать, что существуют таких два индекса $p \neq q$ множества N_n , что $x_p^0 = x_q^* = 1$, $x_q^0 = x_p^* = 0$.

Для любого числа $\varepsilon > \varphi/2$ элементы возмущающей матрицы $E^0 = [e_{ijk}^0] \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}$ зададим по правилу

$$e_{ijk}^0 = \begin{cases} -\delta & \text{если } i = i(x^0), j = p, k = l, \\ \delta & \text{если } i \in N_m \setminus \{i(x^0)\}, j = q, k = l, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (9)$$

где

$$\frac{1}{2}\varphi < \delta < \min\{\varepsilon, (E_{i(x^0)l} - E_{i(x^*)l})x^*\}. \quad (10)$$

Отметим, что последние неравенства корректны благодаря (8). Согласно построенной возмущающей матрице E^0 , очевидны следующие равенства:

$$E_{i(x^0)l}^0 x^0 = -\delta, \quad (11)$$

$$E_{il}^0 x^0 = 0, \quad i \in N_m \setminus \{i(x^0)\}, \quad (12)$$

$$E_{il}^0 x^* = \delta, \quad i \in N_m \setminus \{i(x^0)\}, \quad (13)$$

$$E_{i(x^0)l}^0 x^* = 0, \quad (14)$$

$$\|E_{il}^0\|_1 = \|E_l^0\|_\infty = \|E^0\|_\infty = \delta, \quad i \in N_m, \quad E^0 \in \Omega(\varepsilon)$$

Далее докажем, что инвестиционный портфель $x^* \in P^s(E + E^0)$. Для этого в силу (6) достаточно убедиться, что $x^0 \notin P^s(x^*, E + E^0)$. Согласно (11) и (12) имеем

$$\begin{aligned} f_l(x^0, E_l + E_l^*) &= \min\{(E_{i(x^0)l} + E_{i(x^0)l}^0)x^0, \min_{i \neq i(x^0)} (E_{il} + E_{il}^0)x^i\} \\ &= \min\{f_l(x^0, E_l) - \delta, \min_{i \neq i(x^0)} E_{il}x^0\} \\ &= f_l(x^0, E_l) - \delta. \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь докажем равенство

$$f_l(x^*, E_l + E_l^*) = f_l(x^*, E_l) + \delta. \quad (16)$$

Из равенств (13) и неравенства $i(x^0) \neq i(x^*)$ следует, что

$$\begin{aligned} f_l(x^*, E_l + E_l^*) &= \min\{(E_{i(x^*)l} + E_{i(x^*)l}^0)x^*, \min_{i \neq i(x^*)} (E_{il} + E_{il}^0)x^i\} \\ &= \min\{f_l(x^*, E_l) + \delta, \min_{i \neq i(x^*)} (E_{il} + E_{il}^0)x^i\}. \end{aligned}$$

Поэтому, с учетом очевидных ввиду (13) соотношений

$$f_l(x^*, E_l) + \delta = \min_{i \in N_m} E_{il}x^* + \delta \leq (E_{il} + E_{il}^0)x^*, \quad i \in N_m \setminus \{i(x^0)\},$$

для доказательства равенства (16) остается убедиться, что

$$f_l(x^*, E_l) + \delta \leq (E_{i(x^0)l} + E_{i(x^0)l}^0)x^*.$$

Для этого, воспользовавшись (10) и (14), выводим

$$f_l(x^*, E_l) + \delta - (E_{i(x^0)l} + E_{i(x^0)l}^0)x^* = \delta - (E_{i(x^0)l} - E_{i(x^*)l})x^* < 0.$$

Итак, равенство (16) доказано. Наконец, последовательно применяя (15), (16), (7) и (10), получаем, что

$$\begin{aligned} g_l(x^0, x^*, E_l + E_l^0) &= f_l(x^0, E_l + E_l^0) - f_l(x^*, E_l + E_l^0) \\ &= g_l(x^0, x^*, E_l) - 2\delta = \varphi - 2\delta < 0, \end{aligned}$$

т.е. $x^0 \notin P^s(x^*, E + E^0)$. Это и доказывает, что x^* является парето-оптимальным инвестиционным портфелем возмущенной задачи $Z^s(E + E^0)$. Отсюда, поскольку $x^* \notin P^s(E)$, заключаем, что для любого $\varepsilon > \varphi/2$ найдется такое $E^0 \in \Omega(\varepsilon)$, что $P^s(E + E^0) \not\subseteq P^s(E)$. Поэтому справедливо неравенство

$$\rho(m, n, s) \leq \varphi(m, n, s)/2.$$

Следовательно, в силу теоремы 1 формула (5) верна. Теорема 2 доказана.

Приведем числовой пример, иллюстрирующий теорему 2.

Пример 1. Пусть $m = 3, n = 3, s = 1$; $X = \{x^0, x^*\}$, $x^0 = (0, 1, 1)^T$, $x^* = (1, 1, 0)^T$;

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

— матрица со строками E_i , $i \in N_3$. Тогда

$$f(x^0, E) = 1, \quad f(x^*, E) = -3, \quad i(x^0) = 1, \quad i(x^*) = 2.$$

Отсюда следует, что $x^0 \in P^1(E)$, $x^* \notin P^1(E)$. Поэтому

$$\varphi = g(x^0, x^*, E) = 4.$$

Покажем, что радиус устойчивости

$$\rho(3, 3, 1) \leq \varphi/2 = 2.$$

Легко видеть, что неравенство (8) принимает вид

$$(E_1 - E_2)x^* = 3 > 2 = \varphi/2,$$

а возмущающая матрица E^0 со строками E_i^0 , $i \in N_3$, построенная по правилу (9), представляется в виде

$$E^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta \\ \delta & 0 & 0 \\ \delta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2 < \delta < 3.$$

Поэтому, учитывая равенство

$$E + E^0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 - \delta \\ -3 + \delta & 0 & 4 \\ 1 + \delta & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

получаем, что

$$\begin{aligned} f(x^0, E + E^0) &= \min_{i \in N_3} (E_i + E_i^0)x^0 \\ &= \min\{1 - \delta, 4, 1\} = 1 - \delta, \\ f(x^*, E + E^0) &= \min_{i \in N_3} (E_i + E_i^0)x^* \\ &= \min\{0, -3 + \delta, \delta\} = -3 + \delta. \end{aligned}$$

Отсюда, на основании неравенств $2 < \delta < 3$, заключаем, что

$$g(x^0, x^*, E + E^0) = 4 - 2\delta < 0,$$

то есть $x^* \in P^1(E + E^0)$. Это включение вместе с соотношениями

$$\|E^0\|_\infty = \delta > 2,$$

$x^* \notin P^1(E)$ дает

$$\rho = \rho(3, 3, 1) \leq 2.$$

Следовательно, учитывая теорему 1, заключаем, что

$$\rho(3, 3, 1) = \varphi/2 = 2.$$

5. Достижимость верхней оценки

Покажем, что верхняя оценка $n\varphi(m, n, s)$ радиуса устойчивости задачи $Z^s(E)$ достигается при $m = s = 1$.

Теорема 3. При $m = s = 1$ существует такой класс скалярных инвестиционных задач $Z^1(E)$, $E \in \mathbf{R}^{1 \times n \times 1}$, что для радиуса устойчивости любой задачи этого класса справедлива формула

$$\rho(1, n, 1) = n\varphi(1, n, 1).$$

Доказательство. В силу теоремы 1, для доказательства равенства

$$\rho(1, n, 1) = n\varphi(1, n, 1)$$

достаточно указать класс задач с условием

$$\rho(1, n, 1) \geq n\varphi(1, n, 1),$$

где $\varphi(1, n, 1) > 0$.

Покажем, что такой класс существует при $X = \{x^*, x^1, x^2, \dots, x^n\} \subset \mathbf{E}^n$, $n \geq 2$, где $x^* = \mathbf{0}^{(n)}$, $x^j = e^j$, $j \in N_n$. Здесь e^j — единичный вектор-столбец пространства $\mathbf{R}^n$, иными словами, e^j есть j -й столбец единичной матрицы размера $n \times n$. Поскольку $m = s = 1$, положим $E = (a, a, \dots, a) \in \mathbf{R}^n$, где $a > 0$. Поэтому $f(x^*, E) = 0$, $f(x^j, E) = a$, $j \in N_n$, то есть $x^* \notin P^1(E)$, $x^j \in P^1(E) = P^1(x^*, E)$, $j \in N_n$. Отсюда, согласно определению числа $\varphi(1, n, 1)$, справедливо равенство

$$\varphi = \varphi(1, n, 1) = a.$$

Пусть теперь $E' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ — произвольная возмущающая вектор-строка из множества строк $\Omega(na)$, то есть

$$\|E'\|_1 = \sum_{j \in N_n} |e'_j| < na.$$

Методом от противного легко доказать, что существует хотя бы один такой индекс p , что $|e'_p| < a$. Поэтому

$$g(x^p, x^*, E + E') = (E + E')(x^p - x^*) = a + e'_p > 0.$$

Отсюда заключаем, что при любой возмущающей строке $E' \in \Omega(n\varphi)$ портфель x^* не принадлежит $P^1(E + E')$. Следовательно, так как $x^* \notin P^1(E)$, получаем, что

$$\rho(1, n, 1) \geq n\varphi(1, n, 1).$$

Теорема 3 доказана.

6. Условия устойчивости задачи

Векторную инвестиционную задачу $Z^s(E)$, $s \geq 1$, назовем устойчивой, если ее радиус устойчивости больше нуля. Введем в рассмотрение множество Слейтера (см. [11])

$$Sl^s(E) = \{x \in X : Sl^s(x, E) = \emptyset\},$$

где

$$Sl^s(x, E) = \{x' \in X: g_k(x', x, E_k) > 0 \text{ для всех } k \in N_s\}.$$

Очевидно, что $P^s(E) \subseteq Sl^s(E)$ при любой матрице $E \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}$.

Теорема 4. Для векторной нетривиальной инвестиционной задачи $Z^s(E)$, $s \geq 1$, следующие утверждения эквивалентны:

(i) задача $Z^s(E)$ устойчива,

(ii) $P^s(E) = Sl^s(E)$,

(iii) $\varphi(m, n, s) > 0$.

Доказательство. Вначале докажем, что (i) $\Rightarrow$ (ii). Предположим, что задача $Z^s(E)$ устойчива, но $P^s(E) \neq Sl^s(E)$. Тогда существует инвестиционный портфель $x^* \in Sl^s(E) \setminus P^s(E)$. Поэтому $Sl^s(x^*, E) = \emptyset$ и $P^s(x^*, E) \neq \emptyset$. Это означает, что найдется такое $x^* \notin P^s(E)$, что для любого $x \in P^s(x^*, E)$ существует такой индекс $l \in N_s$, что $g_l(x, x^*, E_l) = 0$. Следовательно,

$$\varphi(m, n, s) = 0,$$

и, согласно следствию 1,

$$\rho(m, n, s) = 0,$$

что противоречит устойчивости задачи $Z^s(E)$.

Докажем, что (ii) $\Rightarrow$ (iii). Если $P^s(E) = Sl^s(E)$, то для любого портфеля $x \notin P^s(E)$ множество $Sl^s(x, E)$ непусто. Поэтому существует такой портфель $x^0 \in X$, что верны неравенства $g_k(x^0, x, E_k) > 0$, $k \in N_s$, иными словами, $x^0 \in P^s(x, E)$. Таким образом, для любого $x \notin P^s(E)$ найдется такое $x^0 \in P^s(x, E)$, что для любого индекса $k \in N_s$ справедливо неравенство

$$g_k(x^0, x, E_k) > 0.$$

Следовательно,

$$\varphi(m, n, s) > 0.$$

Импликация (iii) $\Rightarrow$ (i) очевидна в силу теоремы 1.

Теорема 4 доказана.

Поскольку $P^1(E) = Sl^1(E)$, то из теоремы 4 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. Скалярная инвестиционная задача $Z^1(E)$ устойчива при любой матрице $E \in \mathbf{R}^{m \times n}$.

7. Случай линейных критериев ($m = 1$)

При $m = 1$ наша векторная инвестиционная задача превращается в векторную задачу линейного булева программирования:

$$f_k(x, E_k) = E_k x \rightarrow \max_{x \in X}, \quad k \in N_s, \quad (17)$$

где $E_k \in \mathbf{R}^{1 \times n}$, $k \in N_s$, — k -я строка матрицы $E = [e_{1jk}] \in \mathbf{R}^{1 \times n \times s}$, $X \subseteq \mathbf{E}^n$, при этом, как и ранее, в критериальном пространстве $\mathbf{R}^s$ задана норма l_∞ , а в пространстве решений $\mathbf{R}^n$ — норма l_1 .

Теорема 5. Для радиуса устойчивости $\rho(1, n, s)$, $s \geq 1$, векторной нетривиальной задачи линейного булева программирования (17) справедливы достижимые оценки

$$\varphi(1, n, s) \leq \rho(1, n, s) \leq n\varphi(1, n, s). \quad (18)$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что справедливость и достижимость верхней оценки $n\varphi(1, n, s)$ следуют из теорем 1 и 3.

Далее покажем, что

$$\rho(1, n, s) \geq \varphi(1, n, s).$$

Как обычно, будем полагать, что

$$\varphi = \varphi(1, n, s) > 0.$$

Исходя из определения φ , легко убеждаемся, что для любого $x \notin P^s(E)$ найдется такое $x^0 \in P^s(x, E)$, что для любого индекса $k \in N_s$ выполняется соотношение

$$E_k(x^0 - x) \geq \varphi.$$

Теперь, полагая $E' \in \Omega(\varphi)$, откуда следует, что $\|E'_k\|_1 < \varphi$, $k \in N_s$, получаем, что

$$(E_k + E'_k)(x^0 - x) \geq E_k(x^0 - x) - \|E'_k\|_1 \geq \varphi - \|E'_k\|_1 > 0, \quad k \in N_s.$$

Это значит, что $x \notin P^s(E + E')$. Итак, для любой возмущающей матрицы $E' \in \Omega(\varphi)$ верно включение $P^s(E + E') \subseteq P^s(E)$. Следовательно, справедлива нижняя оценка радиуса устойчивости (см. (18)).

Наконец, докажем достижимость нижней оценки. Для этого построим класс задач, для которых

$$\rho(1, n, s) \leq \varphi = \varphi(1, n, s)$$

при $\varphi > 0$.

Пусть

$$X = \{x^0, x^*\}, \quad P^s(x^*, E) = \{x^0\},$$

$E \in \mathbf{R}^{1 \times n \times s}$, и пусть существует такой индекс $p \in N_n$, что $x_p^0 = 1$, $x_p^* = 0$. Тогда, так как $x^* \notin P^s(E)$, в силу определения φ найдется такой индекс $l \in N_s$, что

$$E_l(x^0 - x^*) = \varphi > 0. \quad (19)$$

Полагая $\varphi < \delta < \varepsilon$, построим возмущающую матрицу $E^0 = [e_{1jk}^0] \in \mathbf{R}^{1 \times n \times s}$, элементы которой зададим по правилу

$$e_{1jk}^0 = \begin{cases} -\delta & \text{если } j = p, k = l, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (20)$$

Тогда получаем, что

$$\begin{aligned} \|E^0\|_\infty &= \|E_l^0\|_1 = \delta, \\ E_l^0(x^0 - x^*) &= -\delta. \end{aligned}$$

Отсюда и из (19) получаем, что

$$\begin{aligned} g_l(x^0, x^*, E_l + E_l^0) &= (E_l + E_l^0)(x^0 - x^*) \\ &= \varphi - \delta < 0. \end{aligned}$$

Поэтому $x^0 \notin P^s(x^*, E + E^0)$, то есть $x^* \in P^s(E + E^0)$, а поскольку $x^* \notin P^s(E)$, для произвольного $\varepsilon > \varphi$ найдется такое $E^0 \in \Omega(\varepsilon)$, что $P^s(E + E^0) \not\subseteq P^s(E)$, откуда следует оценка

$$\rho(1, n, s) \leq \varphi(1, n, s).$$

Следовательно, согласно доказанному выше соотношению (18), нижняя оценка $\varphi(1, n, s)$ достижима. Теорема 5 доказана.

Приведем числовой пример, свидетельствующий о достижимости нижней оценки радиуса устойчивости, указанной теоремой 5.

Пример 2. Пусть $m = 1, n = 3, s = 2$; $X = \{x^0, x^*\}$, $x^0 = (0, 1, 1)^T$, $x^* = (1, 1, 0)^T$;

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$p = 3, \quad f(x^0, E) = (1, 1), \quad f(x^*, E) = (0, 0),$$

иными словами,

$$\{x^0\} = P^2(x^*, E),$$

$x^* \notin P^2(E)$. Отсюда (см. (19))

$$\varphi = \varphi(1, 3, 2) = E_1(x^0 - x^*) = 1,$$

то есть $l = 1$. Поэтому элементы возмущающей матрицы E^0 , вычисленные по формуле (20), имеют вид

$$\begin{aligned} e_{1pl}^0 &= e_{131}^0 = -\delta, \\ e_{1jk} &= 0, \quad (j, k) \neq (3, 1), \end{aligned}$$

где

$$1 = \varphi < \delta < \varepsilon.$$

В результате, поскольку $E_1^0 = (0, 0, -\delta)$, получаем, что

$$g_1(x^0, x^*, E_1 + E_1^0) = (E_1 + E_1^0)(x^0 - x^*) = 1 - \delta < 0.$$

Это означает, что $x^0 \notin P^2(x^*, E + E^0)$, а поэтому $x^* \in P^2(E + E^0)$. Последнее включение вместе с соотношениями

$$\|E^0\|_\infty = \delta > \varphi$$

и $x^* \notin P^2(E)$ дает

$$\rho(1, 3, 2) \leq \varphi(1, 3, 2) = 1.$$

Следовательно, согласно теореме 5,

$$\rho(1, 3, 2) = 1.$$

В заключение отметим, что ранее в [12] были получены нижняя и верхняя оценки радиуса устойчивости векторной (s -критериальной) задачи линейного булева программирования (17) при условии, что

$$X = \{x \in \mathbf{E}^n : Ax \leq b\},$$

а возмущениям подвергались все параметры задачи, то есть не только элементы матрицы E , но и элементы матрицы $A \in \mathbf{R}^{q \times n}$ и вектора $b \in \mathbf{R}^q$, при этом во всех пространствах варьирующих параметров $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^s$ и $\mathbf{R}^q$ задавалась одна и та же чебышевская норма l_∞ .

Список литературы

1. Емеличев В. А., Коротков В. В., О радиусе устойчивости эффективного решения многокритериальной задачи портфельной оптимизации с критериями Сэвиджа. *Дискретная математика* (2011) **23**, №4, 33–38.
2. Emelichev V. A., Korotkov V. V., Post-optimal analysis in a multiple criteria problem of investment risk management based on Markowitz's portfolio theory. In: *Abstr. 21st MCDM Intern. Conf.* Univ. Jyväskylä, 2011, pp. 50–51.
3. Markowitz H. M., *Portfolio selection: Efficient diversification of investments*. Wiley, New York, 1959.
4. Царев В. В., *Оценка экономической эффективности инвестиций*. Питер, Санкт-Петербург, 2004.
5. Виленский П. Л., Лившиц В. Н., Смоляк С. А., *Оценка эффективности инвестиционных проектов: теория и практика*. Дело, Москва, 2008.
6. Bronshtein E. M., Kachkaeva M. M., Tulupova E. V., Control of investment portfolio based on complex quantile risk measures. *J. Computer and Systems Sci. Intern.* (2011) **50**, 174–180.
7. Wald A., *Statistical decision functions*. Wiley, New York, 1950.
8. Емеличев В. А., Кричко В. Н., Формула радиуса устойчивости векторной l_∞ -экстремальной траекторной задачи. *Дискретная математика* (2004) **16**, №1, 14–20.

9. Гуревский Е. Е., Емеличев В. А., Об устойчивости векторной булевой задачи минимизации абсолютных уклонений от нуля линейных функций. *Известия вузов. Математика* (2006) №12, 27–32.
10. Емеличев В. А., Кузьмин К. Г., О радиусе устойчивости векторной задачи целочисленного линейного программирования в случае регулярности нормы в критериальном пространстве. *Кибернетика и системный анализ* (2010) №1, 82–89.
11. Slater M., *Lagrange multipliers revisited*, Cowles Foundation Discussion Paper 80. Cowles Foundation for Research in Economics at Yale University, 1959.
12. Emelichev V., Podkopaev D., Quantitative stability analysis for vector problems of 0–1 programming. *Discrete Optimization* (2010) 7, 48–63.

Статья поступила 25.01.2012.