Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Саргсян, О числе k -сумм в группах простого порядка,
Дискрет. матем., 2012, том 24, выпуск 3, 25–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1194>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 17:12:41

О числе k -сумм в группах простого порядка

© 2012 г. В. Г. Саргсян

Подмножество A элементов группы G называется k -суммой, если существует подмножество $B \subseteq G$ такое, что $A = kB$, где

$$kB = \{x_1 + \dots + x_k : x_1, \dots, x_k \in B\}.$$

Получены верхняя и нижняя оценки числа k -сумм в группах простого порядка.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 10-01-00768-а.

1. Введение

Пусть Z_p — группа вычетов по простому модулю p и $k \geq 2$ — натуральное число. Для всякого $B \subseteq Z_p$ и любого натурального числа k положим

$$kB = \{x_1 + \dots + x_k \pmod{p} : x_1, \dots, x_k \in B\}.$$

Подмножество $A \subseteq Z_p$ называется k -суммой, если существует подмножество $B \subseteq Z_p$ такое, что $A = kB$. Семейство всех k -сумм в группе Z_p обозначим через $SS_k(Z_p)$.

В 2004 г. Б. Грин и И. Ружа [1] доказали, что

$$p^2 2^{p/3} \ll |SS_2(Z_p)| \leq 2^{p/3 + \theta(p)},$$

где $\theta(p)/p \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$, причем

$$\theta(p) \ll p(\log \log p)^{2/3}(\log p)^{-1/9}$$

(здесь и далее все логарифмы берутся по основанию два).

Целью настоящей работы является получение оценки числа $|SS_k(Z_p)|$.

Теорема 1. Пусть p — простое число, а $k \geq 2$ — натуральное число. Тогда существует положительная константа C_k такая, что выполняются неравенства

$$C_k 2^{p/(2k-1)} \leq |SS_k(Z_p)| \leq 2^{p/(k+1) + (k-2) + o(p)}. \quad (1)$$

2. Определения и вспомогательные утверждения

Пусть R — множество действительных чисел, $f_i: Z_p \rightarrow R$, $i = 1, \dots, k$, и $x \in Z_p$, тогда положим

$$(f_1 * \dots * f_k)(x) = \sum_{x_1 \in Z_p} \dots \sum_{x_{k-1} \in Z_p} f_1(x_1) \cdots f_{k-1}(x_{k-1}) f_k(x - x_1 - \dots - x_{k-1}).$$

Пусть

$$\hat{f}(x) = \sum_{y \in \mathbf{Z}_p} f(y) e^{2\pi i xy/p},$$

и для всякого $A \subseteq \mathbf{Z}_p$ и любого целого числа d положим

$$d \star A = \{da \pmod{p} : a \in A\}.$$

Функция $\hat{f}(x)$ называется преобразованием Фурье функции f , а $d \star A$ назовем растяжением множества A . Заметим, что для любого $x \in \mathbf{Z}_p$

$$(\widehat{f_1 * \dots * f_k})(x) = \hat{f}_1(x) \cdots \hat{f}_k(x). \quad (2)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (\widehat{f_1 * \dots * f_k})(x) &= \sum_{y \in \mathbf{Z}_p} (f_1 * \dots * f_k)(y) e^{2\pi i yx/p} \\ &= \sum_{y_1 \in \mathbf{Z}_p} \sum_{y_2 \in \mathbf{Z}_p} \dots \sum_{y_{k-1} \in \mathbf{Z}_p} f_1(y_1) \cdots f_{k-1}(y_{k-1}) \\ &\quad \times f_k(y - y_1 - \dots - y_{k-1}) e^{2\pi i y_1 x/p} \dots e^{2\pi i y_{k-1} x/p} \\ &\quad \times e^{2\pi i (y - y_1 - \dots - y_{k-1}) x/p} \\ &= \sum_{y_1 \in \mathbf{Z}_p} f_1(y_1) e^{2\pi i y_1 x/p} \dots \sum_{y_{k-1} \in \mathbf{Z}_p} f_{k-1}(y_{k-1}) \\ &\quad \times e^{2\pi i y_{k-1} x/p} \sum_{y \in \mathbf{Z}_p} f_k(y - y_1 - \dots - y_{k-1}) \\ &\quad \times e^{2\pi i (y - y_1 - \dots - y_{k-1}) x/p} \\ &= \hat{f}_1(x) \cdots \hat{f}_k(x). \end{aligned}$$

Пусть $A_1, \dots, A_k$ — непустые подмножества группы $\mathbf{Z}_p$, а характеристические функции множеств $A_1, \dots, A_k$ обозначим, соответственно, через $\chi_{A_1}(x), \dots, \chi_{A_k}(x)$. Тогда $(\chi_{A_1} * \dots * \chi_{A_k})(x)$ — это количество наборов $(x_1, \dots, x_k) \in A_1 \times \dots \times A_k$ таких, что $x \equiv x_1 + \dots + x_k \pmod{p}$. Положим

$$\begin{aligned} A_1 + \dots + A_k &= \{x_1 + \dots + x_k \pmod{p} : x_1 \in A_1, \dots, x_k \in A_k\}, \\ S_{h,k}(A_1, \dots, A_k) &= \{x \in \mathbf{Z}_p : (\chi_{A_1} * \dots * \chi_{A_k})(x) \geq h\}, \quad h > 0. \end{aligned}$$

Теорема 2 ([2]). Пусть $A_1, \dots, A_k$ — непустые подмножества группы $\mathbf{Z}_p$. Тогда

$$|A_1 + \dots + A_k| \geq \min(p, |A_1| + \dots + |A_k| - (k-1)).$$

Теорема 3 ([3]). Пусть A_1, A_2 — непустые подмножества группы $\mathbf{Z}_p$. Тогда

$$|S_{1,2}(A_1, A_2)| + \dots + |S_{t,2}(A_1, A_2)| \geq t \min(p, |A_1| + |A_2| - t),$$

где $t \leq \min(|A_1|, |A_2|)$.

Из теорем 2, 3 вытекают следующие два утверждения.

Лемма 1. Пусть $A_1, \dots, A_k$ — непустые подмножества группы $\mathbf{Z}_p$. Тогда

$$|S_{1,k}(A_1, \dots, A_k)| + \dots + |S_{t,k}(A_1, \dots, A_k)| \geq t \min(p, |A_1| + \dots + |A_k| - t - k + 2),$$

где $t \leq \min(|A_1|, \dots, |A_k|)$.

Доказательство. Предположим, что

$$|A_1| = \min(|A_1|, \dots, |A_k|).$$

В силу теоремы 3,

$$|S_{1,2}(A_1, (A_2 + \dots + A_k))| + \dots + |S_{t,2}(A_1, (A_2 + \dots + A_k))| \geq t \min(p, |A_1| + |A_2 + \dots + A_k| - t), \quad (3)$$

где $t \leq |A_1|$.

С другой стороны, в силу теоремы 2

$$|A_2 + \dots + A_k| \geq \min(p, |A_2| + \dots + |A_k| - (k - 2)). \quad (4)$$

Подставив (4) в (3), получим, что

$$\begin{aligned} & |S_{1,k}(A_1, \dots, A_k)| + \dots + |S_{t,k}(A_1, \dots, A_k)| \\ & \geq |S_{1,2}(A_1, (A_2 + \dots + A_k))| + \dots + |S_{t,2}(A_1, (A_2 + \dots + A_k))| \\ & \geq t \min(p, |A_1| + \dots + |A_k| - t - k + 2). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $A_1, \dots, A_k$ — непустые подмножества группы $\mathbf{Z}_p$ и

$$h \leq \min(|A_1|, \dots, |A_k|).$$

Тогда

$$|S_{h,k}(A_1, \dots, A_k)| \geq \min(p, |A_1| + \dots + |A_k| - k + 2) - 2(hp)^{1/2}.$$

Доказательство. Заметим, что при $i \leq j$ выполняется

$$|S_{i,k}(A_1, \dots, A_k)| \geq |S_{j,k}(A_1, \dots, A_k)|.$$

Тогда, если взять

$$h \leq t \leq \min(|A_1|, \dots, |A_k|),$$

то в силу леммы 1 получим, что

$$\begin{aligned} & t \min(p, |A_1| + \dots + |A_k| - t - k + 2) \\ & \leq |S_{1,k}(A_1, \dots, A_k)| + \dots + |S_{t,k}(A_1, \dots, A_k)| \\ & \leq hp + t |S_{h,k}(A_1, \dots, A_k)|. \end{aligned}$$

Полагая $t = (hp)^{1/2}$, получим, что

$$\begin{aligned} & \min(p, |A_1| + \dots + |A_k| - k + 2) - 2(hp)^{1/2} \\ & \leq \min(p, |A_1| + \dots + |A_k| - k - (hp)^{1/2} + 2) - (hp)^{1/2} \\ & \leq |S_{h,k}(A_1, \dots, A_k)|. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть

$$\mathbf{T}_{k,s}(\mathbf{Z}_p) = \{A \subset \mathbf{Z}_p : |A| \leq p/(k+1)s\}.$$

Тогда существует s такое, что

$$|\mathbf{T}_{k,s}(\mathbf{Z}_p)| \leq 2^{p/(k+1)}. \quad (5)$$

Доказательство. Пусть n, m — целые числа, $1 \leq m \leq n$. Тогда (см. лемму 6.8 в [4])

$$\sum_{0 \leq i \leq m} \binom{n}{i} \leq \left(\frac{en}{m}\right)^m. \quad (6)$$

Выберем s , удовлетворяющее условию

$$es(k+1) \leq 2^s. \quad (7)$$

Тогда из (6) получаем, так как $n = p$ и $m = p/(k+1)s$, что

$$\begin{aligned} |\mathbf{T}_{k,s}(\mathbf{Z}_p)| &= \sum_{0 \leq i \leq p/(k+1)s} \binom{p}{i} \leq (es(k+1))^{p/(k+1)s} \\ &\leq (2^s)^{p/(k+1)s} = 2^{p/(k+1)}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть L — натуральное число. Для каждого $y \in \{0, \dots, p-1\}$ определим разбиение $\mathbf{R}_{y,L}$ группы $\mathbf{Z}_p$ на интервалы вида

$$J_i^y = \{(iL + 1 + y) \pmod{p}, \dots, ((i+1)L + y) \pmod{p}\},$$

где $0 \leq i \leq \lfloor p/L \rfloor - 1$. Все интервалы J_i^y из $\mathbf{R}_{y,L}$ имеют длину L , а множество

$$J_y = \mathbf{Z}_p \setminus \bigcup_i J_i^y$$

имеет мощность $p - L \lfloor p/L \rfloor < L$. Множество $A \subseteq \mathbf{Z}_p$ называется L -гранулированным (см. [1]), если для некоторого целого числа $d < p$ и некоторого разбиения $\mathbf{R}_{y,L}$ растяжение $d \star A$ является объединением нескольких интервалов J_i^y разбиения $\mathbf{R}_{y,L}$, отличных от J_y . Обозначим множество L -гранулированных подмножеств группы $\mathbf{Z}_p$ через $\mathbf{G}_L(\mathbf{Z}_p)$.

Лемма 4. Справедливо неравенство

$$|\mathbf{G}_L(\mathbf{Z}_p)| \leq p2^{p/L}. \quad (8)$$

Доказательство. Число подмножеств гранул (интервалов) разбиения $\mathbf{R}_{y,L}$ группы $\mathbf{Z}_p$ обозначим через $g(\mathbf{R}_{y,L})$, а число различных разбиений $\mathbf{R}_{y,L}$ — через $r(L)$. Очевидно, что

$$|\mathbf{G}_L(\mathbf{Z}_p)| \leq g(\mathbf{R}_{y,L})r(L). \quad (9)$$

Заметим, что число гранул разбиения $\mathbf{R}_{y,L}$ группы $\mathbf{Z}_p$ равно $\lfloor p/L \rfloor$, а количество различных разбиений $\mathbf{R}_{y,L}$ группы $\mathbf{Z}_p$ равно p . Отсюда и из неравенства (9) вытекает справедливость неравенства (8). Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть $A \subseteq \mathbf{Z}_p$ и $|A| = \alpha p$, и пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — положительные действительные числа, $k \geq 2$ и L — натуральные числа, и p — простое число, такое, что имеет место неравенство

$$p > (\sqrt{8k}L)^{4^{2k}\alpha^{2(k-1)}\varepsilon_1^{-2k}\varepsilon_2^{-2}\varepsilon_3^{-1}}. \quad (10)$$

Тогда существует подмножество $A' \subseteq \mathbf{Z}_p$ со следующими свойствами:

- (i) A' является L -гранулированным;
- (ii) $|A \setminus A'| \leq \varepsilon_1 p$;
- (iii) множество kA содержит все элементы $x \in \mathbf{Z}_p$, для которых

$$\underbrace{(\chi_{A'} * \dots * \chi_{A'})}_k(x) \geq \varepsilon_2 p^{k-1},$$

за возможным исключением не более $\varepsilon_3 p$ элементов.

Доказательство. Пусть $h \in \{0, \dots, p-1\}$ и $\mathbf{R}_{h,L}$ — разбиение группы $\mathbf{Z}_p$.

Докажем часть (i). Множество A' определим как объединение интервалов J_i^h разбиения $\mathbf{R}_{h,L}$ таких, что

$$|A \cap J_i^h| \geq \frac{\varepsilon_1 L}{2}.$$

По определению очевидно, что A' L -гранулировано.

Докажем часть (ii). Пусть $x \in A \setminus A'$, тогда либо $x \in J_h$, либо $x \in A \cap J_i^h$, $i = 0, \dots, \lfloor p/L \rfloor - 1$, и $|A \cap J_i^h| \leq \varepsilon_1 L/2$. В первом случае имеем $|J_h| < L$, а из неравенства (10) следует, что $L \leq \varepsilon_1 p/2$. Итак, получаем

$$|A \setminus A'| \leq \frac{\varepsilon_1 L}{2} \frac{p}{L} + L \leq \varepsilon_1 p.$$

Докажем часть (iii). Пусть $x \in \mathbf{Z}_p$ и $\hat{\chi}_A(x)$ — преобразование Фурье характеристической функции χ_A множества A . Тогда

$$\hat{\chi}_A(x) = \sum_{y \in \mathbf{Z}_p} \chi_A(y) e^{2\pi i y x / p} = \sum_{y \in A} e^{2\pi i y x / p}.$$

Положим

$$\delta = 4^{-k} \varepsilon_1^k \varepsilon_2 \varepsilon_3^{1/2} \alpha^{-k+3/2},$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и ε_3 взяты из неравенства (10). Положим

$$\mathbf{D} = \{x \neq 0: |\hat{\chi}_A(x)| \geq \delta p\}.$$

Определим функцию $f(x)$ следующим образом:

$$f(x) = \frac{1}{2L-1} \sum_{j=-(L-1)}^{L-1} e^{2\pi i j q x / p}.$$

Для доказательства части (iii) необходимо показать, что существует $q \in \mathbf{Z}_p \setminus \{0\}$ такое, что для всех $x \in \mathbf{Z}_p$ выполняется неравенство

$$|\hat{\chi}_A(x)| |1 - f^k(x)| \leq \delta p. \quad (11)$$

Неравенство (11), очевидно, имеет место для $x = 0$, так как $f(0) = 1$, а также в случае, когда $|\hat{\chi}_A(x)| \leq \delta p$, поскольку $f(x) \in [-1, 1]$. Итак, осталось доказать существование такого q , что неравенство (11) выполнено для всех $x \in \mathbf{D}$. Оценим величину $1 - f(x)$. Обозначим через $\langle x \rangle$ расстояние от x до ближайшего целого числа. Воспользуемся тем, что

$$1 - \cos(2\pi x) \leq 2\pi^2 \langle x \rangle^2.$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} 1 - f(x) &= \frac{2}{2L-1} \sum_{j=1}^{L-1} \left(1 - \cos \frac{2\pi j q x}{p} \right) \leq \frac{4\pi^2}{2L-1} \sum_{j=1}^{L-1} \left\langle \frac{j q x}{p} \right\rangle^2 \\ &\leq \frac{4\pi^2}{2L-1} \left\langle \frac{q x}{p} \right\rangle^2 \sum_{j=1}^{L-1} j^2 \leq \frac{2\pi^2 L^2}{3} \left\langle \frac{q x}{p} \right\rangle^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Воспользуемся тем, что при условии $|x| \leq 1$

$$1 - x^k = (1 - x)(1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1}) \leq k(1 - x). \quad (13)$$

Из (12) и (13) следует, что

$$|\hat{\chi}_A(x)| |1 - f^k(x)| \leq k |\hat{\chi}_A(x)| |1 - f(x)| \leq 8kL^2 \langle qx/p \rangle^2 |\hat{\chi}_A(x)|.$$

Заметим, что при выполнении неравенства

$$\left\langle \frac{qx}{p} \right\rangle \leq \frac{1}{\sqrt{8kL}} \left(\frac{\delta p}{|\hat{\chi}_A(x)|} \right)^{1/2} \quad (14)$$

для некоторого $q \in \mathbf{Z}_p \setminus \{0\}$ и для всех $x \in \mathbf{D}$ неравенство (11) также выполняется.

Докажем, что такое q действительно существует. По определению,

$$\langle qx/p \rangle = \min\{(qx \pmod{p})/p, (p - qx \pmod{p})/p\}.$$

Положим

$$d = |\mathbf{D}|, \quad \mathbf{D} = \{r_1, \dots, r_d\},$$

и

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{8kL}} \left(\frac{\delta p}{|\hat{\chi}_A(r_i)|} \right)^{1/2}.$$

Тогда неравенство (14) можно переписать в виде

$$\min\{qr_i \pmod{p}, p - qr_i \pmod{p}\} \leq pa_i, \quad i = 1, \dots, d. \quad (15)$$

Обозначим

$$\mathbf{Z}_p^d = \{(x_1, \dots, x_d) : x_1, \dots, x_d \in \mathbf{Z}_p\}.$$

Разобьем $\mathbf{Z}_p^d$ на непересекающиеся подмножества

$$\mathbf{Z}_p^d = \bigcup_{(i_1, \dots, i_d)} \mathbf{Q}_{i_1, \dots, i_d},$$

где

$$\mathbf{Q}_{i_1, \dots, i_d} = \{(x_1, \dots, x_d) : i_j p a_j < x_j \leq (i_j + 1) p a_j, j = 1, \dots, d\}.$$

Пусть μ_d — количество различных множеств $\mathbf{Q}_{i_1, \dots, i_d}$. С учетом того, что $0 \leq i_j \leq 1/a_j - 1$, $j = 1, \dots, d$, получаем, что

$$\mu_d \leq \prod_{i=1}^d \frac{1}{a_i}.$$

Рассмотрим следующие $p - 1$ элементов из $\mathbf{Z}_p^d$: $(qr_1 \pmod{p}, \dots, qr_d \pmod{p})$, где $r_1, \dots, r_d \in \mathbf{D}$, $q = 1, \dots, p - 1$. Покажем, что если

$$p > \prod_{i=1}^d \frac{1}{a_i} = (\sqrt{8kL})^d \left(\prod_{x \in \mathbf{D}} \frac{|\hat{\chi}_A(x)|}{\delta p} \right)^{1/2} \geq \mu_d, \quad (16)$$

то существует q такое, что для всех $r_i \in \mathbf{D}$, $i = 1, \dots, d$, выполняется неравенство (15). Рассмотрим два случая.

- (А) Пусть $\mu_d = p - 1$, тогда в качестве q выберем $q_0 \in \mathbf{Z}_p \setminus \{0\}$ такое, что $(q_0 r_1 \pmod{p}, \dots, q_0 r_d \pmod{p}) \in \mathbf{Q}_{0, \dots, 0}$. Нетрудно заметить, что при $q = q_0$ неравенство (15) выполняется для всех $r_i \in \mathbf{D}$, $i = 1, \dots, d$.
- (В) Пусть $\mu_d < p - 1$, тогда по принципу Дирихле существуют $q_1, q_2 \in \mathbf{Z}_p \setminus \{0\}$ такие, что векторы $(q_1 r_1 \pmod{p}, \dots, q_1 r_d \pmod{p})$ и $(q_2 r_1 \pmod{p}, \dots, q_2 r_d \pmod{p})$ принадлежат одному и тому же множеству из $\mathbf{Q}_{i_1, \dots, i_d}$. Очевидно, что при $q = q_1 - q_2$ неравенство (15) выполняется для всех $r_i \in \mathbf{D}$, $i = 1, \dots, d$.

Теперь покажем, что неравенство (16) является следствием условия (10). Действительно, в силу равенства Парсеваля

$$p^{-1} \left(\sum_{x \in \mathbf{D}} |\hat{\chi}_A(x)|^2 + \sum_{x \in \mathbf{Z}_p \setminus \mathbf{D}} |\hat{\chi}_A(x)|^2 \right) = \sum_{x \in \mathbf{Z}_p} |\chi_A(x)|^2 = \alpha p. \quad (17)$$

Из (17) следует, что

$$\sum_{x \in \mathbf{D}} |\hat{\chi}_A(x)|^2 \leq \alpha p^2. \quad (18)$$

Из неравенства (18) и неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом следует, что

$$\left(\prod_{x \in \mathbf{D}} |\hat{\chi}_A(x)|^2 \right)^{1/d} \leq \frac{1}{d} \sum_{x \in \mathbf{D}} |\hat{\chi}_A(x)|^2 \leq \frac{\alpha p^2}{d}.$$

Отсюда следует, что

$$\prod_{x \in \mathbf{D}} |\hat{\chi}_A(x)| \leq \left(\frac{\alpha p^2}{d} \right)^{d/2}. \quad (19)$$

Из (19) получаем, что

$$(\sqrt{8k}L)^d \left(\prod_{x \in \mathbf{D}} \frac{|\hat{\chi}_A(x)|}{\delta p} \right)^{1/2} \leq (\sqrt{8k}L \alpha^{1/4} \delta^{-1/2} d^{-1/4})^d. \quad (20)$$

Нетрудно заметить, что правая часть неравенства (20) является возрастающей функцией от d при $d < 64k^2 L^4 \alpha / \delta^2$ ею С другой стороны, из (18) имеем $d \delta^2 p^2 \leq \alpha p^2$, а значит, $d \leq \alpha / \delta^2$. Следовательно,

$$(\sqrt{8k}L \alpha^{1/4} \delta^{-1/2} d^{-1/4})^d \leq (\sqrt{8k}L)^{\alpha / \delta^2}.$$

Полагая

$$\delta = 4^{-k} \varepsilon_1^k \varepsilon_2 \varepsilon_3^{1/2} \alpha^{-k+3/2},$$

получаем, что существует q такое, что неравенство (11) выполняется. При этом без ограничения общности можно считать $q = 1$ (этого можно добиться выбором соответствующего растяжения множества A).

Определим функцию $\chi_1(x)$ следующим образом:

$$\chi_1(x) = \frac{1}{|P|} (\chi_A * \chi_P)(x),$$

где

$$P = \{-(L-1), \dots, L-1\}.$$

Из определения свертки следует, что

$$\chi_1(x) = \frac{1}{|P|} |A \cap (P+x)|, \quad (21)$$

а из равенства (2) получаем, что

$$\hat{\chi}_1(x) = \hat{\chi}_A(x) f(x).$$

Отсюда, из равенства Парсеваля и равенства (2) следует, что

$$\begin{aligned} & \sum_{x \in \mathbf{Z}_p} |\underbrace{(\chi_A * \dots * \chi_A)(x)}_k - \underbrace{(\chi_1 * \dots * \chi_1)(x)}_k|^2 \\ &= p^{-1} \sum_{x \in \mathbf{Z}_p} |\underbrace{(\chi_A * \dots * \chi_A)(x)}_k - \underbrace{(\chi_1 * \dots * \chi_1)(x)}_k|^2 \\ &= p^{-1} \sum_{x \in \mathbf{Z}_p} |\hat{\chi}_A^k(x) - \hat{\chi}_1^k(x)|^2 = p^{-1} \sum_{x \in \mathbf{Z}_p} |\hat{\chi}_A(x)|^{2k} |1 - f^k(x)|^2 \\ &\leq p^{-1} \left(\sup_{x \in \mathbf{Z}_p} |\hat{\chi}_A(x)|^{k-1} |1 - f^k(x)| \right)^2 \sum_{x \in \mathbf{Z}_p} |\hat{\chi}_A(x)|^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Из определения следует, что

$$|\hat{\chi}_A(x)| = \left| \sum_{y \in \mathbb{Z}_p} \chi_A(y) e^{2\pi i y x / p} \right| = \left| \sum_{y \in A} e^{2\pi i y x / p} \right| \leq \sum_{y \in A} |e^{2\pi i y x / p}| = \alpha p. \quad (23)$$

Из (11), (17), (22) и (23) получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathbb{Z}_p} |(\underbrace{\chi_A * \dots * \chi_A}_k)(x) - (\underbrace{\chi_1 * \dots * \chi_1}_k)(x)|^2 \\ \leq (\sup_{x \in \mathbb{Z}_p} |\hat{\chi}_A(x)| |1 - f^k(x)|)^2 \alpha^{2k-3} p^{2k-3} \leq \alpha^{2k-3} \delta^2 p^{2k-1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Если $x \in A'$, то существует интервал длины L , который содержит x и, следовательно, содержится в интервале $[x - (L-1), \dots, x + (L-1)]$. Из определения множества A' следует, что этот интервал содержит не менее $\varepsilon_1 L/2$ точек из A , а из определения функции $\chi_1(x)$ следует, что

$$\chi_1(x) \geq \varepsilon_1/4.$$

Заметим, что для всех $x \in \mathbb{Z}_p$ справедливо неравенство

$$\chi_1(x) \geq \varepsilon_1 \chi_{A'}(x)/4$$

Из этого неравенства и определения свертки вытекает, что для всех $x \in \mathbb{Z}_p$

$$(\underbrace{\chi_1 * \dots * \chi_1}_k)(x) \geq \varepsilon_1^k (\underbrace{\chi_{A'} * \dots * \chi_{A'}}_k)(x)/4^k. \quad (25)$$

При условии, что

$$(\underbrace{\chi_{A'} * \dots * \chi_{A'}}_k)(x) \geq \varepsilon_2 p^{k-1}, \quad (26)$$

из (25) получаем, что

$$(\underbrace{\chi_1 * \dots * \chi_1}_k)(x) \geq \varepsilon_1^k \varepsilon_2 p^{k-1} / 4^k. \quad (27)$$

Покажем, что количество элементов $x \in \mathbb{Z}_p$ таких, что

$$(\underbrace{\chi_A * \dots * \chi_A}_k)(x) = 0$$

и удовлетворяющих неравенству (26), не превосходит $\varepsilon_3 p$. Семейство таких элементов обозначим через $\mathbf{F}$. Заметим, что для всякого $x \in \mathbf{F}$

$$|(\underbrace{\chi_A * \dots * \chi_A}_k)(x) - (\underbrace{\chi_1 * \dots * \chi_1}_k)(x)|^2 \geq \frac{\varepsilon_1^{2k} \varepsilon_2^2 p^{2(k-1)}}{4^{2k}}. \quad (28)$$

Из (24) и (28) получаем, что

$$\begin{aligned}
 \alpha^{2k-3} \delta^2 p^{2k-1} &\geq \sum_{x \in \mathbf{Z}_p} |\underbrace{(\chi_A * \dots * \chi_A)(x)}_k - \underbrace{(\chi_1 * \dots * \chi_1)(x)}_k|^2 \\
 &\geq \sum_{x \in \mathbf{F}} |\underbrace{(\chi_A * \dots * \chi_A)(x)}_k - \underbrace{(\chi_1 * \dots * \chi_1)(x)}_k|^2 \\
 &\geq |\mathbf{F}| \frac{\varepsilon_1^{2k} \varepsilon_2^2 p^{2(k-1)}}{4^{2k}}.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$|\mathbf{F}| \leq \frac{4^{2k} \alpha^{2k-3} \delta^2}{\varepsilon_1^{2k} \varepsilon_2^2} p \leq \varepsilon_3 p.$$

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1

3.1. Верхняя оценка

Пусть $k \geq 2$ — натуральное число, а s удовлетворяет условию (7). Рассмотрим разбиение множества $\mathbf{SS}_k(\mathbf{Z}_p)$ на две части:

$$\mathbf{SS}_k(\mathbf{Z}_p) = \mathbf{SS}'_{k,s}(\mathbf{Z}_p) \cup \mathbf{SS}''_{k,s}(\mathbf{Z}_p), \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathbf{SS}'_{k,s}(\mathbf{Z}_p) &= \{B \in \mathbf{SS}_k(\mathbf{Z}_p) : B = kA \text{ и } |A| \leq p/(k+1)s\}, \\
 \mathbf{SS}''_{k,s}(\mathbf{Z}_p) &= \{B \in \mathbf{SS}_k(\mathbf{Z}_p) : B = kA \text{ и } |A| > p/(k+1)s\}.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$|\mathbf{SS}_k(\mathbf{Z}_p)| \leq |\mathbf{SS}'_{k,s}(\mathbf{Z}_p)| + |\mathbf{SS}''_{k,s}(\mathbf{Z}_p)|. \quad (30)$$

С учетом того, что каждое множество $A \subseteq \mathbf{Z}_p$ порождает ровно одно множество вида kA , получаем, что

$$|\mathbf{SS}'_{k,s}(\mathbf{Z}_p)| \leq |\mathbf{T}_{k,s}(\mathbf{Z}_p)|. \quad (31)$$

В силу леммы (3) и неравенства (31),

$$|\mathbf{SS}'_{k,s}(\mathbf{Z}_p)| \leq 2^{p/(k+1)}. \quad (32)$$

Теперь оценим сверху $|\mathbf{SS}''_{k,s}(\mathbf{Z}_p)|$. Пусть мощность множества $A \subseteq \mathbf{Z}_p$ превосходит $p/(k+1)s$ и p — простое число, такое, что для натуральных чисел k, L и положительных действительных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и ε_3 выполняется условие (10). Тогда, по лемме 5, существует подмножество A' , обладающее свойствами (i)–(iii). Оценим $|\mathbf{SS}''_{k,s}(\mathbf{Z}_p)|$ путем подсчета количества пар (A', kA) .

Пусть выбрано $A' \in \mathbf{G}_L(\mathbf{Z}_p)$. Через $\bar{C}$ обозначим дополнение подмножества C в $\mathbf{Z}_p$.

В силу утверждения (iii) леммы 5 получаем, что $\overline{kA}$ является подмножеством объединения множества $\overline{S_{\varepsilon_2 p^{k-1}, k}(\chi_{A'}, \dots, \chi_{A'})}$ и некоторого множества мощности, не превышающей $\varepsilon_3 p$. В силу леммы 2,

$$|S_{\varepsilon_2 p^{k-1}, k}(\chi_{A'}, \dots, \chi_{A'})| \geq \min(p, k|A'| - k + 2) - 2(\varepsilon_2 p^k)^{1/2}.$$

При условии $|A'| \geq p/(k+1)$ получаем

$$\begin{aligned} |\overline{S_{\varepsilon_2 p^{k-1}, k}(\chi_{A'}, \dots, \chi_{A'})}| &= p - |S_{\varepsilon_2 p^{k-1}, k}(\chi_{A'}, \dots, \chi_{A'})| \\ &\leq p/(k+1) + 2\varepsilon_2^{1/2} p^{k/2} + (k-2). \end{aligned}$$

Очевидно, что для любого подмножества $C \subseteq \mathbf{Z}_p$ множество kC однозначно определяет множество $\overline{kC}$. Отсюда следует, что число способов выбора kA при заданном A' мощности, превышающей $p/(k+1)$, не превосходит

$$2^{p/(k+1) + (k-2) + (2\varepsilon_2^{1/2} p^{(k-2)/2} + \varepsilon_3)p}. \quad (33)$$

В силу утверждения (ii) леммы 5,

$$|A| \leq |A'| + \varepsilon_1 p.$$

При условии $|A'| < p/(k+1)$ получаем, что

$$|A| < p/(k+1) + \varepsilon_1 p.$$

С учетом того, что каждое множество $A \subseteq \mathbf{Z}_p$ порождает ровно одно множество вида kA , получаем, что число способов выбора kA при заданном A' мощности, не превышающей $p/(k+1)$, не превосходит

$$2^{p/(k+1) + \varepsilon_1 p}. \quad (34)$$

В силу (33), (34), леммы 4 и леммы 5 с параметрами

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \varepsilon, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon^2 p^{2-k}, \quad L = 1 + \lfloor 1/\varepsilon \rfloor,$$

получаем, что

$$|\mathbf{SS}_{k,s}''(\mathbf{Z}_p)| \leq 2^{p/(k+1) + (k-2) + o(p)}. \quad (35)$$

Из неравенств (30), (32) и (35) следует, что

$$|\mathbf{SS}_k(\mathbf{Z}_p)| \leq 2^{p/(k+1)} + 2^{p/(k+1) + (k-2) + o(p)} = 2^{p/(k+1) + (k-2) + o(p)}.$$

Верхняя оценка теоремы 1 доказана.

3.2. Нижняя оценка

Обозначим

$$\mathbf{SS}_k(\mathbf{Z}_p, B) = \{A: A \in \mathbf{SS}_k(\mathbf{Z}_p) \text{ и } B \subseteq A\}.$$

Лемма 6. Пусть $k \geq 2$ — натуральное число, а $P \subseteq \mathbf{Z}_p$ — произвольная арифметическая прогрессия длины $k(\lfloor p/(2k-1) \rfloor - 1) - (k-1)$. Тогда существует положительная константа $\mathbf{C}_k$ такая, что

$$|\mathbf{SS}_k(\mathbf{Z}_p, P)| \geq \mathbf{C}_k 2^{p/(2k-1)}.$$

Доказательство. Положим

$$L = \lfloor p/(2k-1) \rfloor - 1.$$

Без ограничения общности можно считать, что $P = \{k, \dots, kL\}$. Пусть $B \subseteq \{1, \dots, L\}$. Определим множество $A = A(B)$ равенством

$$A = k(B \cup \{2L+1\}) = \bigcup_{i=0}^k \{(k-i)B + i(2L+1)\}. \quad (36)$$

С учетом того, что

$$(B + (k-1)(2L+1)) \cap \left(\bigcup_{i=0}^{k-2} \{(k-i)B + i(2L+1)\} \right) = \emptyset, \quad (37)$$

получаем, что различные $B \subseteq \{1, \dots, L\}$ порождают различные множества A . Положим

$$N(k) = \left\lceil \frac{\log(8k^2)}{\log(4/3)} \right\rceil,$$

и пусть

$$X = \{1, \dots, N(k)\} \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} (\lfloor (i+1)L/k \rfloor - N(k), \dots, \lceil (i+1)L/k \rceil).$$

Множество $B \subseteq \{1, \dots, L\}$ определим следующим образом:

$$B = B(C) = X \cup C,$$

где элементы множества C выбраны из $\{1, \dots, L\} \setminus X$ случайно с вероятностью $1/2$, независимо друг от друга. Положим

$$Y = \{k, \dots, kN(k)\} \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} \{(i+1)L - kN(k), \dots, (i+1)L\}.$$

Очевидно, что $Y \subseteq kB$. Заметим, что если $x \notin kB$, то в представлении x в виде $x = x_1 + \dots + x_k$ существует как минимум одно x_i , $i \in \{1, \dots, k\}$, такое, что $x_i \notin B$. Обозначим множество

$$\mathbf{Q}_{k,L}(x) = \{(x_1, \dots, x_k) : x_1 + \dots + x_k = x, x_1, \dots, x_k \in \{1, \dots, L\}\}.$$

Положим

$$q = |\mathbf{Q}_{k,L}(x)|.$$

Будем говорить, что векторы $(x_1, \dots, x_k)$ и $(y_1, \dots, y_k)$ не пересекаются, если $\{x_1, \dots, x_k\} \cap \{y_1, \dots, y_k\} = \emptyset$.

Покажем, что для любого $x \in \{kN(k) + 1, \dots, L\}$ верно

$$\mathbf{P}(x \notin kB) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{\lfloor x/k \rfloor}. \quad (38)$$

С учетом того, что

$$\mathbf{P}(A \& B) \leq \mathbf{P}(A),$$

получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(x \notin kB) &\leq \mathbf{P}((x_1^1 + \dots + x_k^1 \notin kB) \& \dots \& (x_1^q + \dots + x_k^q \notin kB): \\ &\quad (x_1^i, \dots, x_k^i) \in \mathbf{Q}_{k,L}(x), i = 1, \dots, q) \\ &\leq \mathbf{P}((x_1^{11} + \dots + x_k^{11} \notin kB) \& \dots \& (x_1^{1n} + \dots + x_k^{1n} \notin kB)) \\ &= \mathbf{P}((x_1^{11} \notin B \vee \dots \vee x_k^{11} \notin B) \& \dots \& (x_1^{1n} \notin B \vee \dots \vee x_k^{1n} \notin B)), \end{aligned} \quad (39)$$

где векторы $(x_1^{11}, \dots, x_k^{11}), \dots, (x_1^{1n}, \dots, x_k^{1n})$, $n \leq q$, попарно не пересекаются. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}((x_1^{11} \notin B \vee \dots \vee x_k^{11} \notin B) \& \dots \& (x_1^{1n} \notin B \vee \dots \vee x_k^{1n} \notin B)) \\ &= \mathbf{P}((x_1^{11} \notin B) \vee \dots \vee (x_k^{11} \notin B)) \cdots \mathbf{P}((x_1^{1n} \notin B) \vee \dots \vee (x_k^{1n} \notin B)). \end{aligned} \quad (40)$$

В силу закона де Моргана,

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}((x_1^{11} \notin B) \vee \dots \vee (x_k^{11} \notin B)) \cdots \mathbf{P}((x_1^{1n} \notin B) \vee \dots \vee (x_k^{1n} \notin B)) \\ &= \mathbf{P}(\overline{(x_1^{11} \in B) \& \dots \& (x_k^{11} \in B)}) \cdots \mathbf{P}(\overline{(x_1^{1n} \in B) \& \dots \& (x_k^{1n} \in B)}) \\ &= (1 - \mathbf{P}((x_1^{11} \in B) \& \dots \& (x_k^{11} \in B))) \cdots (1 - \mathbf{P}((x_1^{1n} \in B) \& \dots \& (x_k^{1n} \in B))). \end{aligned} \quad (41)$$

Заметим, что для всякого $x \in \{kN(k) + 1, \dots, L\}$ векторы $(\underbrace{i, \dots, i}_{k-1}, x - i(k-1))$,

$1 \leq i \leq \lfloor x/k \rfloor$, попарно не пересекаются. Из (41) и того, что число попарно непересекающихся векторов не меньше $\lfloor x/k \rfloor$ для любого $x \in \{kN(k) + 1, \dots, L\}$, следует справедливость неравенства (38).

Поскольку для любого $x \in \{jL + 1, \dots, (j+1)L - kN(k) - 1\}$, $j = 1, \dots, k-1$, векторы $(\underbrace{L-i, \dots, L-i}_{k-1}, x - (k-1)(L-i))$, $1 \leq i \leq \lfloor ((j+1)L - x)/k \rfloor$, попарно не пересекаются, аналогично (38) получаем, что

$$\mathbf{P}(x \notin kB) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{\lfloor ((j+1)L - x)/k \rfloor}. \quad (42)$$

Теперь докажем справедливость неравенства

$$\mathbf{P}(P \not\subseteq kB) \leq k \sum_{x \geq kN(k)+1} \left(\frac{3}{4}\right)^{\lfloor x/k \rfloor}. \quad (43)$$

Так как

$$\mathbf{P}(A \vee B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B),$$

получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(P \not\subseteq kB) &= \mathbf{P}(((kN(k) + 1) \notin kB) \vee \dots \vee ((k(L - N(k)) - 1) \notin kB)) \\ &\leq \sum_{x=kN(k)+1}^{kL-kN(k)-1} \mathbf{P}(x \notin kB) \\ &= \sum_{x=kN(k)+1}^L \mathbf{P}(x \notin kB) + \sum_{x=L+1}^{2L-kN(k)-1} \mathbf{P}(x \notin kB) + \dots + \sum_{x=(k-1)L+1}^{kL-kN(k)-1} \mathbf{P}(x \notin kB) \\ &\leq k \sum_{x=kN(k)+1}^L \left(\frac{3}{4}\right)^{\lfloor x/k \rfloor} \leq k \sum_{x \geq kN(k)+1} \left(\frac{3}{4}\right)^{\lfloor x/k \rfloor}. \end{aligned} \quad (44)$$

Заметим, что при условии

$$N(k) \geq \frac{\log(8k^2)}{\log(4/3)}$$

правая часть неравенства (43) не превосходит $1/2$. Отсюда следует, что существует по крайней мере $2^{L-kN(k)-1}$ подмножеств $B \subseteq \{1, \dots, L\}$ таких, что $P \subseteq kB$. Лемма доказана.

Пусть $k \geq 2$ — натуральное число и $P \subseteq \mathbf{Z}_p$ — произвольная арифметическая прогрессия длины $k(\lfloor p/(2k-1) \rfloor - 1) - (k-1)$. В силу леммы 6,

$$|\mathbf{SS}_k(\mathbf{Z}_p)| \geq |\mathbf{SS}_k(\mathbf{Z}_p, P)| \geq C_k 2^{p/(2k-1)}.$$

Нижняя оценка теоремы 1 доказана.

Автор выражает признательность своему научному руководителю, профессору А. А. Сапоженко за постановку задачи и внимание к этой работе.

Список литературы

1. Green B., Ruzsa I., Counting sumsets and sum-free sets modulo a prime. *Studia Sci. Math. Hungarica* (2004) **41**, 285–293.
2. Nathanson M. B., *Additive number theory: Inverse problems and the geometry of sumsets*. Springer, Berlin, 1996.
3. Pollard J. M., A generalization of the theorem of Cauchy and Davenport. *J. London Math. Soc.* (1974) **8**, 460–462.
4. Сапоженко А. А., *Проблема Дедекинда и метод граничных функционалов*. Физматлит, Москва, 2009.

Статья поступила 20.01.2012.