Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Модули, у которых все подмодули являются аннуляторами, *Дискрет. матем.*, 2012, том 24, выпуск 3, 39–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1195>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 02:56:05

Модули, у которых все подмодули являются аннуляторами

© 2012 г. А. А. Туганбаев

Исследуются комюльтипликационные модули над не обязательно коммутативными кольцами.

Данная работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект 08-01-00693-а: «Структурная теория колец».

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, а модули унитарными. Выражение, что A есть инвариантное кольцо, означает, что A — инвариантное справа и слева кольцо. Если A — кольцо и M — правый A -модуль, то для любого подмножества B в A через $\ell_M(B)$ обозначается левый аннулятор $\{m \in M \mid mB = 0\}$ для B в M . Модуль M_A называется комюльтипликационным, если для любого его подмодуля X существует такой идеал B кольца A , что $X = \ell_M(B)$. Например, все циклические модули над кольцами вычетов или групповыми алгебрами конечных циклических групп над конечными полями являются конечными комюльтипликационными модулями. Комюльтипликационные модули изучались во многих работах (см., например, [1–12]). В этих работах в основном изучаются комюльтипликационные модули над коммутативными кольцами.

Если A — коммутативное кольцо и M — ненулевой A -модуль, то известны приведенные ниже результаты I–III.

(I) Если M — комюльтипликационный модуль, то M — существенное расширение прямой суммы попарно неизоморфных простых модулей, причем произвольный ненулевой конечнопорожденный подмодуль X в M является существенным расширением конечной прямой суммы попарно неизоморфных простых модулей и кольцо $A/r_A(X)$ имеет только конечное число максимальных идеалов.

(II) M — комюльтипликационный полупрimitивный модуль

$\iff M$ — комюльтипликационный полупростой модуль

$\iff$ либо M прост, либо

$$M = \bigoplus_{i \in I} M_i, \quad |I| > 1,$$

где все M_i — попарно неизоморфные простые модули и

$$\bigcap_{j \neq i} r_A(M_j) \not\subseteq r_A(M_i)$$

для каждого $i \in I$.

- (III) Если кольцо A регулярно, то M является комутативным в точности тогда, когда либо M прост, либо

$$M = \bigoplus_{i \in I} M_i, \quad |I| > 1,$$

где все M_i — попарно неизоморфные простые модули и

$$\bigcap_{j \neq i} r_A(M_j) \not\subseteq r_A(M_i)$$

для каждого $i \in I$.

В связи с известными утверждениями I–III мы докажем теорему 1, которая является основным результатом работы.

Теорема 1. Пусть A — кольцо с коммутативным умножением правых идеалов и M — ненулевой правый A -модуль.

- (1) Если M — комутативный модуль, то M — существенное расширение прямой суммы попарно неизоморфных простых модулей, причем произвольный ненулевой конечнопорожденный подмодуль X в M является существенным расширением конечной прямой суммы попарно неизоморфных простых модулей $X_1, \dots, X_n$, и кольцо $A/r_A(X)$ имеет только конечное число максимальных правых идеалов.
- (2) M является комутативным и полупримерным модулем в точности тогда, когда либо M прост, либо

$$M = \bigoplus_{i \in I} M_i, \quad |I| > 1,$$

где все M_i — попарно неизоморфные простые модули и

$$\bigcap_{j \neq i} r_A(M_j) \not\subseteq r_A(M_i)$$

для каждого $i \in I$.

- (3) Если кольцо A регулярно, то M является комутативным в точности тогда, когда либо M прост, либо

$$M = \bigoplus_{i \in I} M_i, \quad |I| > 1,$$

где все M_i — попарно неизоморфные простые модули и

$$\bigcap_{j \neq i} r_A(M_j) \not\subseteq r_A(M_i)$$

для каждого $i \in I$.

Кольцо A называется кольцом с коммутативным умножением правых идеалов, если $BC = CB$ для любых правых идеалов B и C кольца A ; такие кольца инвариантны справа,

поскольку можно взять $C = A$ и получить $B = AB$. Напомним, что кольцо называется инвариантным справа, если все его правые идеалы являются идеалами. Заметим, что существуют инвариантные справа кольца с некоммутативным умножением правых идеалов (см., например, пример 9.10 в [14]). Кроме того, класс всех колец с коммутативным умножением правых идеалов включает в себя все коммутативные кольца, кольца формальных степенных рядов от одной переменной над телами, все факторкольца любых прямых произведений тел и все строго регулярные кольца. Напомним, что кольцо A называется регулярным (строго регулярным), если каждый его главный правый или левый идеал порождается идемпотентом (центральным идемпотентом).

Доказательство теоремы 1 разобьем на ряд утверждений; некоторые из них представляют самостоятельный интерес. Вначале приведем необходимые определения и обозначения. Через $J(M)$ обозначается радикал Джекобсона модуля M . Модуль M называется полупрimitивным, если $J(M) = 0$.

Лемма 1. Если A — инвариантное справа кольцо и B — правый идеал в A , то

$$B(1 - b) \subseteq (1 - b)B$$

для любого элемента $b \in B$.

Доказательство. Пусть $b_1 \in B$. Так как кольцо A инвариантно справа, то $(1 - b)A$ — идеал. Поэтому

$$b_1(1 - b) = (1 - b)a$$

для некоторого элемента $a \in A$. Тогда

$$a = (1 - b)a + ba = b_1(1 - b) + ba \in B, \quad B(1 - b) \subseteq (1 - b)B.$$

Лемма 2. Пусть A — инвариантное справа кольцо и M — конечнопорожденный правый A -модуль. Если B — правый идеал в A и $M = MB$, то $M(1 - b) = 0$ для некоторого элемента $b \in B$.

Доказательство. Пусть

$$M = \sum_{i=1}^n m_i A.$$

Проведем индукцию по n .

Допустим, что $n = 1$ и $M = m_1 A$. Обозначим $m = m_1$. Так как кольцо A инвариантно справа, то

$$r(M) = r(m), \quad mA = mAB = mB.$$

Поэтому $m(1 - b) = 0$ для некоторого элемента $b \in B$. Тогда $M(1 - b) = 0$.

Допустим, что $n \geq 2$ и утверждение верно для всех натуральных чисел, меньших n . Обозначим

$$N = \sum_{i=1}^{n-1} m_i A.$$

Сначала докажем, что

$$A = B + (m_n A \cdot N), \quad N = NB.$$

Положим $Y = 0$ для $n = 2$ и

$$Y = \sum_{i=2}^{n-1} m_i A$$

для $n \geq 3$.

Для каждого m_i существует такой элемент $b_i \in B$, что

$$m_i \in M = MB = \sum_{j=1}^n m_j B, \quad m_i(1 - b_i) \in \sum_{j \neq i} m_j B.$$

Тогда

$$m_n A(1 - b_n) \subseteq NB = m_1 B + YB, \quad m_1 A(1 - b_1) \in YB + m_n B,$$

поскольку A инвариантно справа. Кроме того, $B(1 - b_1) \subseteq (1 - b_1)B$ по лемме 1. Поэтому

$$A = B + (m_n A \cdot N)$$

и

$$\begin{aligned} m_1 A(1 - b_1)(1 - b_n) &\subseteq (YB + m_n B)(1 - b_n) \\ &\subseteq YB + m_n B(1 - b_n) \\ &\subseteq YB + m_n(1 - b_n)B \\ &\subseteq YB + m_1 B = NB. \end{aligned}$$

Тогда существует такой элемент $b^* \in B$, что

$$m_1(1 - b_1)(1 - b_n) - m_1 b^* \in YB, \quad m_1[(1 - b_1)(1 - b_n) - b^*] \in YB.$$

Обозначим

$$b = 1 - [(1 - b_1)(1 - b_n) - b^*] \in B.$$

Тогда

$$\begin{aligned} m_1 &= m_1 b + m_1(1 - b) \\ &= m_1 b + m_1[(1 - b_1)(1 - b_n) - b^*] \in m_1 B + YB = NB. \end{aligned}$$

Поэтому $m_1 A \subseteq NB$. Аналогично можно доказать, что $m_i A \subseteq NB$ при $i = 2, \dots, n - 1$. Поэтому $N = NB$.

Таким образом, доказано, что

$$A = B + (m_n A \cdot N), \quad N = NB.$$

Кроме того,

$$A = B + r(N)$$

по предположению индукции. Тогда

$$\begin{aligned} M(m_n A \cdot N)r(N) &= (N + m_n A)(m_n A \cdot N)r(N) \\ &= N(m_n A \cdot N)r(N) + m_n A(m_n A \cdot N)r(N) \subseteq Nr(N) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$(m_n A \cdot N)r(N) \subseteq r(M)$$

и

$$\begin{aligned} A &= A \cdot A = (B + (m_n A \cdot N))(B + r(N)) \\ &\subseteq B + (m_n A \cdot N)r(N) \subseteq B + r(M) \subseteq A. \end{aligned}$$

Тогда $A = B + r(M)$ и $M(1 - b) = 0$ для некоторого элемента $b \in B$. Лемма доказана.

Следующие два утверждения известны и могут быть легко проверены непосредственно.

Лемма 3 ([1], лемма 1.2). Пусть A — кольцо, B — идеал в A и M — правый A -модуль, удовлетворяющий условию $MB = 0$. Тогда M — коммутационный A -модуль тогда и только тогда, когда M — коммутационный A/B -модуль.

Лемма 4 ([2], теорема 3.17, лемма 3.7). Пусть A — кольцо и M — правый A -модуль. Равносильны следующие условия:

- (1) M — коммутационный модуль;
- (2) $X = \ell_M(r_A(X))$ для каждого подмодуля X модуля M ;
- (3) каждый подмодуль модуля M — коммутационный модуль.

Следующая лемма фактически хорошо известна [1, 2]. Для удобства приведем это утверждение с доказательством.

Лемма 5. Пусть A — кольцо и M — коммутационный правый A -модуль. Если X — ненулевой подмодуль в M , то X — коммутационный $A/r_A(X)$ -модуль и $f(X) \subseteq X$ для любого гомоморфизма $f: X \rightarrow M$. В частности, M не содержит прямую сумму двух изоморфных ненулевых модулей.

Доказательство. По лемме 3 и лемме 4, X — коммутационный $A/r_A(X)$ -модуль. Так как M — коммутационный модуль, то $X = r_M(B)$ для некоторого идеала B в A . Тогда

$$f(X)B \subseteq f(XB) = f(0) = 0,$$

откуда

$$f(X) \subseteq r_M(B) = X.$$

Для коммутативных колец приведенная ниже лемма была доказана в [3] (предложение 3.1 (b)–(c)).

Лемма 6. Пусть A — кольцо, M — комутлипликационный правый A -модуль и B — такой идеал кольца A , что $\ell_M(B) = 0$ и $BC = CB$ для любого идеала C кольца A . Тогда справедливы следующие утверждения.

- (1) Верно соотношение $M = MB$.
- (2) Для любого элемента $m \in M$ существует элемент $b \in B$, удовлетворяющий условию $m(1 - b) = 0$.

Доказательство. Докажем первую часть. Так как M — комутлипликационный модуль, то $MB = \ell_M(C)$ для некоторого идеала C кольца A . Тогда

$$\begin{aligned} MCS &= MBC = \ell_M(C)C = 0, \\ MC &\subseteq \ell_M(B) = 0, \\ M &= l_M(C) = MB. \end{aligned}$$

Докажем вторую часть леммы. Так как $\ell_M(B) = 0$, то $\ell_{mA}(B) = 0$. Кроме того, mA — комутлипликационный модуль в силу леммы 3. Ввиду только что доказанной первой части леммы, $mA = mAB = mB$. Поэтому существует элемент $b \in B$, удовлетворяющий условию $m(1 - b) = 0$.

Лемма 7 ([13], теорема 9.4.3). Модуль M является существенным расширением конечной прямой суммы простых модулей тогда и только тогда, когда для любого множества $\{P_i\}_{i \in I}$ подмодулей P_i в X , удовлетворяющих условию

$$\bigcap_{i \in I} P_i = 0,$$

существует конечное подмножество J в I , удовлетворяющее условию

$$\bigcap_{j \in J} P_j = 0.$$

Лемма 8. Для ненулевого модуля M равносильны следующие условия:

- (1) M полупримитивен и каждый ненулевой циклический подмодуль в M является существенным расширением конечной прямой суммы простых модулей;
- (2) модуль M полупрост.

Доказательство. Импликация (2) $\Rightarrow$ (1) проверяется непосредственно.

Для доказательства справедливости импликации (1) $\Rightarrow$ (2) достаточно доказать, что произвольный циклический подмодуль X модуля M изоморфен подмодулю полупростого модуля. Так как модуль M полупримитивен, то

$$\bigcap_{i \in I} P_i = 0,$$

где $\{P_i\}_{i \in I}$ — множество всех максимальных подмодулей в M . Обозначим

$$P_i = X \cap Q_i, \quad i \in I.$$

Тогда

$$\bigcap_{i \in I} Q_i = 0,$$

где для любого $i \in I$ модуль X/Q_i либо прост, либо равен нулю. По лемме 7, существует конечное подмножество J в I , удовлетворяющее условию

$$\bigcap_{j \in J} Q_j = 0.$$

Ясно, что модуль X изоморфен подмодулю полупростого модуля $\bigoplus_{j \in J} (X/Q_j)$.

Лемма 9. Пусть A — кольцо, M — комутативационный правый A -модуль и M содержит прямую сумму ненулевых модулей X_i , где $i \in I$ и $|I| \geq 2$. Тогда

$$\bigcap_{j \neq i} r_A(X_j) \not\subseteq r_A(X_i)$$

для любого $i \in I$, причем $X_i \not\cong X_i$ при $i \neq j$.

Доказательство. Обозначим

$$X = \bigoplus_{i \in I} X_i, \quad Y_i = \bigoplus_{j \neq i} X_j.$$

Допустим, что

$$\bigcap_{j \neq i} r_A(X_j) \subseteq r_A(X_i)$$

для некоторого $i \in I$. По лемме 4, X — комутативационный модуль и

$$Y_i = \ell_X(r_A(Y_i)) = \ell_X \left(\bigcap_{j \neq i} r_A(X_j) \right) \subseteq \ell_X(r_A(X_i)) = X_i.$$

Поэтому

$$0 \neq Y_i = Y_i \cap X_i = 0,$$

и получаем противоречие.

Лемма 10. Пусть A — кольцо и P — такой максимальный правый идеал в A , что P — идеал. Тогда справедливы следующие утверждения.

- (1) Факторкольцо A/P является телом, A/P — простой правый A -модуль и $P = Q$ для любого такого максимального правого идеала Q , что $(A/P)_A \cong (A/Q)_A$.
- (2) Если M — комутативационный правый A -модуль и $\ell_M(P) \neq 0$, то $\ell_M(P)$ — простой модуль.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Так как P — идеал и P — максимальный правый идеал, то факторкольцо A/P является телом и A/P — простой правый A -модуль.

Допустим, что $P \neq Q$. Тогда $A = P + Q$, и существует A -модульный изоморфизм $P/(P \cap Q) \rightarrow Q/(P \cap Q)$. Так как $A = P + Q$, то этот изоморфизм продолжается до гомоморфизма $\tilde{f}: A/(P \cap Q) \rightarrow Q/(P \cap Q)$ с ядром $Q/(P \cap Q)$. Так как модуль A_A проективен, то $\tilde{f}$ поднимается до такого гомоморфизма $f: A_A \rightarrow A_A$, что $f(A) \subseteq Q$, $f(Q) \subseteq P \cap Q$, и $f(P) \not\subseteq P \cap Q$. Обозначим $a = f(1) \in A$. Тогда

$$f(P) = aP \subseteq P \cap Q,$$

поскольку P — идеал. Получено противоречие.

Докажем второе утверждение. Так как факторкольцо A/P является телом, то ненулевой правый A/P -модуль $\ell_M(P)$ есть прямая сумма изоморфных простых модулей. По лемме 5, модуль $\ell_M(P)$ прост.

Лемма 11. Пусть A — кольцо, в котором все максимальные правые идеалы являются идеалами, и пусть $\{X_i\}_{i \in I}$ — некоторое множество простых правых A -модулей, $|I| \geq 2$. Равносильны следующие условия:

- (1) $\bigoplus_{i \in I} X_i$ — коммутационный правый A -модуль;
- (2) $\bigcap_{j \neq i} r_A(X_j) \not\subseteq r_A(X_i)$ для любого $i \in I$, причем $X_i \not\cong X_j$ при $i \neq j$.

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) следует из леммы 9.

Докажем справедливость импликации (2) $\Rightarrow$ (1). Обозначим

$$X = \bigoplus_{i \in I} X_i, \quad P_i = r_A(X_i).$$

Из условия следует, что все факторкольца A/P_i являются телами. Пусть N — ненулевой собственный подмодуль в X . Так как X — прямая сумма попарно неизоморфных простых модулей X_i , то найдется такое собственное непустое подмножество J в I , что

$$N = \bigoplus_{j \in J} X_j.$$

Тогда

$$r_A(N) = \bigcap_{j \in J} P_j.$$

В силу леммы 4, достаточно доказать, что

$$N = \ell_X(r_A(N)).$$

Допустим, что $N \neq \ell_X(r_A(N))$. Тогда $\ell_X(r_A(N))$ строго содержит N . Кроме того, X — прямая сумма неизоморфных простых модулей. Поэтому $\ell_X(r_A(N))$ содержит модуль X_i для некоторого $i \in I \setminus J$. Тогда $X_i r_A(N) = 0$. Поэтому $r_A(N) \subseteq P_i$. Кроме того,

$$\bigcap_{j \neq i} P_j \subseteq \bigcap_{j \in J} P_j = r_A(N) \subseteq P_i.$$

По условию,

$$\bigcap_{j \neq i} P_j \not\subseteq P_i.$$

Получено противоречие.

Лемма 12. Пусть A — кольцо с коммутативным умножением правых идеалов, M — ненулевой коммутативный правый A -модуль, X — ненулевой конечнопорожденный подмодуль в M . Тогда кольцо A инвариантно справа, причем верны утверждения ниже.

- (1) Если B — идеал кольца A , удовлетворяющий условию $\ell_M(B) = 0$, то существует элемент $b \in B$, удовлетворяющий условию $X(1 - b) = 0$.
- (2) Если $\{M_i\}_{i \in I}$ — некоторое множество подмодулей в M , удовлетворяющих условию

$$\bigcap_{i \in I} M_i = 0$$

и

$$B = \sum_{i \in I} r_A(M_i),$$

то существуют конечное подмножество $J \subseteq I$ и элемент $b \in \sum_{j \in J} r_A(M_j) \subseteq B$, удовлетворяющие условию $X(1 - b) = 0$.

- (3) Если подмодуль X точен, то $\ell_X(B) \neq 0$ для любого собственного идеала B кольца A .
- (4) X — существенное расширение конечной прямой суммы попарно неизоморфных простых модулей $X_1, \dots, X_n$, и любой простой подмодуль в X совпадает с одним из модулей $X_1, \dots, X_n$.
- (5) M — существенное расширение прямой суммы попарно неизоморфных простых модулей.
- (6) Кольцо $A/r_A(X)$ имеет только конечное число максимальных правых идеалов.

Доказательство. В силу леммы 3, X — коммутативный модуль. Заметим также, что кольцо A инвариантно справа.

Докажем первое утверждение. Так как

$$\ell_X(B) \subseteq \ell_M(B) = 0,$$

то

$$X = XB$$

в силу части 1 леммы 6. В силу леммы 2,

$$X(1 - b) = 0$$

для некоторого элемента $b \in B$.

Докажем второе утверждение. В силу леммы 4,

$$M_i = \ell_M(r_A(M_i))$$

для каждого $i \in I$. Тогда

$$0 = \bigcap_{i \in I} M_i = \bigcap_{i \in I} \ell_M(r_A(M_i)) = \ell_M \left(\sum_{i \in I} r_A(M_i) \right) = \ell_M(B).$$

В силу только что доказанного утверждения 1, существует элемент $b \in B$, удовлетворяющий условию $X(1 - b) = 0$. Тогда

$$1 - b \in r_A(X) + \sum_{i \in I} r_A(M_i).$$

Поэтому существует конечное подмножество $J \subseteq I$, удовлетворяющее условию

$$b \in \sum_{j \in J} r_A(M_j) \subseteq B.$$

Докажем третье утверждение. Допустим, что $\ell_X(B) = 0$ для некоторого собственного идеала B кольца A . В силу только что доказанного утверждения 1, существует элемент $b \in B$, удовлетворяющий условию $1 - b \in r_A(X) = 0$. Тогда $1 = b \in B$ и $B = A$; получено противоречие.

Докажем четвертое утверждение. Без ограничения общности можно считать, что модуль X точен. По лемме 5, X не содержит прямую сумму двух изоморфных ненулевых модулей. Поэтому достаточно доказать, что X — существенное расширение конечной прямой суммы простых модулей. По лемме 7, достаточно доказать, что для любого множества $\{X_i\}_{i \in I}$ подмодулей X_i в X , удовлетворяющих условию

$$\bigcap_{i \in I} X_i = 0$$

существует конечное подмножество J в I , удовлетворяющее условию

$$\bigcap_{j \in J} X_j = 0.$$

Так как X — комутативный модуль, то существует такое множество идеалов $\{B_i\}_{i \in I}$ кольца A , что

$$X_i = \ell_X(B_i)$$

для любого $i \in I$. Обозначим через B идеал $\sum_{i \in I} B_i$ кольца A . Тогда

$$\ell_X(B) = \ell_X \left(\sum_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} \ell_X(B_i) = \bigcap_{i \in I} X_i = 0.$$

Из утверждения 3 леммы 12 вытекает, что $B = A$. Тогда $1 \in \sum_{i \in I} B_i$. Поэтому существует конечное подмножество J в I , удовлетворяющее условию

$$B = \sum_{j \in J} B_j.$$

Тогда

$$\bigcap_{j \in J} X_j = \bigcap_{j \in J} \ell_X(B_j) = \ell \left(\sum_{j \in J} B_j \right) = \ell_X(A) = 0.$$

Пятое утверждение вытекает из четвертого.

Докажем шестое утверждение. Пусть B — максимальный идеал кольца A , содержащий $r_A(X)$. Если $\ell_X(B) = 0$, то в силу первого утверждения

$$A = B + r_A(X) = B,$$

и получаем противоречие. Поэтому $\ell_X(B) \neq 0$. В силу части 2 леммы 10, $\ell_X(B)$ — простой модуль. В силу четвертого утверждения, $\ell_X(B)$ совпадает с одним из модулей $X_1, \dots, X_n$. Поэтому идеал B совпадает с одним из идеалов $r_A(X_1), \dots, r_A(X_n)$, и кольцо $A/r_A(X)$ имеет только конечное число максимальных правых идеалов.

Предложение 1. Пусть A — регулярное кольцо, в котором все идемпотенты центральны, и M — правый A -модуль. Тогда следующие условия равносильны:

- (1) M — коммутационный правый A -модуль;
- (2) либо M прост, либо

$$M = \bigoplus_{i \in I} M_i, \quad |I| > 1,$$

где все M_i — попарно неизоморфные простые модули, и

$$\bigcap_{j \neq i} r_A(M_j) \not\subseteq r_A(M_i)$$

для каждого $i \in I$.

Доказательство. Хорошо известно, что A — инвариантное кольцо, над которым все модули полупрimitives (см., например, [15, 7.2, 22.3, 22.1]). Поэтому импликация (2) $\Rightarrow$ (1) следует из леммы 11, а импликация (1) $\Rightarrow$ (2) вытекает из леммы 8.

Доказательство теоремы 1. Первое утверждение вытекает из утверждений 4, 5 и 6 леммы 12.

Докажем второе утверждение. В силу утверждения 4 леммы 12, можно считать, что каждый ненулевой конечнопорожденный подмодуль в M является существенным расширением конечной прямой суммы простых модулей. В силу леммы 8, можно считать, что модуль M полупрост. Теперь искомое утверждение вытекает из леммы 11.

Третье утверждение вытекает из предложения 1.

Список литературы

1. Al-Shaniyafi Y., Smith P. F., Comultiplication modules over commutative rings. *J. Commutative Algebra* (2011) **3**, 1–29.

2. Ansari-Toroghy H., Farshadifar H., The dual notion of multiplication modules. *Taiwanese J. Math.* (2007) **11**, 1189–1201.
3. Ansari-Toroghy H., Farshadifar H., Comultiplication modules and related results. *Honam Math. J.* (2008) **30**, 91–99.
4. Ansari-Toroghy H., Farshadifar H., On comultiplication modules. *Korean Ann. Math.* (2008) **25**, 57–66.
5. Ansari-Toroghy H., Farshadifar H., On endomorphisms of multiplication and comultiplication modules. *Arch. Math.* (2008) **44**, 9–15.
6. Ansari-Toroghy H., Farshadifar H., Strong comultiplication modules. *CMU. J. Nat. Sci.* (2009) **8**, 105–113.
7. Ansari-Toroghy H., Farshadifar H., On multiplication and comultiplication modules. *Acta Math. Sci.* (2011) **B31**, 694–700.
8. Ansari-Toroghy H., Farshadifar H., On the dual notion of multiplication modules. *Arabian J. Sci. Eng.* (2011) **36**, 925–932.
9. Ansari-Toroghy H., Farshadifar H., Mast-Zohouri M., Some remarks on multiplication and comultiplication modules. *Int. Math. Forum* (2009) **4**, 287–291.
10. Atani R. E., Atani S. E., Comultiplication modules over a pullback of Dedekind domains. *Czech. Math. J.* (2009) **59**, 1103–1114.
11. Atani R. E., Atani S. E., Weak comultiplication modules over a pullback of commutative local Dedekind domains. *Algebra Discrete. Math.* (2009) **1**, 1–13.
12. Atani S. E., Saraei F. E. K., Indecomposable primarily comultiplication modules over a pullback of two Dedekind domains. *Colloq. Math.* (2010) **120**, 23–42.
13. Kasch F., *Modules and Rings*. Academic Press, London, 1982.
14. Tuganbaev A. A., *Semidistributive rings and modules*. Kluwer, Dordrecht, 1998.
15. Tuganbaev A. A., *Rings close to regular*. Kluwer, Dordrecht, 2002.

Статья поступила 22.02.2012.