Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Е. Ефимов, Оценка нормы разности между частичными произведениями некоторых последовательностей линейных операторов, *Дискрет. матем.*, 2012, том 24, выпуск 3, 66–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1198>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:48:40

Оценка нормы разности между частичными произведениями некоторых последовательностей линейных операторов

© 2012 г. Д. Е. Ефимов

Аналогично частичной сумме ряда, вводится понятие частичного произведения последовательности линейных операторов. Доказываются верхние оценки норм разностей между частичными произведениями некоторых последовательностей ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве и верхние оценки сумм степеней сингулярных чисел операторов, получаемых как разность между частичными произведениями некоторых последовательностей ограниченных линейных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве. Результаты используются для оценки точности решений интегральных уравнений.

1. Введение

Векторное пространство X с отмеченной нормой называется нормированным пространством. Нормированное пространство, полное относительно указанной метрики, называется банаховым пространством.

Пусть в пространстве X дано некоторое точечное множество D . Напомним некоторые определения из [2]. Всякая функция T , которая каждому элементу $f \in D$ относит некоторый элемент $Tf = g \in \Delta \subseteq X$, называется оператором в пространстве X с областью определения D и множеством значений Δ , состоящим из всех $g = Tf$, где f пробегает всё D .

Оператор T называется линейным, если его область определения D есть линейное многообразие и

$$T(\alpha f + \beta g) = \alpha Tf + \beta Tg$$

для любых $f, g \in D$ и любых комплексных α, β .

Линейный оператор T назовем ограниченным, если

$$\sup\{\|Tf\|: f \in D, \|f\| \leq 1\} < \infty.$$

Норма ограниченного линейного оператора T определяется равенством

$$\|T\| = \sup\{\|Tf\|: f \in D, \|f\| = 1\}.$$

Обозначим $L(X)$ множество ограниченных линейных операторов, определенных всюду в банаховом пространстве X . Если $S, T \in L(X)$, то операторы ST и TS также являются ограниченными линейными операторами, определенными всюду в X , при этом

$$\|ST\| \leq \|S\|\|T\|, \quad \|TS\| \leq \|T\|\|S\|.$$

Пусть $\tilde{A} = A_1, A_2, \dots$ — последовательность операторов из $L(X)$. Будем называть

$$F(\tilde{A}) = \prod_{k=1}^n A_k$$

частичным произведением последовательности ограниченных линейных операторов.

2. Основные результаты

Теорема 1. Пусть $\tilde{A} = A_1, A_2, \dots$ и $\tilde{A}' = A'_1, A'_2, \dots$ — две последовательности операторов из $L(X)$. Пусть члены последовательности обладают следующими свойствами:

- (а) $A_i A'_{i+1} = A'_i A_{i+1} = A'_i A'_{i+1}$ при любом $i \in \mathbf{N}$;
- (б) $\|A_i - A'_i\| \leq \lambda$ при любом $i \in \mathbf{N}$.

Тогда

$$\|F_n(\tilde{A}) - F_n(\tilde{A}')\| \leq \lambda^n.$$

Доказательство. Раскрыв скобки в выражении $\prod_{k=1}^n (A_k - A'_k)$ и воспользовавшись условием (а) теоремы, получим, что

$$\prod_{k=1}^n (A_k - A'_k) = \prod_{k=1}^n A_k - \prod_{k=1}^n A'_k.$$

Отсюда следует, что

$$\|F_n(\tilde{A}) - F_n(\tilde{A}')\| \leq \prod_{k=1}^n \|A_k - A'_k\|.$$

Используя условие (б), получаем оценку

$$\|F_n(\tilde{A}) - F_n(\tilde{A}')\| \leq \lambda^n,$$

что и требовалось доказать.

Гильбертово пространство — векторное пространство H над полем комплексных (или действительных) чисел вместе с комплексной (действительной) функцией (x, y) , определенной на $H \times H$ и обладающей следующими свойствами:

- (1) $(x, y) = 0$ в том и только в том случае, если $x = 0$;
- (2) $(x, x) \geq 0$ для всех $x \in H$;
- (3) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$, $x, y, z \in H$;
- (4) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$, $x, y \in H$, α — комплексное число;
- (5) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, $x, y \in H$;

(6) если $x_n \in H$, $n = 1, 2, \dots$, и

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} (x_n - x_m, x_n - x_m) = 0,$$

то существует такой элемент $x \in H$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x - x_n, x - x_n) = 0;$$

элемент x называется пределом последовательности $x_n \in H$;

(7) H – бесконечное векторное пространство.

Пространство называется сепарабельным, если оно содержит счетное всюду плотное множество.

Всюду ниже мы будем рассматривать сепарабельные гильбертовы пространства. Сингулярными числами оператора K называются неотрицательные квадратные корни собственных чисел оператора K^*K , где K^* – оператор, сопряженный к K . Сингулярные числа мы всегда будем располагать в порядке возрастания с учетом кратности (см. [1]).

Сингулярное число оператора K с номером i будем обозначать $\sigma_i(K)$.

Определенный всюду в H линейный оператор A называется вполне непрерывным, если он переводит всякое ограниченное множество точек в множество, компактное в смысле сильной сходимости (см. [1]). Множество определенных всюду в H вполне непрерывных операторов будем обозначать H_∞ .

Оценка сингулярных чисел вполне непрерывных операторов, полученных при помощи произведения или суммы других операторов изучалась во многих работах. Обзоры результатов можно найти в [2, 3]. Тем не менее, задача оценки сингулярных чисел линейных операторов, полученных при помощи других действий, остается по-прежнему актуальной.

Для дальнейшего изложения нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $K = K_1 K_2 \dots K_m$, где $K_i \in H_\infty$ для всех $i \in \{1, \dots, m\}$, $\sigma_j(K_i) \leq \alpha_i$ для всех $j \in \mathbb{N}$, $i = \{1, \dots, m\}$.

Пусть также для некоторого $u > 0$ ряд $\sum_i \alpha_i^u$ сходится.

Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ – сингулярные числа оператора K .

Тогда ряд $\sum_i \gamma_i^u$ сходится и

$$\sum_i \gamma_i^u \leq \sum_i \alpha_i^{um}.$$

Доказательство. Из теоремы Хорна [2] следует что для сингулярных чисел $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ произведения вполне непрерывных операторов A и B с сингулярными числами $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ и $\beta_1, \beta_2, \dots$, соответственно, для любого $u > 0$ и любого $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i^u \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i^u \beta_i^u.$$

Устремив n к бесконечности, получим, что

$$\sum_i \gamma_i^u \leq \sum_i \alpha_i^u \beta_i^u.$$

Докажем утверждение леммы индукцией по m . При $m = 1$ утверждение леммы очевидно. Пусть оно выполнено для $m - 1$, $m \geq 2$, докажем его для m . Обозначим $\beta_1, \beta_2, \dots$ сингулярные числа $K_2 \cdots K_m$. Из соотношения, доказанного выше, следует, что

$$\sum_i \gamma_i^u \leq \sum_i \alpha_i^u \beta_i^u.$$

Рассмотрим ряды $\sum_i \alpha_i^{qu}$ и $\sum_i \beta_i^{pu}$, где $p = m/(m-1)$, $q =$. Так как $p > 1$ и $q > 1$, ряды сходятся и поскольку $p^{-1} + q^{-1} = 1$, к правой части вышеприведенного соотношения можно применить неравенство Гельдера, откуда следует, что

$$\sum_i \gamma_i^u \leq \left(\sum_i \beta_i^{pu} \right)^{1/p} \left(\sum_i \alpha_i^{qu} \right)^{1/q}.$$

По предположению индукции, для первого сомножителя в правой части справедлива оценка

$$\left(\sum_i \beta_i^{pu} \right)^{1/p} \leq \left(\sum_i \alpha_i^{pu(m-1)} \right)^{(m-1)/m} = \left(\sum_i \alpha_i^{mu} \right)^{1-1/m}.$$

Для второго сомножителя в правой части справедливо равенство

$$\left(\sum_i \alpha_i^{qu} \right)^{1/q} = \left(\sum_i \alpha_i^{mu} \right)^{1/m}.$$

Перемножив, получаем, что

$$\sum_i \gamma_i^u \leq \sum_i \alpha_i^{um},$$

что и требовалось доказать.

Для конечномерных матриц утверждение леммы доказано в [6].

Теорема 2. Пусть $\tilde{A} = A_1, A_2, \dots$ и $\tilde{A}' = A'_1, A'_2, \dots$ — последовательности операторов из $L(H)$, и пусть члены последовательностей обладают следующими свойствами:

- (а) $A_i A'_{i+1} = A'_i A_{i+1} = A'_i A'_{i+1}$ при любом $i \in \mathbb{N}$;
- (б) $(A_j - A'_j) \in H_\infty$ и $\sigma_i(A_j - A'_j) \leq \alpha_i$ при любых $i, j \in \mathbb{N}$;
- (в) для некоторого $u > 0$ ряд $\sum_i \alpha_i^u$ сходится.

Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ — сингулярные числа оператора $F_n(\tilde{A}) - F_n(\tilde{A}')$.

Тогда ряд $\sum_i \gamma_i^u$ сходится, и

$$\sum_i \gamma_i^u \leq \sum_i \alpha_i^{nu}.$$

Пусть A — ограниченный линейный оператор, определенный всюду в сепарабельном гильбертовом пространстве H , и пусть $\{f_k\}_1^\infty, \{e_k\}_1^\infty$ — ортонормированные базисы в H . Если ряд $\sum_{i,k} |(Af_k, e_i)|^2$ сходится, то величину

$$N(A) = \sqrt{\sum_{i,k} |(Af_k, e_i)|^2}$$

назовем абсолютной нормой оператора A .

Следствие 1. Пусть $\tilde{A} = A_1, A_2, \dots$ и $\tilde{A}' = A'_1, A'_2, \dots$ — последовательности операторов из $L(H)$, и пусть члены последовательностей обладают следующими свойствами:

- (а) $A_i A'_{i+1} = A'_i A_{i+1} = A'_i A'_{i+1}$ при любом $i \in \mathbb{N}$;
- (б) $(A_j - A'_j) \in H_\infty$ и $\sigma_i(A_j - A'_j) \leq \lambda_i$ при любых $i, j \in \mathbb{N}$;
- (в) ряд $\sum_i \alpha_i^2$ сходится.

Тогда

$$N(F_n(\tilde{A}) - F_n(\tilde{A}')) \leq \sqrt{\sum_j \lambda_j^{2n}}.$$

Пользуясь методом, использованным в [2] для доказательства теоремы 4, получаем следующую теорему.

Теорема 3. Пусть $\tilde{A} = A_1, A_2, \dots$ и $\tilde{A}' = A'_1, A'_2, \dots$ — последовательности операторов из $L(H)$, и пусть члены последовательностей обладают следующими свойствами:

- (а) $A_i A'_{i+1} = A'_i A_{i+1} = A'_i A'_{i+1}$ при любом $i \in \mathbb{N}$;
- (б) $(A_j - A'_j) \in H_\infty$ и $\sigma_i(A_j - A'_j) \leq \alpha_i$ при любых $i, j \in \mathbb{N}$;
- (в) для некоторого $u > 0$ ряд $\sum_i \alpha_i^u$ сходится.

Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ — сингулярные числа оператора $F_n(\tilde{A}) - F_n(\tilde{A}')$.

Тогда ряд $\sum_i \gamma_i^{u/n}$ сходится и

$$\sum_i \gamma_i^{u/n} \leq \sum_i \alpha_i^u.$$

3. Пример применения

Рассмотрим следующее применение полученных результатов. Рассмотрим пространство $L^2(a, b)$ (см. [3], с. 174). Элементами $L^2(a, b)$ являются классы эквивалентных между собой (совпадающих почти всюду) действительных, квадратично-суммируемых функций, определенных на (a, b) . Норма элемента $f(x)$ пространства $L_2(a, b)$ есть

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}.$$

Пусть на $(a, b) \times (a, b)$ задана квадратично-суммируемая функция $K(x, s)$, $a \leq x, s \leq b$. Отображение $A: L^2(a, b) \rightarrow L^2(a, b)$, определяемое формулой

$$Af(x) = \int_a^b K(x, s) f(s) ds$$

является ограниченным линейным оператором. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x)$$

при условиях, что ядро $K(x, s)$, $a \leq x, s \leq b$, уравнения квадратично-суммируемо и $|\lambda| < B^{-1}$, где

$$B^2 = \int_a^b \int_a^b K^2(x, s) dx ds,$$

$f(x) \in L^2(a, b)$, имеют единственное квадратично-суммируемое решение. Для нахождения решения используется метод последовательных приближений

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= f(x), \\ \varphi_1(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi_0(s) ds, \\ &\dots \\ \varphi_{n+1}(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi_n(s) ds, \end{aligned}$$

при $|\lambda| \leq B^{-1}$ последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ равномерно сходится к решению уравнения.

Этот метод представим посредством итерированных ядер $K_n(x, s)$:

$$\begin{aligned} K_1(x, s) &= K(x, s), \\ K_{n+1}(x, s) &= \int_a^b K_n(x, z) K(z, s) dz. \end{aligned}$$

Очевидно, что отображение функции $f(x) \in L^2(a, b)$, заданное посредством формулы $\int_a^b K_n(x, s) f(s) ds$, есть $A^n f(x)$.

Зачастую ядро уравнения известно с некоторой погрешностью. Рассмотрим второе уравнение

$$\varphi'(x) - \lambda \int_a^b K'(x, s) \varphi'(s) ds = f(x).$$

Ядро $K'(x, s)$, $a \leq x, s \leq b$, удовлетворяет следующим условиям: оно квадратично-суммируемо и

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b (K'(x, s))^2 dx ds &= B^2, \\ \int_a^b K(x, z) K'(z, x) dz &= \int_a^b K'(x, z) K(z, s) dz = \int_a^b K'(x, z) K'(z, s) dz. \end{aligned}$$

Зададим оператор $A': L^2(a, b) \rightarrow L^2(a, b)$ формулой

$$A' f(x) = \int_a^b K'(x, s) f(s) ds.$$

Пусть также выполняется условие

$$\|A - A'\| \leq \mu.$$

Тогда последовательности линейных ограниченных операторов $\tilde{A} = A, A, \dots$ и $\tilde{A}' = A', A', \dots$ удовлетворяют условиям теоремы 1, и норму разности между решением

одного уравнения и другого можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \|\varphi(x) - \varphi'(x)\| &= \left\| \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n K_n(x, s) \right) f(s) ds - \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n K'_n(x, s) \right) f(s) ds \right\| \\
 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n F_n(\tilde{A}) f(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n F_n(\tilde{A}') f(x) \right\| \\
 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^n \|F_n(\tilde{A}) - F_n(\tilde{A}')\| \|f\| \\
 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^n \mu^n \|f\| = \|f\| \frac{1}{1 - |\lambda|\mu}
 \end{aligned}$$

при $|\lambda|\mu < 1$.

Список литературы

1. Ахиезер Н. И., Глазман И. М., *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*. Наука, Москва, 1966.
2. Horn A., On the singular values of a product of completely continuous operators. *Proc. Natl. Acad. USA* (1950) **36**, №7, 374–375.
3. Садовничий В. А., *Теория операторов*. Дрофа, Москва, 2001.
4. Маркус А. С., Собственные и сингулярные числа суммы и произведения линейных операторов. *Успехи матем. наук* (1964) **19**, №4, 93–123.
5. Ефимов Д. Е., Оценка экспонента некоторых множеств неотрицательных матриц. *Дискретная математика* (1990) **11**, №4, 79–88.

Статья поступила 21.10.2011.