Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Б. Алексеев, Р. Р. Омаров, О приближении максимально-нелинейных булевых функций почти линейными функциями, *Дискрет. матем.*, 2012, том 24, выпуск 3, 73–81

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1199>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 16:23:02

О приближении максимально-нелинейных булевых функций почти линейными функциями

© 2012 г. В. Б. Алексеев, Р. Р. Омаров

Известно, что максимальное расстояние между булевой функцией от $2n$ переменных и классом аффинных булевых функций от $2n$ переменных равно $2^{2n-1} - 2^{n-1}$. В работе исследуется расстояние между классом максимально-нелинейных булевых функций от $2n$ переменных и классом булевых функций от $2n$ переменных, у которых в полиноме Жегалкина присутствует не более k нелинейных слагаемых. Показано, что при любом фиксированном k и $n \rightarrow \infty$ это расстояние равно $2^{2n-1} - 3^k \cdot 2^{n-1} + o(2^{n-1})$.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект 10-01-00475-а.

В качестве одного из криптографических параметров булевых функций часто рассматривается нелинейность, характеризующая удаленность данной булевой функции от аффинных (иногда их называют линейными) функций. Это связано с тем, что аффинность булевой функции, используемой в криптографической системе, позволяет производить успешную атаку на такую систему и даже ее близость к аффинным функциям облегчает поиск слабостей в таких системах.

Обзор имеющихся результатов о нелинейности булевых функций можно найти в книге [1]. В частности, там описаны некоторые классы булевых функций с максимальным значением нелинейности. Качественно это означает, что такие функции плохо приближаются аффинными функциями. Однако в принципе может оказаться, что данную функцию с максимальным значением нелинейности удастся хорошо приблизить почти аффинной булевой функцией, то есть булевой функцией с небольшим числом нелинейных слагаемых в ее полиноме Жегалкина. Вопрос о возможностях такой ситуации и исследуется в данной работе.

Приведем необходимые определения.

Пусть n — произвольное натуральное число. Через V_n будем обозначать векторное пространство наборов длины n с компонентами из $\{0, 1\}$ с операцией $\oplus$ покоординатного сложения векторов по модулю 2.

Определение 1. Пусть f — булева функция от n переменных, то есть $f: V_n \rightarrow \{0, 1\}$. Ее весом $wt(f)$ будем называть количество наборов, на которых функция равна 1. Так как у функции могут быть фиктивные переменные, то в некоторых случаях для определенности мы будем писать $wt_n(f)$, чтобы явно указать, на каком множестве переменных рассматривается данная функция.

Определение 2. Пусть f, g — булевы функции от n переменных. Расстоянием от булевой функции f до булевой функции g называется величина

$$\text{dist}(f, g) = \text{wt}(f \oplus g),$$

то есть количество наборов, на которых значения f и g различаются. Расстоянием от f до множества M булевых функций от n переменных назовем величину

$$\text{dist}(f, M) = \min_{g \in M} \text{dist}(f, g).$$

Под расстоянием между двумя множествами булевых функций M и N будем понимать

$$\text{dist}(M, N) = \min_{\substack{g \in M \\ h \in N}} \text{dist}(g, h).$$

Определение 3. Пусть $x \in V_n, y \in V_n$. Через $\langle x, y \rangle$ будем обозначать скалярное произведение x и y :

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 \oplus \dots \oplus x_n y_n$$

где $\oplus$ — сложение по модулю 2.

Определение 4. Булева функция f от n переменных называется аффинной, если существуют $a = (a_1, \dots, a_n) \in V_n$ и $c \in \{0, 1\}$ такие, что

$$f(x) = \langle a, x \rangle \oplus c = a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n x_n \oplus c.$$

Множество всех аффинных булевых функций от n переменных будем обозначать A_n .

Отметим, что для любой аффинной булевой функции $f(x)$ от n переменных, отличной от константы, справедливо равенство

$$\text{wt}(f(x)) = 2^{n-1}.$$

Определение 5. Расстояние $\text{dist}(f, A_n)$ от булевой функции $f(x)$ от n переменных до множества A_n аффинных булевых функций называется нелинейностью функции $f(x)$ и обозначается через N_f .

Лемма 1 ([1, с. 234]). Для любой булевой функции $f(x)$ от n переменных справедливо неравенство

$$N_f \leq 2^{n-1} - 2^{n/2-1}.$$

Для четных n эта оценка достижима.

Определение 6. Булевы функции $f(x)$, для которых N_f равно максимально возможному значению среди всех функций от n переменных, называют максимально-нелинейными функциями (при четном n этот класс также называют классом бент-функций). Множество всех максимально-нелинейных булевых функций от $2n$ переменных будем обозначать B_{2n} .

Определение 7. Через $\mathbb{AE}_n^k$ будем обозначать класс всех булевых функций от n переменных вида $X_1 \oplus \dots \oplus X_k \oplus l(x)$, где каждое X_j — конъюнкция некоторых переменных или 0, а $l(x) \in A_n$. При $k = 0$ полагаем $\mathbb{AE}_n^0 = A_n$.

Введем функцию

$$\rho_k(U) = \text{dist}(U, \mathbb{AE}_{2n}^k),$$

где U — некоторое множество функций от $2n$ переменных. В данной статье мы исследуем поведение функции $\rho_k(B_{2n})$ при произвольном фиксированном k .

Одним из широко известных классов максимально-нелинейных булевых функций является класс Мэйорана–МакФарланда.

Определение 8. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$. Определим класс Мэйорана–МакФарланда определяется как класс всех булевых функций $f(x, y)$ от $2n$ переменных вида

$$f(x, y) = \langle \pi(y), x \rangle \oplus \Phi(y),$$

где π — произвольная подстановка на множестве V_n , а $\Phi(y)$ — произвольная булева функция от n переменных. Будем обозначать его через M_{2n} .

Известно (см., например, [1]), что все функции из класса Мэйорана–МакФарланда являются максимально-нелинейными. Ранее авторами [2, 3] было показано, что

$$\rho_k(M_{2n}) > 2^{2n-1} - 3^k \cdot 2^{n-1}, \quad k = 1, 2.$$

Оказывается, что эта оценка справедлива для всех k и даже для всего класса B_{2n} .

Теорема 1. Пусть B_{2n} — множество всех максимально-нелинейных булевых функций от $2n$ переменных, тогда для любого натурального k

$$\rho_k(B_{2n}) \geq 2^{2n-1} - 3^k \cdot 2^{n-1}.$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ — произвольная максимально-нелинейная булева функция от $2n$ переменных, а

$$g(x) = X_1 \oplus \dots \oplus X_k \oplus \langle a, x \rangle \oplus c$$

— произвольная функция из класса $\mathbb{AE}_{2n}^k$, где каждое X_i — конъюнкция некоторых переменных или 0. Требуется доказать, что

$$\text{dist}(f(x), g(x)) \geq 2^{2n-1} - 3^k \cdot 2^{n-1}.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \oplus \langle a, x \rangle \oplus c, \\ g'(x) &= X_{I_1} \oplus \dots \oplus X_{I_k}. \end{aligned}$$

Заметим, что вес суммы двух функций $h_1(x) \oplus h_2(x)$ можно вычислить, используя следующую процедуру. Сначала мы рассматриваем $h_1(x)$ и ее вес и замечаем, что при переходе от $h_1(x)$ к $h_1(x) \oplus h_2(x)$ в тех точках, где $h_2(x) = 0$, ничего не меняется, а в тех точках, где $h_2(x) = 1$, в вес добавляется 1, если $h_1(x) = 0$, и вычитается 1, если $h_1(x) = 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} \text{dist}(f(x), g(x)) &= \text{wt}(f(x) \oplus g(x)) = \text{wt}(f'(x) \oplus g'(x)) \\ &= \text{wt}(f'(x)) + \sum_{\substack{x \in V_{2n} \\ g'(x)=1}} (-1)^{f'(x)}. \end{aligned}$$

Условие $g'(x) = 1$ означает, что нечетное число слагаемых X_l обращается в 1 на наборе x . Докажем следующую лемму, которая является вариантом известного принципа включения–исключения.

Лемма 2. Пусть задано семейство подмножеств $A_1, A_2, \dots, A_k$ некоторого множества, и пусть D — множество всех элементов, содержащихся в нечетном количестве подмножеств этого семейства. Пусть на множестве элементов из $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ задана весовая функция $w(x)$. Тогда

$$\sum_{x \in D} w(x) = \sum_{t=1}^k (-2)^{t-1} \sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_t\} \subseteq \{1, 2, \dots, k\}} \sum_{x \in A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_t}} w(x).$$

Доказательство. Пусть элемент x содержится ровно в p подмножествах из $A_1, \dots, A_k$. Тогда его вес $w(x)$ будет присутствовать в правой части с коэффициентом

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^k (-2)^{t-1} \binom{p}{t} &= \frac{1}{2} \left[1 - \sum_{t=0}^k \binom{p}{t} (-2)^t \right] = \frac{1 - (1-2)^p}{2} \\ &= \frac{1 - (-1)^p}{2} = \begin{cases} 0 & \text{если } p \text{ чётно,} \\ 1 & \text{если } p \text{ нечётно.} \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, в правой части каждый вес $w(x)$ будет присутствовать с тем же коэффициентом, что и в левой части. Лемма доказана.

Учитывая лемму 2 и соотношение, полученное перед ней, получаем, что

$$\text{dist}(f(x), g(x)) = wt(f'(x)) + \sum_{t=1}^k (-2)^{t-1} \sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_t\} \subseteq \{1, 2, \dots, k\}} \sum_{x \in V_{2n}, X_{i_1} \dots X_{i_t} = 1} (-1)^{f'(x)}.$$

Лемма 3. Пусть $A \subseteq \{1, 2, \dots, 2n\}$, и пусть X_A — конъюнкция всех переменных x_i таких, что $i \in A$. Пусть $h(x)$ — максимально-нелинейная функция от $2n$ переменных. Тогда

$$\left| \sum_{x \in V_{2n}, X_A = 1} (-1)^{h(x)} \right| \leq 2^n.$$

Доказательство. Пусть $\xi^A \in V_{2n}$ — такой вектор, что $\xi_i^A = 1$, если $i \in A$, и $\xi_i^A = 0$, если $i \notin A$. Пусть

$$L_A = \{x \in V_{2n} : x_i = 0 \text{ для всех } i \in A\}.$$

Заметим, что L_A есть линейное подпространство в V_{2n} размерности $2n - |A|$ и

$$\{x : x \in V_{2n}, X_A = 1\} = \{\xi^A \oplus x : x \in L_A\} = \xi^A + L_A.$$

Пусть $L_A^\perp$ — ортогональное дополнение к подпространству L_A в V_{2n} .

Так как по условию $h(x)$ — максимально-нелинейная функция от $2n$ переменных, то для нее существует такая функция $\tilde{h}(x)$ также от $2n$ переменных (дуальная функция к

$h(x)$), что для $h(x)$ и $\tilde{h}(x)$ выполняется равенство (лемма 6.22 при $b = 0$ в [1, с. 240]):

$$\begin{aligned} \sum_{x \in V_{2n}, X_A=1} (-1)^{h(x)} &= \sum_{x \in \xi^A + L_A} (-1)^{h(x)} = 2^{\dim L_A - n} \sum_{x \in L_A^\perp} (-1)^{\tilde{h}(x) \oplus \langle \xi^A, x \rangle} \\ &= 2^{n-|A|} \sum_{x \in L_A^\perp} (-1)^{\tilde{h}(x) \oplus \langle \xi^A, x \rangle}. \end{aligned}$$

Так как размерность $L_A^\perp$ равна $|A|$, то мощность $L_A^\perp$ равна $2^{|A|}$ и

$$\left| \sum_{x \in L_A^\perp} (-1)^{\tilde{h}(x) \oplus \langle \xi^A, x \rangle} \right| \leq 2^{|A|}.$$

Поэтому

$$\left| \sum_{x \in V_{2n}, X_A=1} (-1)^{h(x)} \right| \leq 2^{n-|A|} \cdot 2^{|A|} = 2^n.$$

Лемма доказана.

Так как

$$f'(x) = f(x) \oplus \langle a, x \rangle \oplus c,$$

то для любой функции $l(x)$ получаем, что

$$\text{dist}(f(x), l(x)) = \text{dist}(f'(x), l(x) \oplus \langle a, x \rangle \oplus c).$$

Поэтому

$$\text{dist}(f'(x), A_{2n}) = \text{dist}(f(x), A_{2n}).$$

Поскольку $f(x)$ — максимально-нелинейная функция по условию, то и $f'(x)$ — максимально-нелинейная функция. Тогда по лемме 3 получаем, что

$$\begin{aligned} \left| \sum_{t=1}^k (-2)^{t-1} \sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_t\} \subseteq \{1, 2, \dots, k\}} \sum_{x \in V_{2n}, X_{i_1} \dots X_{i_t}=1} (-1)^{f'(x)} \right| \\ \leq 2^n \sum_{t=1}^k 2^{t-1} \binom{k}{t} = 2^{n-1} [(1+2)^k - 1] = (3^k - 1) 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Так как $f'(x)$ — максимально-нелинейная функция от $2n$ переменных, то

$$wt(f'(x)) = \text{dist}(f'(x), 0) \geq 2^{2n-1} - 2^{n-1}.$$

С использованием соотношения, полученного перед леммой 3, находим, что

$$\text{dist}(f(x), g(x)) \geq 2^{2n-1} - 2^{n-1} - (3^k - 1) 2^{n-1} = 2^{2n-1} - 3^k 2^{n-1}.$$

В силу произвольности выбора функций $f(x)$ и $g(x)$, заключаем, что

$$\rho_k(B_{2n}) \geq 2^{2n-1} - 3^k \cdot 2^{n-1}.$$

Теорема 1 доказана.

Так как $M_{2n} \subseteq B_{2n}$, то

$$\rho_k(M_{2n}) \geq \rho_k(B_{2n}) \geq 2^{2n-1} - 3^k \cdot 2^{n-1}.$$

Возникает вопрос, насколько эти оценки точны. Ответ на него дает следующая теорема.

Теорема 2. При любом фиксированном k и $n \rightarrow \infty$ верна оценка

$$\rho_k(M_{2n}) = 2^{2n-1} - 3^k \cdot 2^{n-1} + o(2^{n-1}).$$

Доказательство. Для доказательства построим пример функций $f(x, y) \in M_{2n}$ и $g(x, y) \in \mathbb{AE}_{2n}^k$, $x, y \in V_n$, для которых

$$\text{dist}(f, g) = 2^{2n-1} - 3^k \cdot 2^{n-1} + o(2^{n-1}).$$

Пусть $n = pk + t$, $0 \leq t < k$. Рассмотрим функцию

$$v(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p) = \bigoplus_{i=1}^p x_i y_i \oplus y_1 \oplus \dots \oplus y_p \oplus \text{sg}(y_1, \dots, y_p),$$

где $\text{sg}(0, \dots, 0) = 0$ и $\text{sg}(y_1, \dots, y_p) = 1$, если $(y_1, \dots, y_p) \neq (0, \dots, 0)$.

Лемма 4. Для веса любой функции вида

$$w(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m) = \langle x, y \rangle \oplus \Phi(y),$$

где $\Phi(y)$ — произвольная функция, справедливо равенство

$$\text{wt}_{2m}(w(x, y)) = 2^{2m-1} - (-1)^{\Phi(\tilde{0})} 2^{m-1}.$$

Доказательство. При любой фиксации всех переменных y в функции w , кроме $y = (0, \dots, 0)$, получаем аффинную функцию от n переменных, отличную от константы, которая равна 1 на половине своих наборов. При $y = (0, \dots, 0)$ получаем константу $\Phi(\tilde{0})$. Поэтому вес $\text{wt}_{2m}(w(x, y))$ отличается от половины всех наборов на $(1/2)2^m$ вверх или вниз в зависимости от значения $\Phi(\tilde{0})$ и равен $2^{2m-1} - (-1)^{\Phi(\tilde{0})} \cdot 2^{m-1}$. Лемма доказана.

Лемма 5. Справедливо равенство

$$\text{wt}_{2p}(v(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p) \oplus x_1 \cdot x_2 \cdots x_p) = 2^{2p-1} - (3 \cdot 2^{p-1} - 2).$$

Доказательство. С использованием леммы 4 нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} & \text{wt}_{2p}(v(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p) \oplus x_1 \cdot x_2 \cdots x_p) \\ &= \text{wt}_{2p}(v(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p)) + \text{wt}_{2p}(x_1 \cdots x_p) \\ & \quad - 2 \text{wt}_{2p}(x_1 \cdot x_2 \cdots x_p \cdot v(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p)) \\ &= 2^{2p-1} - 2^{p-1} + 2^p - 2 \text{wt}_p(\text{sg}(y_1, \dots, y_p)) \\ &= 2^{2p-1} + 2^{p-1} - 2(2^p - 1) \\ &= 2^{2p-1} - (3 \cdot 2^{p-1} - 2). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть переменные $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ определены на V_n , и пусть

$$\begin{aligned}\tilde{X}_j &= (x_{p(j-1)+1}, x_{p(j-1)+2}, \dots, x_{pj}), \\ \tilde{Y}_j &= (y_{p(j-1)+1}, y_{p(j-1)+2}, \dots, y_{pj}), \quad j = 1, 2, \dots, k.\end{aligned}$$

Определим

$$f(x, y) = \bigoplus_{j=1}^k v(\tilde{X}_j, \tilde{Y}_j) \oplus \bigoplus_{i=pk+1}^n x_i y_i.$$

Тогда

$$f(x, y) = \langle x, y \rangle \oplus \Phi(y)$$

для некоторой функции $\Phi(y)$ и, следовательно, $f(x, y) \in M_{2n}$. Пусть K_j — конъюнкция всех переменных из $\tilde{X}_j$. Положим

$$g(x, y) = K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_k.$$

Тогда $g(x, y) \in \mathbb{AE}_{2n}^k$. Рассмотрим $\text{dist}(f(x, y), g(x, y))$. Мы видим, что

$$\begin{aligned}\text{dist}(f(x, y), g(x, y)) &= \text{wt}_{2n}(f(x, y) \oplus g(x, y)) \\ &= \text{wt}_{2n}\left(\bigoplus_{j=1}^k (v(\tilde{X}_j, \tilde{Y}_j) \oplus K_j) \oplus \bigoplus_{i=pk+1}^n x_i y_i\right).\end{aligned}$$

В силу леммы 5,

$$\text{wt}_{2p}(v(\tilde{X}_j, \tilde{Y}_j) \oplus K_j) = 2^{2p-1} - (3 \cdot 2^{p-1} - 2).$$

Положим

$$\begin{aligned}D &= 2^{2p-1} - (3 \cdot 2^{p-1} - 2), \\ E &= 2^{2p} - D = 2^{2p-1} + (3 \cdot 2^{p-1} - 2).\end{aligned}$$

Лемма 6. *Справедливо равенство*

$$\text{wt}_{2pk}\left(\bigoplus_{j=1}^k (v(\tilde{X}_j, \tilde{Y}_j) \oplus K_j)\right) = 2^{2pk-1} - \frac{1}{2}(3 \cdot 2^p - 4)^k.$$

Доказательство. Функция $\bigoplus_{j=1}^k (v(\tilde{X}_j, \tilde{Y}_j) \oplus K_j)$ равна 1, если нечетное число слагаемых обращается в 1. Заметим, что все слагаемые зависят от разных переменных. Поэтому

$$\begin{aligned}\text{wt}_{2pk}\left(\bigoplus_{j=1}^k (v(\tilde{X}_j, \tilde{Y}_j) \oplus K_j)\right) &= \sum_{i \text{ is odd}} \binom{k}{i} D^i E^{k-i} \\ &= \frac{1}{2}((D + E)^k - (E - D)^k) \\ &= \frac{1}{2}(2^{2pk} - (3 \cdot 2^p - 4)^k) \\ &= 2^{2pk-1} - \frac{1}{2}(3 \cdot 2^p - 4)^k.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Обозначим

$$\bigoplus_{j=1}^k (v(\tilde{X}_j, \tilde{Y}_j) \oplus K_j) = \varphi_1,$$

$$\bigoplus_{i=pk+1}^n x_i y_i = \varphi_2.$$

Заметим, что φ_1 и φ_2 зависят от разных переменных, и по леммам 6 и 4

$$wt_{2pk}(\varphi_1) = 2^{2pk-1} - \frac{1}{2}(3 \cdot 2^p - 4)^k,$$

$$wt_{2n-2pk}(\varphi_2) = 2^{2n-2pk-1} - 2^{n-pk-1}.$$

Тогда функция φ_1 как функция от $2pk$ переменных равна 0 на $2^{2pk-1} + \frac{1}{2}(3 \cdot 2^p - 4)^k$ наборах, а функция φ_2 как функция от $2n - 2pk$ переменных равна 0 на $2^{2n-2pk-1} + 2^{n-pk-1}$ наборах. Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} \text{dist}(f(x, y), g(x, y)) &= wt_{2n}(\varphi_1 \oplus \varphi_2) \\ &= \left(2^{2pk-1} - \frac{1}{2}(3 \cdot 2^p - 4)^k\right) (2^{2n-2pk-1} + 2^{n-pk-1}) \\ &\quad + \left(2^{2pk-1} + \frac{1}{2}(3 \cdot 2^p - 4)^k\right) (2^{2n-2pk-1} - 2^{n-pk-1}) \\ &= 2^{2n-1} - (3 \cdot 2^p - 4)^k 2^{n-pk-1} \\ &= 2^{2n-1} - 2^{n-pk-1} 2^{pk} 3^k \left(1 - \frac{4}{3 \cdot 2^p}\right)^k \\ &= 2^{2n-1} - 2^{n-1} 3^k \left(1 - \frac{4}{3 \cdot 2^p}\right)^k \\ &= 2^{2n-1} - 3^k 2^{n-1} + o(2^{n-1}), \end{aligned}$$

так как k есть константа и $p \rightarrow \infty$. Теорема 2 доказана.

С учетом того, что

$$\rho_k(B_{2n}) \leq \rho_k(M_{2n}),$$

из теорем 1 и 2 получаем следующие утверждения.

Теорема 3. При любом фиксированном k и $n \rightarrow \infty$ справедлива оценка

$$\rho_k(B_{2n}) = 2^{2n-1} - 3^k \cdot 2^{n-1} + o(2^{n-1}).$$

Теорема 4. При любом фиксированном k и $n \rightarrow \infty$ справедлива оценка

$$\rho_k(M_{2n}) = 2^{2n-1} - 3^k \cdot 2^{n-1} + o(2^{n-1}).$$

Список литературы

1. Логачев О. А., Сальников А. А., Ященко В. В., *Булевы функции в теории кодирования и криптологии*. МЦНМО, Москва, 2004.
2. Алексеев В. Б., Омаров Р. Р., Исследование одного параметра булевых функций, близкого к нелинейности. *Научные ведомости Белгородского государственного университета* (2009) **15 (70)**, №12/1, 81–87.
3. Алексеев В. Б., Омаров Р. Р., О расстояниях от максимально-нелинейных булевых функций до почти аффинных функций. В сб.: *Материалы XVI Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики»*. Нижегородский университет, Нижний Новгород, 2011, с. 24–28.

Статья поступила 8.06.2012.