Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Емец, Т. Н. Барболина, Классы лексикографической эквивалентности в евклидовой комбинаторной оптимизации на размещениях, *Дискрет. матем.*, 2007, том 19, выпуск 1, 95–104

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm12>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 07:52:29

Классы лексикографической эквивалентности в евклидовой комбинаторной оптимизации на размещениях

© 2007 г. О. А. Емец, Т. Н. Барболина

В статье рассматривается применение регулярных разбиений пространства к решению задач евклидовой комбинаторной оптимизации, в частности, линейных условных задач оптимизации на размещениях. Введено понятие точек пространства, эквивалентных относительно размещений, показано, что введенное отношение между точками является отношением эквивалентности. Приведены алгоритмы поиска элемента множества размещений, являющегося представителем комбинаторного класса эквивалентности, ближайшего к заданному классу в порядке лексикографического возрастания (убывания).

Рассмотрен также новый класс оптимизационных задач, именно, линейных условных задач лексикографической максимизации на размещениях. Предложены и обоснованы алгоритмы решения как одного частного случая, так и общего случая этого класса задач. Алгоритмы основываются на упорядоченном переборе допустимых точек в порядке лексикографического возрастания (убывания) и используют рассмотренные алгоритмы поиска ближайшего элемента множества размещений.

Как известно (см., например, [1, 2]), ряд практических задач приводит к оптимизационным задачам, в которых допустимые точки принадлежат некоторому множеству комбинаторной природы. Разработка методов и алгоритмов решения таких задач осуществляется, в частности, в рамках евклидовой комбинаторной оптимизации [1, 3–7], важным аспектом которой является оптимизация на размещениях. В [3–7] и других работах рассматриваются свойства и методы решения задач оптимизации на отдельных евклидовых комбинаторных множествах: перестановках, сочетаниях, полиперестановках. Однако задачи на множестве размещений обладают рядом особенностей, которые влекут за собой необходимость разработки специальных методов и алгоритмов решения таких задач. С другой стороны, имеет место определенная схожесть ряда свойств допустимых областей некоторых классов задач комбинаторной и дискретной оптимизации, что позволяет распространить отдельные методы дискретной оптимизации на задачи евклидовой комбинаторной оптимизации и, в частности, на задачи на размещениях. Заметим, что одним из современных направлений исследования задач дискретной оптимизации является использование регулярных разбиений пространства (см. например [8, 9]). В данной работе предлагается метод решения линейных условных задач оптимизации на размещениях, который использует идеи регулярных разбиений пространства и является развитием метода лексикографического перебора L -классов [9]. Терминология задач оптимизации на евклидовых

комбинаторных множествах будет использоваться в соответствии с [1]. В дальнейшем будут употребляться следующие факты и обозначения. Множество n первых натуральных чисел обозначим J_n . Под мультимножеством понимаем совокупность элементов $g \in \mathbf{R}$, $i \in J_n$, среди которых могут быть одинаковые. Всякое мультимножество $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ можно задать основанием $S(G) = (e_1, \dots, e_n)$ — кортежем разных элементов, и первичной спецификацией $[G] = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, под которой понимают кортеж кратностей — число повторений соответствующих элементов в мультимножестве. Не нарушая общности, можем в дальнейшем считать, что $0 < e_1 < \dots < e_n$ и $0 < g_1 \leq \dots \leq g_n$. Под k -выборкой из мультимножества G понимаем такое его подмультимножество, которое содержит k элементов. Элементами общего множества $E_{\eta n}^k(G)$ k -размещений являются все k -выборки из мультимножества G и только они. Выпуклая оболочка множества $E_{\eta n}^k(G)$ называется общим многогранником размещений и обозначается $\Pi_{\eta n}^k(G)$. Без нарушения общности можно считать, что $\eta_i \leq k$ для всех $i \in J_n$.

Рассмотрим ненулевой вектор $x \in \mathbf{R}^k$. Пусть x_i — его первая отличная от нуля координата. Если $x_i > 0$, то вектор x называется (см. [10]) лексикографически положительным, в этом случае пишут $x > 0$. Лексикографически неотрицательным называется вектор, который является нулевым или лексикографически положительным.

Пусть даны векторы $x, y \in \mathbf{R}^k$. Говорят, что вектор x лексикографически больше (не меньше) вектора y ($x > y$, соответственно, $x \geq y$), если $x - y > 0$, соответственно, $x - y \geq 0$. Если $x > y$ ($x \geq y$), то говорят, что вектор y лексикографически меньше (не больше) вектора x , и пишут $y < x$ (соответственно, $y \leq x$).

Будем также говорить, что вектор x_{i_m} , $i_m \in J_p$, является лексикографически максимальным (минимальным) вектором множества векторов $\{x_i \mid i \in J_p\}$, если он лексикографически не меньше (не больше) любого из векторов этого множества. По аналогии с L -эквивалентными точками (см. [9]) введем понятие точек, лексикографически эквивалентных относительно размещений.

Определение 1. Точки $x, y \in \mathbf{R}^k$, $x > y$, называются $L(E_{\eta n}^k(G))$ -эквивалентными (эквивалентными относительно размещений), если не существует точки $z \in E_{\eta n}^k(G)$ такой, что $x \geq z \geq y$; всякая точка $x \in \mathbf{R}^k$ считается $L(E_{\eta n}^k(G))$ -эквивалентной самой себе.

Очевидно, что введенное отношение эквивалентности относительно размещений является рефлексивным и симметричным. Покажем его транзитивность. Пусть точки x_1 и x_2 , x_2 и x_3 ($x_1 > x_2 > x_3$) являются $L(E_{\eta n}^k(G))$ -эквивалентными. Предположим, что при этом $L(E_{\eta n}^k(G))$ -эквивалентность точек x_1 и x_3 не имеет места, то есть существует такая точка $z \in E_{\eta n}^k(G)$, что $x_1 \geq z \geq x_3$. Для точек z и x_2 справедливо одно из соотношений $z \geq x_2$ либо $z < x_2$. В первом случае $x_1 \geq z \geq x_2$, что противоречит предположению о $L(E_{\eta n}^k(G))$ -эквивалентности точек x_1 и x_2 ; во втором случае получаем неэквивалентность точек x_2 и x_3 . Следовательно, предположение неверно и точки x_1 и x_3 являются $L(E_{\eta n}^k(G))$ -эквивалентными и введенное отношение транзитивно. Учитывая, что оно является также рефлексивным и симметричным, получаем, что отношение $L(E_{\eta n}^k(G))$ -эквивалентности точек пространства $\mathbf{R}^k$ является отношением эквивалентности, а значит, разбивает любое множество на классы эквивалентности, которые будем называть $L(E_{\eta n}^k(G))$ -классами. Каждый элемент множества размещений образует отдельный класс; будем называть такие классы комбинаторными. Остальные классы, некомбинаторные, состоят из точек, не принадлежащих множеству $E_{\eta n}^k(G)$.

Существенным является возможность упорядочить элементы фактор множества $F = M/L(E_{\eta n}^k(G))$ в соответствии с лексикографическим порядком. Пусть $V, V' \in F$,

$V \neq V'$, и известны некоторые представители $x \in V$ и $x' \in V'$.

Определение 2. Будем говорить, что класс V лексикографически больше класса V' ($V \succ V'$) тогда и только тогда, когда $x \succ x'$.

Очевидно, что введенное отношение не зависит от выбора представителей классов. Действительно, пусть представители $y \in V$, $y' \in V'$ отличны от x , x' . Так как x , x' принадлежат к разным классам эквивалентности, существует такая точка $z \in E_{\eta n}^k(G)$, что $x \geq z \geq x'$. Но так как x и y принадлежат одному классу, $y \geq z$. Аналогично из включения $x', y' \in V'$, следует, что $y' \leq z$. Таким образом, $y \geq z \geq y'$, откуда $y \geq y'$. Однако равенство не может иметь места, так как y и y' принадлежат разным $L(E_{\eta n}^k(G))$ -классам. Значит, $y \succ y'$, откуда следует, что отношение лексикографического порядка $\succ$ на множестве классов эквивалентности не зависит от выбора представителей этих классов.

Отметим, что если для классов $V, V' \in F$ выполняется условие $V \succ V'$, то будем говорить, что класс V' лексикографически меньше класса V и будем писать $V' \prec V$.

Так как фактор множество F конечно (это следует из конечности множества $E_{\eta n}^k(g)$), оно может быть представлено в виде кортежа $L(E_{\eta n}^k(G))$ -классов, упорядоченных по возрастанию:

$$F = M/L(E_{\eta n}^k(G)) = (V_1, \dots, F_{|F|}), \quad V_i \prec V_{i+1}, \quad i \in J_{|F|-1}. \quad (1)$$

Обозначим $\lfloor V \rfloor$ комбинаторный класс, лексикографически максимальный среди $L(E_{\eta n}^k(G))$ -классов, которые предшествуют классу V в порядке (1); пусть $\lceil V \rceil$ — комбинаторный класс, лексикографически минимальный среди $L(E_{\eta n}^k(G))$ -классов, которые следуют за классом V в порядке (1).

В дальнейшем будет использоваться направленный перебор $L(E_{\eta n}^k(G))$ -классов, то есть переход от данного класса к предыдущему или последующему в порядке (1). Если на каждом шаге переход осуществляется к лексикографически меньшему классу, то будем говорить о переборе в порядке лексикографического убывания, если к большему, то о переборе в порядке лексикографического возрастания.

Пусть V — некоторый $L(E_{\eta n}^k(G))$ -класс и $x = (x_1, \dots, x_k)$ — его представитель. Обозначим $T^i = (t_1^i, \dots, t_{T_i}^i)$ — кортеж упорядоченных по возрастанию индексов координат точки x , равных элементу e_i основания мультимножества: $x_{t_j^i} = e_i$ при всех $j \in J_{|T^i|}$, $t_{j+1}^i > t_j^i$ при всех $j \in J_{|T^i|-1}$. Очевидно, что если точка x является элементом общего множества размещений, то $|T^i| \leq \eta_i$ при любом $i \in J_n$.

Пусть теперь $x \notin E_{\eta n}^k(G)$. Тогда выполняется хотя бы одно из условий:

- (1) существует координата, которая не является элементом множества $S(G)$,
- (2) существует кортеж T^i , число элементов в котором больше кратности η_i элемента e_i .

Пусть x_{ρ_1} — координата с наименьшим номером, не принадлежащая основанию мультимножества, то есть

$$\rho_1 = \min_{t \in J_k} \{t \mid x_t \notin S(G)\},$$

если $x_t \in S(G)$ при всех $t \in J_k$, то положим $\rho_1 = k + 1$. Положим также

$$\rho_2 = \min_{i \in J_n, |T^i| > \eta_i} \{t_{\eta_i+1}^i\},$$

если $|T^i| \leq \eta_i$ при всех $i \in J_n$, то $\rho_2 = k + 1$. Наконец, положим

$$\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\}.$$

Лемма 1. Если $\bar{x}$ — представитель класса V , отличный от x , то $\bar{x}_j = x_j$ при всех $j \in J_{\rho-1}$.

Доказательство. Пусть для некоторого $j \in J_{\rho-1}$ справедливы равенства $\bar{x}_i = x_i$ для всех $i \in J_{j-1}$ и $\bar{x}_j \neq x_j$. Пусть

$$\bar{G} = \{g_1, \dots, g_{\bar{\eta}}\} \setminus \{x_1, \dots, x_j\}, \quad \bar{\eta} = |\bar{G}|$$

и $\bar{g}_i, i \in J_{\bar{\eta}}$, — элементы мультимножества $\bar{G}$. Без нарушения общности можем считать, что $\bar{g}_i \leq \bar{g}_{i+1}$ при всех $i \in J_{\bar{\eta}-1}$. Если $\bar{x}_j < x_j$, то точка

$$z = (x_1, \dots, x_j, \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{\bar{\eta}-j}) \in E_{\eta_n}^k(G),$$

очевидно, удовлетворяет условию $x \succcurlyeq z \succ \bar{x}$, что противоречит $L(E_{\eta_n}^k(G))$ -эквивалентности точек x и $\bar{x}$. При $\bar{x}_j > x_j$ неэквивалентность точек x и $\bar{x}$ следует из справедливости соотношения

$$x \preccurlyeq (x_1, \dots, x_j, \bar{g}_{\bar{\eta}}, \dots, \bar{g}_{\bar{\eta}-(k-j)+1}) = z' \prec \bar{x},$$

где $z' \in E_{\eta_n}^k(G)$. Таким образом, предположение неверно, и $\bar{x}_j = x_j$ при всех $j \in J_{\rho-1}$.

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $\bar{x}$ — представитель класса V , отличный от x . Тогда либо $\bar{x}_\rho \notin S(G)$, либо $\bar{x}_\rho \in T^i$, где $|T^i| > \eta_i$.

Доказательство. Действительно, в противном случае, как легко видеть, точки $z_1 = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_\rho, \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{k-\rho})$, $z_2 = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_\rho, \bar{g}_{\bar{\eta}}, \dots, \bar{g}_{\bar{\eta}-(k-\rho)+1})$ принадлежат множеству $E_{\eta_n}^k(G)$, здесь $\bar{\eta}$ — мощность мультимножества

$$\bar{G} = \{g_1, \dots, g_{\eta_n}\} \setminus \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_\rho\},$$

$\bar{g}_i, i \in J_{\bar{\eta}}$, — его элементы, упорядоченные по неубыванию. Так как при этом выполняется одно из соотношений $x \succ z_1 \succcurlyeq \bar{x}$ (при $x_\rho > \bar{x}_\rho$), либо $x \prec z_2 \preccurlyeq \bar{x}$ (при $x_\rho < \bar{x}_\rho$), получаем противоречие с утверждением об $L(E_{\eta_n}^k(G))$ -эквивалентности точек x и $\bar{x}$.

Лемма доказана.

Из лемм 1, 2 вытекает следующее утверждение.

Предложение 1. Число ρ не зависит от выбора представителя $L(E_{\eta_n}^k(G))$ -класса.

Таким образом, это число является характеристикой $L(E_{\eta_n}^k(G))$ -класса.

Определение 3. Меньшее из чисел ρ_1, ρ_2 будем обозначать $\rho(V)$ и называть рангом $L(E_{\eta_n}^k(G))$ -класса.

Из определения ранга $L(E_{\eta_n}^k(G))$ -класса следует, что ранг некомбинаторного класса не превышает k , а для любой точки, являющейся элементом общего множества размещений, равен $k + 1$. Пусть M_1 — некоторое многогранное множество. Положим

$$M = M_1 \cap \Pi_{\eta_n}^k(G),$$

где $\Pi_{\eta_n}^k(G)$ — общий многогранник размещений. Пусть также $\tilde{x} \in M_1$, $V \in M/L(E_{\eta_n}^k(G))$ есть $L(E_{\eta_n}^k(G))$ -класс, представителем которого является точка $\tilde{x}$.

Далее мы рассмотрим несколько задач.

Задача 1. Найти представитель комбинаторного класса $[V]$, ближайшего слева к классу V в порядке (1).

В основе предлагаемого далее алгоритма решения задачи 1 лежит идея перебора $L(E_{\eta n}^k(G))$ -классов в порядке лексикографического убывания.

Рассмотрим некоторый $L(E_{\eta n}^k(G))$ -класс с представителем $\bar{x}$. Пусть $\rho = \rho(\bar{V})$, если $\bar{V}$ — некомбинаторный класс; если $\bar{x} \in E_{\eta n}^k(G)$, то положим $\rho = k$. Рассмотрим задачу поиска точки

$$x' = \text{lex max}\{x \mid x \in M'\}, \quad (2)$$

где многогранник M' является пересечением многогранника M с множеством, определяемым следующими условиями:

$$x_1 = \bar{x}_1, \dots, x_{\rho-1} = \bar{x}_{\rho-1}, \quad (3)$$

$$x_\rho < \bar{x}_\rho, \quad (4)$$

$$x_\rho \in S(G). \quad (5)$$

Предложение 2. Если задача (2)–(5) имеет решение, то оно определяет $L(E_{\eta n}^k(G))$ -класс, за которым непосредственно следует класс $\bar{V}$ в порядке (1).

Доказательство. Если точка x' удовлетворяет (2), то в $E_{\eta n}^k(G)$ не существует точек z , принадлежащих многограннику M , таких, что $\bar{x} \succ z \succ x'$ (в противном случае точка z была бы лексикографически больше точки x' , удовлетворяя условиям (3)–(5), что противоречит тому, что x' является решением задачи (2)–(5)). Следовательно, не существует $L(E_{\eta n}^k(G))$ -класса, находящегося между классами $\bar{V}$ и V' в порядке (1). А в силу условия (4) и леммы 1 классы $\bar{V}$ и V' разные.

Утверждение доказано.

Если задача (2)–(5) решения не имеет, то для поиска предшествующего класса уменьшаем (если возможно) $\rho > 0$ на единицу и снова решаем задачу вида (2)–(5). Таким образом, для решения задачи 1 поиска представителя лексикографически максимального комбинаторного класса $[V]$, предшествующего данному классу V в порядке (1), решаем последовательность задач вида (2)–(5), в которых уменьшаем ρ . Процесс перебора задач является конечным вследствие конечности фактормножества F .

Замечание 1. Очевидно, что решение задачи (2)–(5) (если оно существует) имеет вид $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{\rho-1}, e_i, x_{\rho+1}, \dots, x_k)$, где $e_i \in S(G)$ таково, что

$$e_i < \bar{x}_\rho \leq e_{i+1}. \quad (6)$$

Таким образом, при замене условий (4), (5) задачи (2)–(5) условием

$$x_\rho \leq e_i, \quad (7)$$

где e_i удовлетворяет (6), получим эквивалентную ей задачу.

Система, описывающая многогранник M , состоит из ограничений, описывающих многогранное множество M_1 , и неравенств, которые задают (см. [1]) общий многогранник размещений, выполняемых для всех $\omega \subset J_k$:

$$\sum_{j=1}^{|\omega|} g_j \leq \sum_{i \in \omega} x_i \leq \sum_{j=1}^{|\omega|} g_{\eta-j+1}. \quad (8)$$

Большое число ограничений в (8) означает, что задача (2)–(5), а следовательно, и задача 1, является задачей большой размерности. Для ее решения можно использовать метод последовательного присоединения ограничений, описанный в [1].

Опишем алгоритм решения задачи 1 поиска лексикографически максимального комбинаторного класса $[V]$, предшествующего в порядке (1) данному классу V с представителем $\bar{x}$.

1. Положим $\bar{x} = \tilde{x}$, $\rho = \min\{\rho(V), k\}$.
2. Если $\bar{x}_\rho = e_1$, то переходим на шаг 3, в противном случае — на шаг 4.
3. Если $\rho > 1$, уменьшаем ρ на единицу и возвращаемся на шаг 2, в противном случае задача не имеет решения (множество $M \cap E_{\eta n}^k(G)$ пусто или содержит только заданную точку $\tilde{x}$).
4. Находим элемент $e_i \in S(G)$, удовлетворяющий (6).
5. Решаем задачу нахождения (2) при ограничениях, описывающих многогранник, и условиях (3), (7).
6. Если задача не имеет решения, то переходим на шаг 3, в противном случае принимаем за $\bar{x}$ решение задачи, рассмотренной на предыдущем шаге; $\rho = \rho(V)$, где V есть $L(E_{\eta n}^k(G))$ -класс, представителем которого является точка $\bar{x}$.
7. Если $\rho = k + 1$, то задача решена и $\bar{x}$ — искомая точка, в противном случае переходим на шаг 2.

Задача 2. Найти представитель комбинаторного $L(E_{\eta n}^k(G))$ -класса $[V]$, ближайшего справа к классу V (с представителем $\tilde{x}$) в порядке (1).

Решение задачи 2 основано на переборе $L(E_{\eta n}^k(G))$ -классов в порядке лексикографического возрастания, которое осуществляется путем решения последовательности вспомогательных задач нахождения точки

$$x' = \text{lex min}\{x \mid x \in M'\}, \quad (9)$$

где многогранник M' является пересечением многогранника M с множеством, определяемым уравнениями (3) и неравенством

$$x_\rho \geq e_i, \quad (10)$$

здесь $e_i \in S(G)$ таково, что $e_{i-1} \leq \bar{x}_\rho < e_i$.

Решением этой задачи (если оно существует) является представитель класса, непосредственно следующего в порядке (1) за классом с представителем $\bar{x}$. Переход к соседнему классу, как и при решении задачи 1, осуществляется до тех пор, пока не будет найден искомый класс $[V]$, либо станет невозможным уменьшить число ρ .

Замечание 2. Алгоритмы, описанные выше, могут применяться для нахождения соответственно лексикографически максимальной и минимальной точки множества $M_1 \cap E_{\eta n}^k(G)$. В частности, задача нахождения лексикографически максимальной точки множества $M_1 \cap E_{\eta n}^k(G)$ эквивалентна задаче поиска представителя класса $[V]$, где V есть $L(E_{\eta n}^k(G))$ -класс, определяемый решением x^* задачи

$$x^* = \text{lex max}\{x \mid x \in M_1 \cap \Pi_{\eta n}^k(G)\}.$$

Как известно (см. [1]), задачей линейной условной максимизации на размещениях называется задача нахождения пары $\langle C(x^*), x^* \rangle$ такой, что

$$C(x^*) = \max_{x \in \mathbf{R}^k} \sum_{j=1}^k c_j x_j, \quad x^* = \arg \max_{x \in \mathbf{R}^k} \sum_{j=1}^k c_j x_j, \quad (11)$$

где $x = (x_1, \dots, x_k)$ удовлетворяет комбинаторному условию

$$x \in E_{\eta_n}^k(G) \quad (12)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^k a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i \in J_m, \quad (13)$$

здесь $c_j, A_{ij}, b_i, j \in J_k, i \in J_m$, — заданные действительные числа.

Определение 4. Линейной условной задачей лексикографической максимизации на размещениях назовем задачу нахождения при условиях (12), (13) такой пары $\langle C(x^*), x^* \rangle$, что

$$C(x^*) = \text{lex max}_{x \in \mathbf{R}^k} \sum_{j=1}^k c_j x_j, \quad x^* = \arg \text{lex max}_{x \in \mathbf{R}^k} \sum_{j=1}^k c_j x_j, \quad (14)$$

то есть такой пары, что вектор $X = (C(x^*), x_1^*, \dots, x_k^*)$ является лексикографически максимальным среди всех векторов вида $(C(x), x_1, \dots, x_k)$, где $(x_1, \dots, x_k)$ — допустимый вектор задачи (11)–(13).

Замечание 3. Из определения 4 следует, что решение задачи (12)–(14) является решением задачи (11)–(13), то есть функция $C(x)$ достигает в точке x^* максимума. При этом точка x^* является лексикографически максимальной среди всех точек, доставляющих максимум функции $C(x)$.

Задача 3. Рассмотрим сначала задачу (12)–(14) для случая, когда элементы основания мультимножества являются натуральными числами, а коэффициенты целевой функции — целыми. Тогда, очевидно, целевая функция может принимать только целые значения.

Для решения задачи 3 предлагается следующий алгоритм.

1. Решаем задачу (8), (13), (14) методом последовательного присоединения ограничений.
2. Если задача не имеет решений, то не имеет решений и исходная задача, в противном случае пусть $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k)$ — решение задачи (8), (13), (14).
3. Если $C(\bar{x}) \in \mathbf{Z}$, то переходим на шаг 5, полагая $\tilde{x} = \bar{x}$, в противном случае формируем новую задачу линейного программирования (ЗЛП), добавляя к ограничениям (8), (13) неравенство

$$\sum_{j=1}^k c_j x_j \leq [C(\bar{x})],$$

где $[a]$ означает целую часть числа a .

4. Если полученная ЗЛП не имеет решений, то не имеет решения и исходная задача, в противном случае обозначим решение $\tilde{x}$.
5. Если $\tilde{x} \in E_{\eta n}^k(G)$, то исходная задача 3 решена, в противном случае пусть многогранник M определяется (8), (13) и уравнением

$$\sum_{j=1}^k c_j x_j = C(\tilde{x}).$$

6. Решаем задачу 1.
7. Если задача не имеет решения (то есть $M \cap E_{\eta n}^k = \emptyset$), то переходим к шагу 8, в противном случае завершаем процесс (задача решена).
8. К исходной системе неравенств (8), (13) добавляем неравенство

$$\sum_{j=1}^k c_j x_j \leq C(\tilde{x}) - 1$$

и при помощи метода последовательного присоединения ограничений решаем полученную ЗЛП. Переходим на шаг 4.

Так как целевая функция ограничена на допустимом множестве, на некоторой итерации либо будет найдена допустимая точка, которая в соответствии с правилом перебора $L(E_{\eta n}^k(G))$ -классов доставляет функции максимальное значение, либо многогранник M окажется пустым. Аналогичный алгоритм может быть предложен для более общего случая, когда известно некоторое дискретное множество, которому принадлежат значения целевой функции.

Задача 4. Рассмотрим линейную условную задачу лексикографической максимизации на размещении для случая, когда явно определить указанное выше дискретное множество не представляется возможным.

Для решения задачи 4 предлагается алгоритм, который является дальнейшим развитием алгоритма перебора $L(E_{\eta n}^k(G))$ -классов. В его основе лежит направленный перебор комбинаторных классов в порядке лексикографического возрастания и убывания, начиная с класса, определяемого решением задачи (8), (13), (14). При этом из рассмотрения исключаются классы, представители которых доставляют целевой функции значение, меньшее полученного на данной итерации рекордного значения C^* . Это означает, что отбрасываются точки, не удовлетворяющие неравенству

$$\sum_{j=1}^k c_j x_j \geq C^*. \quad (15)$$

Пусть M — многогранник, который описывается неравенствами (8), (13). Тогда перебор комбинаторных классов в порядке лексикографического убывания, начиная с класса с представителем $\tilde{x} \in M \cap E_{\eta n}^k(G)$, осуществляется в соответствии со следующим алгоритмом.

1. Полагаем $C^* = C(\tilde{x})$, $x^* = \tilde{x}$. Изменяем систему, описывающую многогранник M , добавляя к исходной системе ограничений (8), (13) неравенство (15).
2. Решаем задачу 1.
3. Если комбинаторного класса, лексикографически меньшего данного, не существует, то перебор окончен, в противном случае пусть x — решение задачи 1.
4. Если $C(x) > C^*$, то заменяем наилучшее достигнутое решение, полагая $x^* = x$, $C^* = C(x)$ и изменяем неравенство вида (15) в системе, описывающей многогранник M , с учетом нового достигнутого рекордного значения.
5. Положив $\tilde{x} = x$, возвращаемся на шаг 2.

Аналогично осуществляется перебор в порядке лексикографического возрастания. При этом на каждой итерации происходит переход к лексикографически большему комбинаторному классу, то есть на шаге 2 алгоритма вместо задачи 1 решается задача 2. Заметим также, что в случае перебора в порядке лексикографического возрастания нет необходимости проверять условие $C(x) > C^*$, так как $C(x) \geq C^*$ в силу добавления ограничения (15), а новая точка лексикографически больше предыдущей в соответствии с направлением перебора.

Начальное направление перебора (в порядке лексикографического возрастания или убывания) в процессе решения задачи 4, определяется путем сравнения значений целевой функции в точках, являющихся представителями $\lfloor V \rfloor$ и $\lceil V \rceil$ классов, где $L(E_{\eta n}^k(G))$ -класс определяется решением задачи (8), (13), (14). Если значение целевой функции больше в точке $x_1 \in \lfloor V \rfloor$, то начальное направление перебора в порядке лексикографического убывания, в противном случае — в порядке лексикографического возрастания.

Алгоритм решения задачи 4.

1. Решаем задачу (8), (13), (14) методом последовательного присоединения ограничений. Если задача не имеет решений, то их не имеет и исходная задача (12)–(14).
2. Пусть $\tilde{x}$ — решение задачи (8), (13), (14). Если $\tilde{x} \in E_{\eta n}^k(G)$, то процесс завершается (задача решена), в противном случае переходим на шаг 3.
3. Решаем задачи 1 и 2.
4. Если ни одна из задач не имеет решения, то и задача (12)–(14) не имеет решения.
5. Если имеет решение только задача 1, то начиная с представителя x_1 найденного класса, осуществляем перебор комбинаторных классов в порядке лексикографического убывания.
6. Если имеет решение только задача 2, то начиная с представителя x_2 найденного класса, осуществляем перебор комбинаторных классов в порядке лексикографического возрастания.
7. Если имеют решение обе задачи, то сравниваем значения целевой функции в точках x_1 и x_2 , являющихся представителями найденных $L(E_{\eta n}^k(G))$ -классов. Если значение целевой функции в точке x_1 больше, то, начиная с точки x_1 , осуществляем перебор в порядке лексикографического убывания, а затем в порядке лексикографического возрастания, начиная с точки x_2 . В противном случае последовательность направлений

перебора обратная: сначала в порядке лексикографического возрастания, начиная с точки x_2 , а затем в порядке лексикографического убывания, начиная с точки x_1 .

8. Решением задачи 4 является точка x^* , соответствующая рекордному значению целевой функции C^* .

Таким образом, предложено разбиение пространства при помощи отношения $L(E_{\eta}^k(G))$ -эквивалентности точек пространства $\mathbf{R}^k$. С использованием идеи разбиений разработаны алгоритмы решения задач линейной условной оптимизации на размещении. Целесообразным представляется исследование возможности применения высказанных идей при решении задач на комбинаторных множествах, отличных от множества размещений.

Список литературы

1. Стоян Ю. Г., Емец О. О., *Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації*. Інститут системних досліджень освіти, Київ, 1993.
2. Сергиенко И. В., Каспицкая М. Ф., *Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации*. Наукова Думка, Киев, 1981.
3. Емец О. А., Недобачий С. И., Колечкина Л. Н., Неприводимая система ограничений комбинаторного многогранника в дробно-линейной задаче оптимизации на перестановках. *Дискретная математика* (2001) **13**, №1, 110–118.
4. Валуйская О. А., Емец О. А., Романова Н. Г., Выпуклое продолжение многочленов, заданных на полиперестановках, модифицированным методом Стояна–Яковлева. *Ж. выч. матем. и матем. физ.* (2002) **42**, №4, 591–596.
5. Стоян Ю. Г., Яковлев С. В., Емец О. А., Валуйская О. А., Построение выпуклых продолжений для функций, заданных на гиперсфере. *Кибернетика и системный анализ* (1998) №2, 1–11.
6. Емец О. О., Роскладка А. А., Про оцінки мінімумів цільових функцій при оптимізації на сполученнях. *Укр. матем. ж.* (1999) **51**, №8, 1118–1121.
7. Емец О. О., Колечкина Л. М., Задачі оптимізації на переставленнях з дробово-лінійною цільовою функцією: властивості множини допустимих розв'язків. *Укр. матем. ж.* (2000) **52**, №12, 1630–1640.
8. Колоколов А. А., Применение регулярных разбиений в целочисленном программировании. *Изв. вузов. Математика* (1993) №12, 11–30.
9. Колоколов А. А., Леванова Т. В., Алгоритмы декомпозиции и перебора L -классов для решения некоторых задач размещения. *Вестник Омского унив.* (1996) №1, 21–23.
10. Корбут А. А., Финкельштейн Ю. Ю., *Дискретное программирование*. Наука, Москва, 1969.

Статья поступила 3.04.2003.