Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. К. Шукин, Об изоморфизме квазигрупп, *Дискрет. матем.*, 2005, том 17, выпуск 3, 109–111

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm120>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 16:00:26

Об изоморфизме квазигрупп

© 2005 г. К. К. Щукин

В этой заметке представлено решение известной задачи об изоморфизме квазигрупп, каждая из которых главно изотопна одной и той же квазигруппе.

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. Пусть $(\lambda, \mu, \varepsilon)$ и $(\varphi, \varphi, \varphi)$ — произвольные главная изотопия и изоморфизм квазигруппы $(Q, \cdot)$.

- (1) Условия $\varphi = \psi$, $\alpha = \varphi\lambda\varphi^{-1}$, $\beta = \varphi\mu\varphi^{-1}$ являются достаточными для коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} (Q, \cdot) & \xrightarrow{(\varphi, \varphi, \varphi)} & (Q, \circ) \\ (\lambda, \mu, \varepsilon) \downarrow & & \downarrow (\alpha, \beta, \varepsilon) \\ (Q, \odot) & \xrightarrow{(\psi, \psi, \psi)} & (Q, \ominus) \end{array}$$

Эти условия остаются и необходимыми, если только

$$(\varphi^{-1}\alpha^{-1}\psi\lambda, \varphi^{-1}\beta^{-1}\psi\mu, \varphi^{-1}\psi)$$

является единичной автотопией квазигруппы $(Q, \cdot)$.

- (2) Если $(\alpha\varphi, \beta\varphi, \varphi)$ является единичной автотопией квазигруппы $(Q, \cdot)$, то коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} (Q, \cdot) & \xrightarrow{(\varphi, \varphi, \varphi)} & (Q, \circ) \\ (\lambda, \mu, \varepsilon) \downarrow & & \downarrow (\alpha, \beta, \varepsilon) \\ (Q, \odot) & \xrightarrow{(\psi, \psi, \psi)} & (Q, \cdot) \end{array}$$

порождает автотопию $(\psi\lambda, \psi\mu, \psi)$ квазигруппы $(Q, \cdot)$. Обратно, каждая пара автотопий $(\alpha\varphi, \beta\varphi, \varphi)$ и $(\psi\lambda, \psi\mu, \psi)$ квазигруппы $(Q, \cdot)$ порождает ее коммутативную диаграмму указанного выше типа. При условиях $\varphi = \psi$, $\alpha = \varphi\lambda\varphi^{-1}$, $\beta = \varphi\mu\varphi^{-1}$ и дополнительном требовании $\varphi^2 = \varepsilon$ появляется также автотопия

$$(\lambda\varphi^{-1}, \mu\varphi^{-1}, \varphi^{-1})$$

квазигрупп $(Q, \circ) = (Q, \ominus)$.

Доказательство. Докажем (1). Диаграмма предполагает, что

$$\begin{aligned}\varphi(xy)\varphi(x) \circ \varphi(y) &= \alpha\varphi(x) \odot \beta\varphi(y), \\ \psi(xy) &= \psi(\lambda(x) \odot \mu(y)) = \psi\lambda(x) \odot \psi\mu(y)\end{aligned}$$

для любых $x, y \in Q$. Предполагая, что $\varphi = \psi$, $\alpha = \varphi\lambda\varphi^{-1}$, $\beta = \varphi\mu\varphi^{-1}$, получаем равенство

$$(\alpha, \beta, \varepsilon)(\varphi, \varphi, \varphi) = (\varphi\lambda, \varphi\mu, \varphi) = (\psi, \psi, \psi)(\lambda, \mu, \varepsilon),$$

которое определяет коммутативность диаграммы. Наоборот, исходя из коммутативности диаграммы $(\alpha\varphi, \beta\varphi, \varphi) = (\psi\lambda, \psi\mu, \psi)$, запишем равносильное равенство

$$(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon) = (\varphi^{-1}\alpha^{-1}\psi\lambda, \varphi^{-1}\beta^{-1}\psi\mu, \varphi^{-1}\psi).$$

Отсюда, равенства $\varphi = \psi$, $\alpha = \varphi\lambda\varphi^{-1}$, $\beta = \varphi\mu\varphi^{-1}$ выполняются только в том случае, когда $x \cdot y = \psi^{-1}\varphi(\varphi^{-1}\alpha^{-1}\psi\lambda x \cdot \varphi^{-1}\beta^{-1}\psi\mu y)$ является единичной автотопией квазигруппы $(Q, \cdot)$.

Докажем (2). Первая часть утверждения следует из строения диаграммы в (2), а также очевидного представления изотопии в виде произведения изоморфизма и главной изотопии. Далее, полагая $\varphi = \psi$, $\alpha = \varphi\lambda\varphi^{-1}$, $\beta = \varphi\mu\varphi^{-1}$, получаем автотопию $(\varphi\lambda, \varphi\mu, \varphi) = (\alpha\varphi, \beta\varphi, \varphi)$ квазигруппы $(Q, \cdot)$, изоморфной $(Q, \circ)$.

Отсюда трансформированием получаем автотопию квазигруппы $(Q, \circ)$

$$(\varphi, \varphi, \varphi)(\varphi\lambda, \varphi\mu, \varphi)(\varphi, \varphi, \varphi)^{-1} = (\varphi^2\lambda\varphi^{-1}, \varphi^2\mu\varphi^{-1}, \varphi).$$

Если $\varphi^2 = \varepsilon$, то получаем объявленную в утверждении (2) автотопию

$$(\lambda\varphi^{-1}, \mu\varphi^{-1}, \varphi^{-1}) = (\lambda, \mu, \varepsilon)(\varphi^{-1}, \varphi^{-1}, \varphi^{-1}),$$

в частности, $(Q, \circ) = (Q, \odot)$.

Следствие 1. Если изотопия $(\alpha\varphi, \beta\varphi, \varphi)$ не является автотопией квазигруппы $(Q, \cdot)$, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (Q, \cdot) & \xrightarrow{(\varphi, \varphi, \varphi)} & (Q, \circ) \\ (\lambda, \mu, \varepsilon) \downarrow & & \downarrow (\alpha, \beta, \varepsilon) \\ (Q, \odot) & \xrightarrow{(\psi, \psi, \psi)} & (Q, \odot) \end{array}$$

является коммутативной при условии, что $\varphi = \psi \in \text{Aut}(Q, \odot)$, $\alpha = \varphi\lambda\varphi^{-1}$, $\beta = \varphi\mu\varphi^{-1}$.

Доказательство следует из утверждений (1) и (2) с учетом специфики строения диаграммы следствия.

Заметим, что, в частности, мы получаем решение задачи об изоморфизме квазигрупп $(Q, \cdot)$ и $(Q, \circ)$, главно изотопных одной и той же группе $(Q, \odot)$. Эта проблема рассматривалась в [2].

Список литературы

1. Shchukin K. K., On the isomorphisms of the quasigroups. In: *Commun. 2nd Conf. Math. Soc. Moldova* 2004, p. 292.
2. Izbash V. I., Isomorphisms of quasigroups isotopic to groups. *Quasigroups and Related Systems* (1995) 2, №1, 34–41.

Статья поступила 18.10.2004.