Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Черепов, Приближение непрерывных функций конечными автоматами, *Дискрет. матем.*, 2012, том 24, выпуск 3, 82–89

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1200>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:37:50

Приближение непрерывных функций конечными автоматами

© 2012 г. А. Н. Черепов

Рассматриваются конечные автоматы с задержкой, являющиеся естественным обобщением конечных автоматов. Ставится задача приближения непрерывных функций автоматами с задержкой и доказано утверждение о возможности приближения с произвольной точностью любой непрерывной функции. Приведены приближения некоторых функций и даны оценки числа их состояний. Для нескольких классов непрерывных функций приводятся оценки числа состояний автоматов, ε -приближающих функции этих классов.

1. Детерминированные функции с задержкой и конечные автоматы с задержкой

Рассмотрим множество всех бесконечных двоичных последовательностей E . Множество всех функций вида $f: E^n \rightarrow E$ обозначим P . Предположим, что $a_1, a_2, \dots, a_n$ — последовательности из E , а $\tilde{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ — набор таких последовательностей. Пусть $a_1|k, a_2|k, \dots, a_n|k$ — первые k членов последовательностей $a_1, a_2, \dots, a_n$ соответственно, тогда $\tilde{a}|k = (a_1|k, a_2|k, \dots, a_n|k)$.

Назовем функцию f детерминированной, если для всех $k = 1, 2, \dots$ и для любых $\tilde{a}, \tilde{b}$ соотношение $\tilde{a}|k = \tilde{b}|k$ влечет $f(\tilde{a})|k = f(\tilde{b})|k$. Класс всех детерминированных функций обозначим P_d ; все остальные функции из P будем называть недетерминированными.

Определение 1 ([4, 5]). Говорим, что функция f является детерминированной функцией с задержкой τ , где τ — произвольное неотрицательное целое число, если для любого $k = 1, 2, 3, \dots$ и любых $\tilde{a}, \tilde{b}$ соотношение $\tilde{a}|k + \tau = \tilde{b}|k + \tau$ влечет $f(\tilde{a})|k = f(\tilde{b})|k$.

Множество детерминированных функций с задержкой можно определить и следующим образом.

Определение 2. Говорим, что функция f является детерминированной функцией с задержкой τ , где τ — произвольное неотрицательное целое число, если существует такая детерминированная функция g , что для любого $\tilde{a}$ и $b = g(\tilde{a})$, $b = b(1)b(2)b(3) \dots$ значение функции f на наборе $\tilde{a}$ равно $f(\tilde{a}) = b(\tau + 1)b(\tau + 2)b(\tau + 3) \dots$

Лемма 1 ([4, 5]). *Определения 1 и 2 эквивалентны.*

Из определения 2 следует, что функцию с задержкой τ от n аргументов можно трактовать так: берется дискретное детерминированное устройство с n входами, преобразующее

бесконечные входные последовательности из нулей и единиц в такую же выходную последовательность, и рассматривается выход этого устройства не с первого момента времени, а с момента времени $\tau + 1$. Осуществляемое преобразование и считается детерминированной функцией с задержкой τ . Таким образом, понятие функции с задержкой являются естественным обобщением детерминированных функций. Аналогичным образом можно ввести понятие конечного автомата с задержкой. Будем рассматривать инициальные автоматы с n входами и одним выходом, преобразующие бесконечные двоичные последовательности, то есть реализующие дискретные функции из множества P .

Определение 3. Назовем конечным автоматом с задержкой τ конечный автомат, который при подаче на его входы некоторых входных последовательностей начинает формировать выходную последовательность не с первого момента времени, а с некоторой задержкой, не превосходящей τ .

Отличие автоматов с задержкой от обычных конечных автоматов удобно проиллюстрировать на диаграмме переходов. Если обычный автомат начинает формировать разряды выхода, начиная с первого такта работы, то автомат с задержкой τ для некоторых входных последовательностей в течении нескольких (не более τ) тактов работы не формирует выход, а только переходит из одного состояния в следующее. Затем конечный автомат с задержкой начинает функционировать как обычный конечный автомат. Очевидно, что каждую детерминированную функцию с задержкой τ можно реализовать некоторым конечным автоматом с задержкой τ .

Перейдем к вопросу о возможности реализации непрерывных функций, осуществляющих отображение точек n -мерного единичного куба на отрезок $[0, 1]$. Сопоставим каждой двоичной последовательности $a(1)a(2)\dots a(i)\dots$ некоторое число из отрезка $[0, 1]$, равное $0,a(1)a(2)\dots a(i)\dots$. Из двух возможных представлений $0,a(1)a(2)\dots a(i)100\dots = 0,a(1)a(2)\dots a(i)0111\dots$ выберем первое. Для числа 1 берется представление $1 = 0,1111\dots$

Определение 4. Функцию $\mu: [0, 1] \rightarrow E$ определим следующим образом: для любого числа $a \in [0, 1]$, где $a = 0,a_1a_2a_3\dots$, значение функции равно $\mu(a) = a_1a_2a_3\dots$

Определение 5. Функцию $\mu^{-1}: E \rightarrow [0, 1]$ определим так, что для любой бесконечной двоичной последовательности $a = a_1a_2a_3\dots$ справедливы следующие утверждения:

- (1) если существует натуральное число k такое, что $a = a_1a_2\dots a_k01111\dots$, то есть, начиная с $(k + 2)$ -го члена, a представляет собой бесконечную последовательность из единиц, то $\mu^{-1}(a) = 0,a_1a_2\dots a_k1000\dots$;
- (2) для остальных последовательностей $\mu^{-1}(a) = 0,a_1a_2a_3\dots$

Определение 6. Любой дискретной функции $f: E^n \rightarrow E$ однозначно сопоставим действительную функцию $g: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ так, что для любой n -мерной точки $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in [0, 1]^n$ верно равенство

$$g(b_1, b_2, \dots, b_n) = \mu^{-1}f(\mu(b_1), \mu(b_2), \dots, \mu(b_n)).$$

Действительную функцию g будем называть функцией, соответствующей дискретной функции f .

Заметим, что при таком сопоставлении теряется информация о преобразовании последовательностей вида $a_1a_2\dots a_i0111\dots$

Определение 7. Пусть $\varepsilon > 0$; будем говорить, что функция $d(\tilde{x})$ ε -равна функции $f(\tilde{x})$ на единичном кубе, если при любом $\tilde{x} \in [0, 1]^n$ выполняется неравенство

$$|f(\tilde{x}) - d(\tilde{x})| < \varepsilon.$$

Будем также говорить, что в этом случае $d(\tilde{x})$ ε -приближает $f(\tilde{x})$.

Если функция $d(\tilde{x})$ ε -приближает $f(\tilde{x})$ и соответствует дискретной функции, реализуемой конечным автоматом A с задержкой τ , то будем говорить, что автомат A ε -приближает $f(\tilde{x})$.

Не всякую непрерывную функцию можно ε -приблизить обычным конечным автоматом, так как не всякую непрерывную функцию можно ε -приблизить детерминированной функцией (см. [4]). Но конечных автоматов с задержкой уже достаточно.

Выберем шаг $h = 2^{-k}$ и рассмотрим множество всех точек отрезка $[0, 1]$, взятых с этим шагом, вида $x_i = i2^{-k}$, $i = 0, 1, 2, \dots, 2^k$. Это множество будем называть решеткой точек с шагом $h = 2^{-k}$ и обозначать I_h . Аналогичным образом, в n -мерном кубе $[0, 1]^n$ введем решетку I_h^n как декартову степень решетки I_h . Пусть $\tilde{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ — произвольная точка решетки I_h^n . Интервалом $I_h(\tilde{a})$ решетки I_h^n назовем множество точек $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -мерного куба $[0, 1]^n$ таких, что $a_i \leq x_i < h$ при $i = 1, 2, \dots$

Теорема 1. Для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $f(\tilde{x}) \in C[0, 1]^n$ существуют число $\tau \geq 0$ и конечный автомат A с задержкой τ такие, что автомат A ε -приближает $f(\tilde{x})$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как непрерывная на компакте функция является равномерно непрерывной, существует $\delta > 0$ такое, что из неравенства $|\tilde{x} - \tilde{y}| < \delta$ следует, что $|f(\tilde{x}) - f(\tilde{y})| < \varepsilon/2$. Выберем τ таким образом, что $2^{-\tau} < \delta$, и рассмотрим решетку I_h^n при $h = 2^{-\tau}$. Для каждой точки $\tilde{a}_i$, $i = 0, 1, \dots$, решетки I_h^n обозначим через f_i значение функции f в этой точке с точностью $\lceil \log(1/\varepsilon) \rceil + 1$ разрядов; здесь и в дальнейшем $\lceil \cdot \rceil$ — целая часть числа с избытком, а логарифм берется по основанию 2. Тогда $f(\tilde{a}_i) - f_i \leq \varepsilon/2$ и у числа f_i , по крайней мере начиная с $\lceil \log(1/\varepsilon) \rceil + 2$ разряда, все разряды равны нулю. Построим конечный автомат A с задержкой τ , ε -приближающий функцию f . Автомат зададим с помощью диаграммы переходов. Для этого рассмотрим двоичное дерево высоты τ , к висячим вершинам которого подвешены обычные конечные автоматы. Каждой ветви двоичного дерева соответствует последовательность состояний автомата с задержкой, которая определяет первые τ разрядов каждой из точек решетки I_h^n . Корню дерева соответствует начальное состояние и при нахождении в этих состояниях автомат не формирует значения выходов. При этом к висячей вершине, соответствующей первым τ разрядам точки решетки $\tilde{a}_i$, подвесим конечный автомат, реализующей $\lceil \log(1/\varepsilon) \rceil + 1$ первых разрядов числа f_i , а затем выдающим одни нули. Построенный автомат реализует некоторую дискретную функцию $g(\tilde{x})$ с задержкой τ . Пусть $d(\tilde{x})$ — действительная функция, соответствующая функции $g(\tilde{x})$. Тогда для любого $\tilde{x} \in [0, 1]^n$ и точки $\tilde{a}_i$ решетки I_h^n , совпадающей с $\tilde{x}$ в первых τ разрядах, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} |f(\tilde{x}) - d(\tilde{x})| &= |(f(\tilde{x}) - f(\tilde{a}_i)) + (f(\tilde{a}_i) - d(\tilde{x}))| \\ &\leq |f(\tilde{x}) - f(\tilde{a}_i)| + |f(\tilde{a}_i) - d(\tilde{x})| < \varepsilon, \end{aligned}$$

так как

$$f_i = d(\tilde{x}), \quad f(\tilde{a}_i) - f_i \leq \varepsilon/2, \quad |\tilde{x} - \tilde{a}_i| < \delta.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим вопросы сложности реализации непрерывных функций конечными автоматами с задержкой.

2. Оценки сложности приближений непрерывных функций конечными автоматами с задержкой

Определение 8. Для любой непрерывной функции $f \in C([0, 1]^n)$, принимающей значения из отрезка $[0, 1]$, и любого $\varepsilon > 0$ назовем сложностью реализации в классе конечных автоматов с задержкой τ наименьшее число состояний автомата, реализующего функцию f с точностью ε .

Сложность реализации функции f будем обозначать $L(f, \varepsilon)$. Пусть задан подкласс H класса непрерывных функций. Положим

$$L(H, \varepsilon) = \sup\{L(f, \varepsilon) : f \in H\}.$$

В [5] было показано, что функцию $\sqrt[n]{x}$ при любом $\varepsilon = 2^{-k}$ можно ε -приблизить детерминированной функцией с задержкой $k(n-1)$. При этом значение задержки является минимальным. Оценим число состояний конечного автомата с задержкой, ε -приближающего эту функцию.

Теорема 2. Функцию $\sqrt[n]{x}$ при любом $\varepsilon = 2^{-k}$ можно ε -приблизить конечным автоматом с задержкой, для которого справедлива оценка

$$L(\sqrt[n]{x}, \varepsilon) \leq \sum_{i=0}^{2^k-1} \lfloor \log((i+1)^n - i^n) \rfloor + k2^k.$$

Доказательство. Разобьем отрезок $[0, 1]$ на полуинтервалы точками $0, 1/2^{nk}, 2^n/2^{nk}, 3^n/2^{nk}, 4^n/2^{nk}, \dots, i^n/2^{nk}, (i+1)^n/2^{nk}, \dots, (2^k-1)^n/2^{nk}, 1$. Заметим, что изменение функции $\sqrt[n]{x}$ на каждом из полуинтервалов $[i^n/2^{nk}, (i+1)^n/2^{nk})$ не превосходит $1/2^k$. Поэтому, если в качестве приближенного значения этой функции взять k первых разряда числа $\sqrt[n]{y}$, где y — середина этого полуинтервала, то это значение будет отличаться от значения этой функции в любой другой точке полуинтервала менее чем на $1/2^k$. Построим конечный автомат с задержкой, ε -приближающий эту функцию. Автомат состоит из части двоичного дерева высоты nk , представляющего все двоичные наборы этой длины, каждой вершине которого соответствует состояние, в котором не формируются значения выхода. Это дерево будет служить для определения, какому из полуинтервалов принадлежит двоичное число, соответствующее входному двоичному набору. Первому из полуинтервалов соответствуют ветви $0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0$ и $0, 0, 0, 0, \dots, 0, 1$. Каждая последующая ветвь соответствует правым концам полуинтервалов. При этом дополнительно появляются $\lfloor \log((i+1)^n - i^n) \rfloor$ новых состояний. Все переходы в промежутке между двумя ветвями представляют собой двоичные наборы, относящиеся к соответствующему интервалу, и направлены на первое состояние конечного автомата, генерирующее нужную выходную последовательность. Таким образом, часть конечного автомата не формирующая выходные значения, содержит $\sum_{i=0}^{2^k-1} \lfloor \log((i+1)^n - i^n) \rfloor$ состояний, а обычные конечные автоматы имеют $k2^k$ состояний. Теорема доказана.

Теорема 3. Число автоматов с задержкой s r состояниями не превосходит $(3r)^{r^{2^n}}$.

Доказательство этого утверждения легко получается из вывода оценки числа конечных автоматов с фиксированным числом состояний [8].

В [6] и [7] для каждого из рассматриваемых в дальнейшем классов была предложена конструкция, позволяющая реализовывать функции с помощью детерминированных

функций с задержкой (константные функции). Они устроены так: задержка реализуется полным двоичным деревом, высота которого равна задержке, а с каждой ветвью дерева связан конечный автомат, порождающий k разрядов приближенного значения функции. Эта конструкция, по существу, совпадает с использованной при доказательстве теоремы 1.

Теорема 4. *Если непрерывная функция одного аргумента $f(x)$ может быть ε -приближена, $\varepsilon = 1/2^k$, детерминированной функцией с задержкой τ , то она может быть ε -приближена конечным автоматом с той же задержкой и числом состояний, равным $2^{\tau+1} + k2^\tau$.*

Доказательство. Разобьем отрезок $[0, 1]$ на полуинтервалы точками $0, 1/2^\tau, 2/2^\tau, 3/2^\tau, 4/2^\tau, \dots, i2^\tau, (i+1)/2^\tau, \dots, (2^\tau - 1)/2^\tau, 1$. Так как $f(x)$ может быть ε -приближена, $\varepsilon = 1/2^k$, детерминированной функцией с задержкой τ , то изменение функции $f(x)$ на каждом из полуинтервалов $[i/2^\tau, (i+1)/2^\tau)$ не превосходит $1/2^k$. Поэтому, если в качестве приближенного значения этой функции взять k первых разрядов числа $f(y)$, где y — середина этого полуинтервала, то это значение будет отличаться от значения этой функции в любой другой точке полуинтервала менее, чем на $1/2^k$. Построим конечный автомат с задержкой τ , ε -приближающий эту функцию. Автомат состоит из части двоичного дерева высоты τ , представляющего все двоичные наборы этой длины, каждой вершине которого соответствует состояние, в котором не формируются значения выхода. Это дерево будет служить для определения, какому из полуинтервалов принадлежит двоичное число, соответствующее входному двоичному набору. Первому из полуинтервалов соответствуют ветви $0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0$ и $0, 0, 0, 0, \dots, 0, 1$. Каждая последующая ветвь соответствует правым концам полуинтервалов. При этом появляются $2^{\tau+1}$ состояний. Все висячие вершины дерева направлены на первое состояние конечного автомата, генерирующего нужную выходную последовательность. Таким образом, часть конечного автомата, не формирующая выходные значения, содержит $2^{\tau+1}$ состояний, а обычные конечные автоматы имеют $k2^\tau$ состояний. Теорема доказана.

Укажем верхние и нижние оценки числа состояний конечного автомата с задержкой для некоторых классов функций, для которых известны оценки числа функций в 2ε -различимом множестве (см. [1, 3]). Напомним, предполагается, что $\varepsilon = 1/2^k$.

2.1. Класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера

Напомним, что функция $f(\tilde{x})$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем α и константой L , если для любых $\tilde{x}, \tilde{y}$

$$|f(\tilde{x}) - f(\tilde{y})| \leq L \|\tilde{x} - \tilde{y}\|^\alpha,$$

где в качестве нормы рассматривается максимум модуля разности координат. В дальнейшем будем рассматривать именно такую норму и предполагать, что $L = 1$; это не ограничивает общность рассмотрения. Обозначим $G_n(\alpha)$ класс функций не более чем от n аргументов, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем α и константой $L = 1$.

Теорема 5. *Для некоторой константы C справедливы оценки*

$$\begin{aligned} L(G_1(1), \varepsilon) &\leq 2^{(k+1)/\alpha}, \\ L(G_1(1), \varepsilon) &\geq C2^{k/2}. \end{aligned}$$

Доказательство. В [6] доказано, что при $\varepsilon = 1/2^k$ любую функцию класса $G_n(\alpha)$ можно приблизить детерминированной функцией с задержкой $\tau \leq (k+1)/\alpha$. Из этого результата и теоремы 3 получается верхняя оценка $L(G_1(1), \varepsilon) \leq 2^{(k+1)/\alpha}$.

Для получения нижней оценки воспользуемся результатом работ [1, 3] о том, что в классе $G_1(1)$ существует 2ε -различимое множество функций порядка $2^{C/\varepsilon}$ при некоторой константе C . Так как число автоматов с задержкой, ε -приближающих эти функции, не может быть меньше этого числа, то из теоремы 2 получаем неравенство

$$(3r)^{2r} \geq 2^{C2^k},$$

где r — число состояний автомата и $\varepsilon = 1/2^k$. Из этого неравенства получается нижняя оценка числа состояний.

2.2. Класс F_m

Класс F_m определяется как класс непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций, имеющих m производных. Функции $f \in F_m$ и их производные удовлетворяют неравенствам

$$\max |f^{(i)}(x)| \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

где максимум берется на отрезке $[0, 1]$. При этом выполнены условия

$$f^{(i)}(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m-1.$$

Теорема 6. Для некоторой константы C справедливы оценки

$$\begin{aligned} L(F_m, \varepsilon) &\leq 2^{k+1}(k+2), \\ \log L(F_m, \varepsilon) &\geq C \frac{k}{2m}, \end{aligned}$$

где C — некоторая константа и логарифм берется по основанию 2.

Доказательство. В [6] доказано, что при $\varepsilon = 1/2^k$ любую функцию класса F_m можно приблизить детерминированной функцией с задержкой $\tau \leq k+1$. Из этого результата и теоремы 3 получается верхняя оценка $L(F_m, \varepsilon) \leq 2^{k+1}(k+2)$.

Для получения нижней оценки заметим, что в F_m существует 2ε -различимое множество функций этого класса, содержащее порядка $2^{C(1/\varepsilon)^{1/m}}$ функций (см. [1, 3]). Число автоматов с задержкой, ε -приближающих эти функции, не может быть меньше этого числа, поэтому из теоремы 2 получаем неравенство

$$(3r)^{2r} \geq 2^{C(2^k)^{1/(2m)}},$$

где r — число состояний автомата и $\varepsilon = 1/2^k$. Из этого неравенства получается нижняя оценка числа состояний.

2.3. Класс функций от n аргументов, удовлетворяющих условию Гельдера

Пусть E^n — n -мерное евклидово пространство и I^n есть n -мерный замкнутый куб, задаваемый неравенствами $0 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, n$. Рассмотрим множество $F_m G_n(\alpha)$ действительных функций n переменных, определенных на I^n , все частные производные

которых порядка не выше m удовлетворяют условию Гельдера с показателем $0 < \alpha \leq 1$ и константой $L = 1$, и таких, что

$$\left| \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}} f(0, 0, \dots, 0) \right| \leq 1$$

при условии

$$\sum_{i=1}^n k_i \leq m.$$

Теорема 7. Для некоторой константы C справедливы оценки

$$\begin{aligned} L(F_m G_n(\alpha), \varepsilon) &\leq 2^{(k+1)/\alpha}, \\ L(F_m G_n(\alpha), \varepsilon) &\geq C 2^{(n/2)(k/(m+\alpha-1))}. \end{aligned}$$

Доказательство. В [6] доказано, что при $\varepsilon = 1/2^k$ любую функцию класса $F_m G_n(\alpha)$ можно приблизить детерминированной функцией с задержкой $\tau \leq (k+1)/\alpha$. Из этого результата и теоремы 3 получается верхняя оценка $L(F_m G_n(\alpha), \varepsilon) \leq 2^{(k+1)/\alpha}$.

Для получения нижней оценки заметим, что в классе $F_m G_n(\alpha)$ существует 2ε -различимое множество функций этого класса, содержащее порядка $2^{C/\varepsilon^{n/(m+\alpha)}}$ функций (см. [1, 3]). Число автоматов с задержкой, ε -приближающих эти функции, не может быть меньше этого числа, поэтому из теоремы 2 получаем неравенство

$$(3r)^{r2^n} \geq 2^{C/\varepsilon^{n/(m+\alpha)}},$$

где r — число состояний автомата и $\varepsilon = 1/2^k$. Из этого неравенства получается нижняя оценка числа состояний.

2.4. Класс F_A аналитических функций

Класс F_A определяется как класс аналитических в некоторой области функций, производные которых удовлетворяют неравенствам

$$\max |f^{(i)}(x)/i!| \leq 1/2^i, \quad i = 1, 2, \dots$$

Теорема 8. Для некоторой константы C справедливы оценки

$$\begin{aligned} L(F_A, \varepsilon) &\leq 2^{k+1}(k+2), \\ L(F_A, \varepsilon) &\geq Ck. \end{aligned}$$

Доказательство. В работе [6] доказано, что при $\varepsilon = 1/2^k$ любую функцию класса F_A можно приблизить детерминированной функцией с задержкой $\tau \leq k+1$. Из этого результата и теоремы 3 получается верхняя оценка $L(G_1(1), \varepsilon) \leq 2^{k+1}(k+2)$.

Для получения нижней оценки воспользуемся результатом работ [1, 3] о том, что в классе F_A существует 2ε -различимое множество функций порядка $2^{C \log^2(1/\varepsilon)}$ при некоторой константе C . Так как число автоматов с задержкой, ε -приближающих эти функции, не может быть меньше этого числа, из теоремы 2 получаем неравенство

$$(3r)^{r2^n} \geq 2^{C \log^2(1/\varepsilon)},$$

где r — число состояний автомата и $\varepsilon = 1/2^k$. Из этого неравенства получается нижняя оценка числа состояний.

В заключение автор выражает свою благодарность В. А. Бувичу за постановку задачи и существенную помощь при оформлении полученных результатов.

Список литературы

1. Витушкин А. Г., *Оценка сложности задачи табуляции*. Физматгиз, Москва, 1959.
2. Гашков С. Б., О сложности приближенной реализации непрерывных функций схемами и формулами в полиномиальных и некоторых других базисах. *Математические вопросы кибернетики* (1994) №5, 144–207.
3. Офман Ю. П., О приближенной реализации непрерывных функций на автоматах. *Доклады АН СССР* (1963) **152**, №4, 823–825.
4. Черепов А. Н., Оценки сложности приближения непрерывных функций некоторых классов детерминированными функциями с задержкой. В сб.: *Труды 16 Международной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем»*. Мех.-мат. ф-т МГУ, Москва, 2006, с. 118–122.
5. Черепов А. Н., О сложности приближения непрерывных функций детерминированными функциями с задержкой. В сб.: *Материалы 9 Международной конференции «Интеллектуальные системы и компьютерные науки»*. Мех.-мат. ф-т МГУ, Москва, 2006, с. 307–310.
6. Черепов А. Н., Оценки сложности приближения непрерывных функций некоторых классов детерминированными функциями с задержкой. *Дискретная математика* (2008) **20**, №4, 147–156.
7. Черепов А. Н., О приближении непрерывных функций детерминированными функциями с задержкой. *Дискретная математика* (2010) **22**, №1, 83–103.
8. Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику*. Наука, Москва, 1979.

Статья поступила 11.11.2011.