Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Серов, Оценка числа булевых функций, имеющих квадратичные приближения заданной точности, *Дискрет. матем.*, 2012, том 24, выпуск 3, 90–107

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1201>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 12:20:09

Оценка числа булевых функций, имеющих квадратичные приближения заданной точности

© 2012 г. А. А. Серов

Получены двусторонние оценки и асимптотические формулы для числа булевых функций от n переменных, которые с заданной точностью аппроксимируются квадратичными булевыми функциями.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 11-01-00139.

1. Введение

Пусть $\mathbb{F}_2$ — поле из двух элементов. Для произвольного натурального числа n будем обозначать через $V_n = \mathbb{F}_2^n$ пространство n -мерных векторов с компонентами из $\mathbb{F}_2$. Между множеством

$$\mathbb{F}_2^{V_n} = \{f: V_n \rightarrow \mathbb{F}_2\}$$

всех булевых функций n переменных и пространством $V_n^{V_n}$ можно установить взаимно однозначное соответствие, отождествляя функцию $f \in \mathbb{F}_2^{V_n}$ с вектором $\{f(x) \mid x \in V_n\}$.

Расстояние Хэмминга $\rho(f, g)$ между булевыми функциями $f, g \in \mathbb{F}_2^{V_n}$ определяется как число значений аргумента $x \in V_n$, при которых $f(x) \neq g(x)$. Для произвольного множества булевых функций $A \subset \mathbb{F}_2^{V_n}$ и функции $f \in \mathbb{F}_2^{V_n}$ обозначим через

$$\rho(f, A) = \min_{g \in A} \rho(f, g)$$

расстояние Хэмминга от f до ближайшей к ней функции из множества A .

В множестве $\mathbb{F}_2^{V_n}$ всех булевых функций выделяется класс квадратичных функций

$$\mathbb{Q}_n = \left\{ f \in \mathbb{F}_2^{V_n} : f(x_1, \dots, x_n) = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq n} b_{ij} x_i x_j \oplus \bigoplus_{i=1}^n a_i x_i \oplus a_0, b_{ij}, a_i \in \mathbb{F}_2 \right\},$$

где $\oplus$ — сложение в $\mathbb{F}_2$. Множество $\mathbb{Q}_n$ состоит из $|\mathbb{Q}_n| = 2^{\binom{n}{2} + n + 1}$ элементов:

$$\mathbb{Q}_n = (q_0, q_1, \dots, q_{2^{\binom{n}{2} + n + 1} - 1}).$$

Далее для упрощения записи формул будем использовать обозначения:

$$n_s^- = 2^{n-2} - 2^{n-s-2}, \quad n_s^+ = 2^{n-2} + 2^{n-s-2},$$

а также обозначение W_i для множества функций веса i из $\mathbb{Q}_n$, то есть

$$W_i = \{f \in \mathbb{Q}_n : \rho(f, 0) = i\}.$$

Известно (см. [3], с. 426), что

$$|M_i| = \begin{cases} 1 & \text{если } i = n_0^- = 0 \\ & \text{или } i = 2n_0^+ = 2^n, \\ 2^{s(s+1)} \frac{(2^n - 1)(2^{n-1} - 1) \dots (2^{n-2s+1} - 1)}{(2^{2s} - 1)2^{2s-2} - 1) \dots (2^2 - 1)} & \text{если } i = 2n_s^- \\ & \text{или } i = 2n_s^+, \\ & s = 1, \dots, [n/2], \\ 2^{\binom{n}{2}+n+1} - \sum_{i \neq 2^{n-1}} |W_i| & \text{если } i = n_0^+ = 2^{n-1}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1)$$

Замечание 1. Справедливы оценки

$$\begin{aligned} |W_{2n_s^-}| &< 3 \cdot 2^{2ns-2s^2+s-1}, \quad s = 1, \dots, [n/2] - 1, \\ |W_{2n_{[n/2]}^-}| &< 2^{2n[n/2]-2[n/2]^2+[n/2]} \\ &= \begin{cases} 2^{2k^2+k} & \text{если } n = 2k; \\ 2^{2k^2+3k} & \text{если } n = 2k + 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

Доказательство. Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^s \frac{(2^{n-2s+2i} - 1)(2^{n-2s+2i-1} - 1)}{2^{2i} - 1} &< 2^{2ns-4s^2} \prod_{i=1}^s \frac{2^{4i-1}}{2^{2i} - 1} \\ &= 2^{2ns-4s^2} \prod_{i=1}^s \frac{2^{2i-1}}{1 - 1/2^{2i}} \\ &= 2^{2ns-3s^2} \prod_{i=1}^s \frac{1}{1 - 1/2^{2i}} \end{aligned} \quad (3)$$

и

$$\prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{2^{2i}}\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^s \frac{1}{2^{2i}} = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4^s}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |W_{2n_s^-}| &= 2^{s(s+1)} \prod_{i=1}^s \frac{(2^{n-2s+2i} - 1)(2^{n-2s+2i-1} - 1)}{2^{2i} - 1} \\ &< 2^{2ns-2s^2+s} \frac{3}{2 + 1/4^s}. \end{aligned}$$

Теперь докажем, что при $s = \lfloor n/2 \rfloor$ для сомножителей в левой части (3) имеет место неравенство

$$\frac{(2^{n-2s+2i} - 1)(2^{n-2s+2i-1} - 1)}{2^{2i} - 1} < \frac{2^{n-2s+2i} 2^{n-2s+2i-1}}{2^{2i}}. \quad (4)$$

Неравенства, эквивалентные (4), имеют вид

$$\begin{aligned} 2^{2n-4s+4i-1} - 2^{n-2s+2i} - 2^{n-2s+2i-1} + 1 &< 2^{2n-4s+2i-1}(2^{2i} - 1), \\ 2^{2n-4s+2i-1} - 3 \cdot 2^{n-2s+2i-1} + 1 &< 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Неравенство (5) при четном n эквивалентно неравенству

$$1 - 3 + 1/2^{2i-1} < 0;$$

а при нечетном n эквивалентно неравенству

$$4 - 3 \cdot 2 + 1/2^{2i-1} < 0,$$

так как $1/2^{2i-1} < 2$ для любого $i \in \{1, \dots, s\}$, что доказывает (4).

Значит, при $s = \lfloor n/2 \rfloor$

$$\begin{aligned} |W_{2n_s^-}| &< 2^{s(s+1)} \prod_{i=1}^s \frac{2^{n-2s+2i} 2^{n-2s+2i-1}}{2^{2i}} = 2^{s(s+1)} \prod_{i=1}^s 2^{2n-4s+2i-1} \\ &= 2^{s(s+1)} 2^{2sn-4s^2+s(s+1)-s} = 2^{2sn-2s^2+s} \\ &= \begin{cases} 2^{2k^2+k} & \text{если } n = 2k, \\ 2^{2k^2+3k} & \text{если } n = 2k + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Замечание 1 доказано.

Пусть

$$D_n = \{2^{n-1}\} \cup \{2n_s^\pm, s = 0, 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\}$$

— множество всех i таких, что $|W_i| \neq 0$, тогда

$$\mathbb{Q}_n = W_{2^{n-1}} \bigcup_{i \in D_n} W_i.$$

Пусть

$$\mathbb{F}_2(\mathbb{Q}_n, r) = \{f \in \mathbb{F}_2^{V_n} : \rho(f, \mathbb{Q}_n) \leq r\}$$

— множество всех булевых функций от n переменных, расстояние от которых до множества $\mathbb{Q}_n$ квадратичных функций меньше или равно r .

В [4] доказаны предельные теоремы для распределения расстояния от случайной булевой функции до множества $\mathbb{Q}_n$. В частности, в [4] показано, что для любого фиксированного x

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\rho(f, \mathbb{Q}_n) - a_n}{b_n} \leq x \right\} = 1 - e^{-e^x}, \quad (6)$$

где

$$a_n = 2^{n-1} - 2^{(n-2)/2} n \sqrt{\ln 2} \left\{ 1 + \frac{1}{2n} - \frac{4 \ln(\pi n^2 \ln 2) - \ln 2}{8n^2 \ln 2} \right\},$$

$$b_n = \frac{2^{(n-2)/2}}{n \sqrt{\ln 2}}. \quad (7)$$

Из (6) и (7) следует, что если $\mathbb{F}_2(\mathbb{Q}_n, r)$ — множество всех булевых функций, расстояние Хэмминга от которых до множества квадратичных функций не превосходит r , то при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{0 \leq r < 2^{n-1} - 2^{n/2-1} \sqrt{\ln 2}} |2^{-2^n} |\mathbb{F}_2(\mathbb{Q}_n, r)| - (1 - e^{-e^{-x(n,r)}})| \rightarrow 0,$$

где $x(n, r)$ определяется равенством

$$r = 2^{n-1} - 2^{n/2-1} \sqrt{(n^2 \ln 2 + n \ln 2 - 2 \ln n - \ln(\pi \ln 2) + \ln \sqrt[4]{2} + 2x(n, r))}; \quad (8)$$

Иными словами, для основной массы булевых функций от n переменных расстояние до множества квадратичных функций имеет вид $2^{n-1} - \sqrt{2^{n-2}(n^2 \ln 2 + n \ln 2 - 2 \ln n) + O(2^{n/2}/n)}$ при $n \rightarrow \infty$.

В настоящей работе методом включения–исключения получены точные формулы и верхние и нижние оценки для числа элементов множества $\mathbb{F}_2(\mathbb{Q}_n, r)$. Один из основных результатов (объединение части формулировок теорем 2, 3 и предложения 2) можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1. Если $n \geq 3$, то

$$(1 - Q(n, r)) 2^{\binom{n}{2} + n + 1} \sum_{m=0}^r \binom{2^n}{m} \leq |\mathbb{F}_2(\mathbb{Q}_n, r)| \leq 2^{\binom{n}{2} + n + 1} \sum_{m=0}^r \binom{2^n}{m},$$

где $Q(n, r) = 0$ при $0 \leq r < 2^{n-3}$,

$$Q(n, r) < \frac{2^{-n^2(c_r^2-3)/6+n+1}}{n^2} \exp \left\{ \frac{c_r n^3}{7 \cdot 2^{n/2}} \right\}$$

при $n \geq 15$, и

$$r = 2^{n-1} - c_r n \sqrt{2^{n-2} \ln 2} \geq 0, \quad c_r > 1.$$

Замечание 2. Теорема 1 позволяет получать оценки левого хвоста распределения расстояния от случайной булевой функции до множества квадратичных булевых функций.

Отношения верхних и нижних оценок в теореме 1 стремятся к 1, если $n \rightarrow \infty$ и

$$r < 2^{n-1} - c n \sqrt{2^{n-2} \ln 2}, \quad c > \sqrt{3} = 1,7321 \dots$$

Для сумм $\sum_{m=0}^r \binom{2^n}{m}$ при $r \leq 2^{n-1}$ в [1] (см. §2) получены явные верхние и нижние оценки, и с их помощью показано, что в области больших отклонений, где $1 - e^{-e^{-x(n,r)}} \rightarrow 0$, относительная погрешность приближения величины $2^{-2^n} |\mathbb{F}_2(\mathbb{Q}_n, r)|$ величиной $1 - e^{-e^{-x(n,r)}}$ быстро растет с уменьшением r .

Следствие 1. Если $c > 1$ и $n, r \rightarrow \infty$ так, что выполняется условие

$$r < 2^{n-1} - c\sqrt{2^{n-2}(n^2 + n)\ln 2},$$

то при достаточно больших n

$$\frac{|\mathbb{F}_2(\mathbb{Q}_n, r)|}{2^{2n}(1 - e^{-e^{-x(n,r)}})} < \frac{3}{2c}$$

2. Неравенства включения–исключения

Считая равными нулю суммы, в которых верхний предел суммирования меньше нижнего, введем

$$\begin{aligned} N_{2^n}^{(1)}(r) &= \sum_{m=0}^r \binom{2^n}{m}, \\ N_{2^n}^{(2)}(k, r) &= |\{f \in \mathbb{F}_2^{V_n} : \rho(f, 0) \leq r, \rho(f, g) \leq r, \rho(g, 0) = k\}|, \\ A_n^-(t, r) &= 2^{\binom{n}{2}+n} \sum_{s=1}^t |W_{2n_s^-}| N_{2^n}^{(2)}(2n_s^-, r), \\ A_n^+(t, r) &= 2^{\binom{n}{2}+n} \sum_{s=t}^{\lfloor n/2 \rfloor} |W_{2n_s^+}| N_{2^n}^{(2)}(2n_s^+, r), \\ B_n(r) &= 2^{\binom{n}{2}+n+1} \left(2^{\binom{n}{2}+n} - \sum_{s=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} |W_{2n_s^-}| - 1 \right) N_{2^n}^{(2)}(n_0^+, r), \end{aligned} \quad (9)$$

и

$$S_n^{(2)}(r) = \sum_{\substack{q_1, q_2 \in \mathbb{Q}_n \\ q_1 \neq q_2}} |\{f \in \mathbb{F}_2^{V_n} : \rho(f, q_1) \leq r, \rho(f, q_2) \leq r\}|.$$

Теорема 2. (а) Если $0 \leq r < 2^{n-1}$, то

$$2^{\binom{n}{2}+n+1} N_{2^n}^{(1)}(r) - S_n^{(2)}(r) \leq |\mathbb{F}_2(\mathbb{Q}_n, r)| \leq 2^{\binom{n}{2}+n+1} N_{2^n}^{(1)}(r), \quad (10)$$

где

$$S_n^{(2)}(r) = \begin{cases} 0 & \text{если } r < n_1^-, \\ A_n^-(t, r) & \text{если } n_t^- \leq r < n_{t+1}^-, \\ & \text{и } t = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor - 1, \\ A_n^-([n/2], r) & \text{если } n_{\lfloor n/2 \rfloor}^- \leq r < 2^{n-2}, \\ A_n^-([n/2], r) + B_n(r) & \text{если } 2^{n-2} \leq r < n_{\lfloor n/2 \rfloor}^+, \\ A_n^-([n/2], r) + B_n(r) + A_n^+(t, r) & \text{если } n_t^+ \leq r < n_{t-1}^+, \\ & \text{и } t = 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor, \\ A_n^-([n/2], r) + B_n(r) + A_n^+(1, r) & \text{если } n_1^+ \leq r < 2^{n-1}. \end{cases} \quad (11)$$

(б) Если $0 \leq r < 2^{n-3}$, то

$$|\mathbb{F}_2(\mathbb{Q}_n, r)| = 2^{\binom{n}{2}+n+1} N_{2^n}^{(1)}(r).$$

Доказательство. Так как

$$\mathbb{F}_2(\mathbb{Q}_n, r) = \bigcup_{j=0}^{2^{\binom{n}{2}+n+1}-1} \{f \in \mathbb{F}_2^{V_n} : \rho(f, q_j) \leq r\},$$

то, согласно формуле включения–исключения (см. [5]),

$$|\mathbb{F}_2(\mathbb{Q}_n, r)| = \sum_{k=1}^{2^{\binom{n}{2}+n+1}} (-1)^{k-1} \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_k < 2^{\binom{n}{2}+n+1}} |\{f \in \mathbb{F}_2^{V_n} : \max_{1 \leq j \leq k} \rho(f, q_{i_j}) \leq r\}|, \quad (12)$$

а значения неполных сумм в (12) по k от 1 до $m \in \{1, 2, \dots, 2^{\binom{n}{2}+n+1}\}$ дают верхние (при нечетных m) и нижние (при четных m) оценки для $|\mathbb{F}_2(\mathbb{Q}_n, r)|$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно получить формулы для чисел и значений слагаемых в правой части (12), соответствующих $k = 1, 2$.

При $k = 1$ слагаемые в (12) имеют вид

$$|\{f \in \mathbb{F}_2^{V_n} : \rho(f, q_j) \leq r\}| = \sum_{m=0}^r \binom{2^n}{m} = N_{2^n}^{(1)}(r).$$

Число таких слагаемых в (12) равно $2^{\binom{n}{2}+n+1}$. Поэтому

$$\begin{aligned} |\mathbb{F}_2(\mathbb{Q}_n, r)| &\leq \sum_{j=0}^{2^{\binom{n}{2}+n+1}-1} |\{f \in \mathbb{F}_2^{V_n} : \rho(f, q_j) \leq r\}| \\ &= 2^{\binom{n}{2}+n+1} \sum_{m=0}^r \binom{2^n}{m} = 2^{\binom{n}{2}+n+1} N_{2^n}^{(1)}(r); \end{aligned}$$

тем самым, доказана оценка сверху в части (а) теоремы.

В силу (1), $\rho(q_i, q_j) \geq 2^{n-2}$ при любых

$$\rho(q_i, q_j) \geq 2^{n-2}, \quad 0 \leq i < j < 2^{\binom{n}{2}+n+1};$$

значит,

$$\rho(f, q_i) + \rho(f, q_j) \geq 2^{n-2}$$

для любой функции $f \in \mathbb{F}_2^{V_n}$, то есть,

$$\max\{\rho(f, q_i), \rho(f, q_j)\} \geq 2^{n-3}.$$

Поэтому в сумме (12) при $r < 2^{n-3}$ все слагаемые с $k > 1$ равны 0, и тем самым доказано утверждение (б).

Если выбор квадратичных функций $q_{i_1}, \dots, q_{i_k} \in \mathbb{Q}_n$ таков, что $q_{i_u}(x) + q_{i_v}(x) = 1$ для всех $x \in V_n$ и некоторого $1 \leq u < v \leq k$, то для любой булевой функции $f \in \mathbb{F}_2^{V_n}$ справедливо равенство

$$\rho(f, q_{i_u}) + \rho(f, q_{i_v}) = 2^n$$

следовательно, в этом случае

$$\max_{1 \leq j \leq k} \rho(f, q_{i_j}) \geq 2^{n-1},$$

иными словами, при $r < 2^{n-1}$

$$|\{f \in \mathbb{F}_2^{V_n} : \max_{1 \leq j \leq k} \rho(f, q_{i_j}) \leq r\}| = 0.$$

Поэтому в дальнейшем в сумме (12) рассматриваются только наборы попарно различных квадратичных булевых функций, попарные суммы которых отличны от функции, тождественно равной 1.

Многочлены Жегалкина функции $q(x) \in \mathbb{Q}_n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in V_n$, можно записать в матричном виде

$$q(x) = xQ_q x^T \oplus a_q x^T \oplus a_0,$$

где T — оператор транспонирования, $Q_q = (q_{ij})$ — верхнетреугольная двоичная $(n \times n)$ -матрица с нулевой главной диагональю, $a_q = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $a_i \in \mathbb{F}_2$. С матрицей Q_q связана симметричная матрица

$$\tilde{Q}_q = Q_q \oplus Q_q^T,$$

называемая симплектической матрицей.

Известно (см., например, [3], с. 422, или [2], с. 146), что если ранг симплектической формы $\tilde{Q}_q$, соответствующей q , равен $2s$, то существует такое линейное невырожденное преобразование $t: V_n \rightarrow V_n$, что $q^t(x) = q(t(x))$ имеет один из перечисленных ниже видов:

(а) если $\text{rank } \tilde{Q}_q = 0$, то либо $q^t(x) = a_0$, $a_0 \in \mathbb{F}_2$, либо $q^t(x) = x_1$;

(б) если $\text{rank } \tilde{Q}_q = 2s$, $s \geq 1$, то либо

$$q^t(x) = \sum_{i=1}^s x_{2i-1} x_{2i} \oplus a_0, \quad a_0 \in \mathbb{F}_2,$$

или

$$q^t(x) = \sum_{i=1}^s x_{2i-1} x_{2i} \oplus x_{2s+1}.$$

Далее, заметим, что множество $\mathbb{Q}_n$ квадратичных функций образует в $\mathbb{F}_2^{V_n}$ группу по сложению, то есть является линейным кодом, а именно, линейным кодом Рида–Маллера второго порядка. Поэтому

$$\begin{aligned} |\{f \in \mathbb{F}_2^{V_n} : \max_{1 \leq j \leq k} \rho(f, q_{i_j}) \leq r\}| &= |\{f \in \mathbb{F}_2^{V_n} : \max_{1 \leq j \leq k} \rho(f \oplus q_{i_1}, q_{i_j} \oplus q_{i_1}) \leq r\}| \\ &= |\{f \in \mathbb{F}_2^{V_n} : \max_{1 \leq j \leq k} \rho(f, q_{i_j} \oplus q_{i_1}) \leq r\}| \end{aligned}$$

для любого набора функций $q_{i_1}, \dots, q_{i_k} \in \mathbb{Q}_n$, то есть при вычислении значений слагаемых в (12) достаточно рассматривать только наборы квадратичных функций, содержащие нулевую функцию, поскольку $q_{i_1} \oplus q_{i_1} = 0$.

Значит, при $k = 2$ слагаемые в (12) есть $|\{f \in \mathbb{F}_2^{V_n} : \rho(f, 0) \leq r, \rho(f, q) \leq r\}|$.

Если число квадратичных функций веса $y > 0$ есть $|W_y|$, то число упорядоченных пар квадратичных функций, находящихся на расстоянии y друг от друга, равно $2^{\binom{n}{2}+n+1}|W_y|$, а неупорядоченных пар — в два раза меньше. Если $y = 2^n$, то сумма входящих в такую пару функций тождественно равна 1; эти случаи уже исключены из рассмотрения. Отсюда следует, что для каждого фиксированного $r < 2^{n-1}$ внутренняя сумма в (12), соответствующая случаю $k = 2$, совпадает с

$$2^{\binom{n}{2}+n} \sum_{\substack{q \in Q_n \\ q \neq 0}} N_{2^n}^{(2)}(wt(q), r) = S_n^{(2)}(r), \quad (13)$$

где $wt(\cdot)$ означает вес функции, и

$$N_{2^n}^{(2)}(wt(q), r) = |\{f \in \mathbb{F}_2^{V_n} : \max\{\rho(f, 0), \rho(f, q)\} \leq r\}|.$$

Предложение 1. Пусть $b = (b_1, \dots, b_{2^n}) \in \mathbb{F}_2^{V_n}$ и $wt(b) \in \{1, \dots, 2^n\}$, тогда

- если $r < wt(b)/2$, то $N_{2^n}^{(2)}(wt(b), r) = 0$,
- если $wt(b)/2 \leq r < 2^n$, то

$$N_{2^n}^{(2)}(wt(b), r) = \sum_{m_0=0}^{r-wt(b)/2} \sum_{m_1=\max\{wt(b)-(r-m_0), 0\}}^{\min\{r-m_0, wt(b)\}} \binom{2^n - wt(b)}{m_0} \binom{wt(b)}{m_1} \quad (14)$$

(суммы, в которых верхний предел суммирования меньше нижнего, считаются равными нулю).

Доказательство. При фиксированной функции $b = (b_1, \dots, b_{2^n}) \in \mathbb{F}_2^{V_n}$, сопоставим каждой функции $a = (a_1, \dots, a_{2^n}) \in \mathbb{F}_2^{V_n}$ величины

$$m_0 = |\{i \in \{1, \dots, 2^n\} : b_i = 0, a_i = 1\}|,$$

$$m_1 = |\{i \in \{1, \dots, 2^n\} : b_i = 1, a_i = 1\}|.$$

Число функций $a \in \mathbb{F}_2^{V_n}$ с фиксированными значениями m_0 и m_1 равно, очевидно, $\binom{2^n - wt(b)}{m_0} \binom{wt(b)}{m_1}$. Далее,

$$\rho(a, 0) = m_0 + m_1,$$

$$\rho(a, b) = m_0 + wt(b) - m_1,$$

то есть, при $wt(b)/2 \leq r < n$ условия $\{\rho(a, 0) \leq r, \rho(a, b) \leq r\}$ эквивалентны условиям

$$\begin{cases} 0 \leq m_0 \leq n - wt(b), \\ 0 \leq m_1 \leq wt(b), \\ m_0 + m_1 \leq r, \\ m_0 + wt(b) - m_1 \leq r, \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leq m_0 \leq r - wt(b)/2, \\ 0 \leq m_1 \leq wt(b), \\ wt(b) - (r - m_0) \leq m_1 \leq r - m_0. \end{cases}$$

Значит,

$$N_{2^n}^{(2)}(wt(b), r) = |\{a \in \mathbb{F}_2^{V_n} : \max\{\rho(a, 0), \rho(a, b)\} \leq r\}|$$

$$= \sum_{m_0=0}^{r-wt(b)/2} \sum_{m_1=\max\{wt(b)-(r-m_0), 0\}}^{\min\{r-m_0, wt(b)\}} \binom{2^n - wt(b)}{m_0} \binom{wt(b)}{m_1}.$$

В силу (1) и предложения 1, если $r < 2^{n-3}$, то $N_{2^n}^{(2)}(wt(q), r) = 0$ для любого $q \in \mathbb{Q}_n$, то есть $S_n^{(2)}(r) = 0$ при $r < 2^{n-3} = n_1^-$. Если $2^{n-3} \leq r < 2^{n-1}$, то

$$S_n^{(2)}(r) = 2^{\binom{n}{2}+n} \left(\sum_{s=1}^{[n/2]} (|W_{2n_s^-}| N_{2^n}^{(2)}(2n_s^-, r) + |W_{2n_s^+}| N_{2^n}^{(2)}(2n_s^+, r)) + |W_{2^{n-1}}| N_{2^n}^{(2)}(n_0^+, r) \right). \quad (15)$$

Рассмотрим последнее выражение при различных значениях r , принимая во внимание, что $N_{2^n}^{(2)}(k, r) = 0$ при $r < k/2$. При $n_t^- \leq r < n_{t+1}^-$, $t = 1, \dots, [n/2] - 1$, в (15) отличны от нуля лишь слагаемые, содержащие в аргументах $2n_s^-$, $s = 1, \dots, t$, то есть, согласно принятым обозначениям,

$$S_n^{(2)}(r) = 2^{\binom{n}{2}+n} \sum_{s=1}^t |W_{2n_s^-}| N_{2^n}^{(2)}(2n_s^-, r) = A_n^-(t, r).$$

Если $n_{[n/2]}^- \leq r < 2^{n-2}$, то

$$S_n^{(2)}(r) = 2^{\binom{n}{2}+n} \sum_{s=1}^{[n/2]} |W_{2n_s^-}| N_{2^n}^{(2)}(2n_s^-, r) = A_n^-([n/2], r).$$

Если $r \geq 2^{n-2}$, то, в силу предложения 1, поскольку $n_0^+ = 2^{n-1}$, последнее слагаемое в (15), а именно,

$$2^{\binom{n}{2}+n} |W_{2^{n-1}}| N_{2^n}^{(2)}(n_0^+, r) = B_n(r),$$

также отлично от нуля. При $n_t^+ \leq r < n_{t+1}^+$, $t = 2, \dots, [n/2]$, в выражении (15) равными нулю оказываются слагаемые $|W_{2n_s^+}| N_{2^n}^{(2)}(2n_s^+, r)$, $s = 1, \dots, t - 1$, значит,

$$\begin{aligned} S_n^{(2)}(r) &= A_n^-([n/2], r) + B_n(r) + \sum_{s=t}^{[n/2]} |W_{2n_s^+}| N_{2^n}^{(2)}(2n_s^+, r) \\ &= A_n^-([n/2], r) + B_n(r) + A_n^+(t, r); \end{aligned}$$

наконец, если $n_1^+ \leq r < 2^{n-1}$, то все слагаемые в (15) отличны от нуля.

Учитывая, что

$$|W_s^-| = |W_s^+|, \quad |W_{2^{n-1}}| = 2^{\binom{n}{2}+n+1} - \sum_{i \neq n_0^+} |W_i|,$$

в силу (1), приходим к выражениям (9) и (11), что завершает доказательство теоремы 2.

Точные формулы для величин $N_{2^n}^{(1)}(r)$, $S_n^{(2)}(r)$ в теоремах 1 и 2 даже при умеренных значениях n слишком сложны для вычислений. Далее будут приведены простые оценки этих величин, позволяющие делать выводы о точности формул в теоремах 1 и 2 при $n, r \rightarrow \infty$.

Для оценки $N_{2^n}^{(1)}(r)$ при $r \leq 2^{n-1}$ можно использовать неравенства из [1]:

$$\binom{2^n}{r}(1+q) \leq N_{2^n}^{(1)}(r) \leq \binom{2^n}{r} \frac{1}{1-q}, \quad q = \frac{r}{2^n - r + 1}, \quad (16)$$

$$2^{2^n} \Phi(-\sqrt{2^n V(1 - r/2^{n-1})}) \leq N_{2^n}^{(1)}(r) \leq 2^{2^n} \Phi(-\sqrt{2^n V(1 - (r+1)/2^{n-1})}),$$

и

$$\frac{2^{n2^n}}{r^r (2^n - r)^{2^n - r} \sqrt{2^{n+1} \pi V(1 - r/2^{n-1})}} \left(1 - \frac{1}{2^n V(1 - r/2^{n-1})}\right) < N_{2^n}^{(1)}(r) < \frac{2^{n2^n}}{(r+1)^{r+1} (2^n - r - 1)^{2^n - r - 1} \sqrt{2^{n+1} \pi V(1 - (r+1)/2^{n-1})}},$$

где

$$V(z) = (1-z) \ln(1-z) + (1+z) \ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{k(2k-1)} \geq z^2,$$

и $\Phi(\cdot)$ — функция стандартного нормального распределения.

Нам потребуется также простая оценка для $N_{2^n}^{(2)}(k, r)$.

Предложение 2. Если $0 \leq k \leq 2^n$, k — четное число и $0 \leq r \leq 2^{n-1}$, то

$$N_{2^n}^{(2)}(k, r) \leq \binom{k}{k/2} \binom{2^n - k}{r - k/2} \frac{1 + q_k}{(1 - q_k)^2}, \quad (17)$$

где

$$q_k = \frac{r - k/2}{2^n - k/2 - r + 1} < q = \frac{r}{2^n - r + 1}.$$

Доказательство. Чтобы получить верхнюю оценку для $N_{2^n}^{(2)}(k, r)$, заменим все слагаемые во внутренней сумме (14) их максимальным значением $\binom{k}{k/2}$, положим

$$q_k = \frac{\binom{2^n - k}{r - k/2 - 1}}{\binom{2^n - k}{r - k/2}} = \frac{r - k/2}{2^n - k/2 - r + 1},$$

используем оценки

$$\binom{2^n - k}{r - k/2 - m} \leq q_k^m \binom{2^n - k}{r - k/2},$$

и получим

$$\begin{aligned}
 N_{2^n}^{(2)}(k, r) &= \sum_{m_0=0}^{r-k/2} \sum_{m_1=\max\{k-(r-m_0), 0\}}^{\min\{r-m_0, k\}} \binom{2^n-k}{m_0} \binom{k}{m_1} \\
 &< \binom{k}{k/2} \sum_{m=0}^{r-k/2} \binom{2^n-k}{r-k/2-m} (1+2m) \\
 &< \binom{k}{k/2} \binom{2^n-k}{r-k/2} \sum_{m=0}^{\infty} q_k^m (1+2m) \\
 &= \binom{k}{k/2} \binom{2^n-k}{r-k/2} \frac{1+q_k}{(1-q_k)^2}.
 \end{aligned}$$

Неравенство $q_k < q$ следует из того, что

$$\begin{aligned}
 q_k &= \frac{r-k/2}{2^n-k/2-r+1} = 1 - \frac{2^n-2r+1}{2^n-k/2-r+1} \\
 &< 1 - \frac{2^n-2r+1}{2^n-r+1} = \frac{r}{2^n-r+1} = q.
 \end{aligned}$$

Предложение 2 доказано.

Доказательство теоремы 1. Согласно теореме 2,

$$2^{\binom{n}{2}+n+1} N_{2^n}^{(1)}(r) - S_n^{(2)}(r) \leq |\mathbb{F}_2(\mathbb{Q}_n, r)| \leq 2^{\binom{n}{2}+n+1} N_{2^n}^{(1)}(r),$$

поэтому при

$$Q(n, r) = \frac{S_n^{(2)}(r)}{2^{\binom{n}{2}+n+1} N_{2^n}^{(1)}(r)}, \quad (18)$$

получаем утверждение теоремы 1:

$$2^{\binom{n}{2}+n+1} N_{2^n}^{(1)}(r)(1-Q(n, r)) \leq |\mathbb{F}_2(\mathbb{Q}_n, r)| \leq 2^{\binom{n}{2}+n+1} N_{2^n}^{(1)}(r).$$

Для завершения доказательства остается обосновать оценки величин $Q(n, r)$.

Из части (б) теоремы 2 следует, что

$$Q(n, r) = 0, \quad 0 \leq r < 2^{n-3}.$$

Теорема 3. *Если*

$$n \geq 15, \quad r = 2^{n-1} - c_r n \sqrt{2^{n-2} \ln 2} \geq 0, \quad c_r > 1,$$

то

$$Q(n, r) < \frac{2^{-n^2(c_r^2-3)/6+n+1}}{n^2} \exp \left\{ \frac{(c_r n)^3}{7 \cdot 2^{n/2}} \right\}.$$

Доказательство. Учитывая (15) и то, что чем меньше расстояние между двумя функциями, тем больше функций попадает в пересечение их r -окрестностей, то есть при $r < 2^{n-1}$, $s = 1, \dots, [n/2]$

$$N_{2_n}^{(2)}(2n_s^+, r) < N_{2_n}^{(2)}(n_0^+, r) < N_{2_n}^{(2)}(2n_s^-, r) \leq N_{2_n}^{(2)}(2n_1^-, r),$$

и поэтому

$$\begin{aligned} Q(n, r) &= \frac{1}{2N_{2_n}^{(1)}(r)} \sum_{s=1}^{[n/2]} (|W_{2n_s^-}| N_{2_n}^{(2)}(2n_s^-, r) + |W_{2n_s^+}| N_{2_n}^{(2)}(2n_s^+, r)) \\ &\quad + \frac{1}{2N_{2_n}^{(1)}(r)} |W_{2n-1}| N_{2_n}^{(2)}(n_0^+, r) \\ &< \frac{1}{2N_{2_n}^{(1)}(r)} \sum_{s=1}^{[n/2]} (|W_{2n_s^-}| N_{2_n}^{(2)}(2n_1^-, r) + |W_{2n_s^+}| N_{2_n}^{(2)}(2n_1^-, r)) \\ &\quad + \frac{1}{2N_{2_n}^{(1)}(r)} |W_{2n-1}| N_{2_n}^{(2)}(2n_1^-, r). \end{aligned} \quad (19)$$

Принимая во внимание равенства

$$|W_{2n_s^-}| = |W_{2n_s^+}|, \quad |W_{2n-1}| = 2^{\binom{n}{2}+n+1} - \sum_{i \neq n_0^+} |W_i|$$

а также оценки величин $N_{2_n}^{(1)}(r)$ и $N_{2_n}^{(2)}(2n_1^-, r)$, получим, что

$$\begin{aligned} Q(n, r) &< \frac{2^{\binom{n}{2}+n} N_{2_n}^{(2)}(2n_1^-, r)}{N_{2_n}^{(1)}(r)} \\ &\leq \frac{2^{\binom{n}{2}+n} \binom{2n_1^-}{n_1^-} \binom{2^n-2n_1^-}{r-n_1^-} (1+q_{2n_1^-}) / (1-q_{2n_1^-})^2}{\binom{2^n}{r} (1+q)}, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$q_{2n_1^-} = \frac{r - n_1^-}{2^n - n_1^- - r + 1} < q = \frac{r}{2^n - r + 1}.$$

Так как

$$\begin{aligned} \binom{2^n}{r} &= \binom{2^n}{2^{n-1}} \prod_{k=1}^{2^{n-1}-r} \frac{r+k}{2^{n-1}+k}, \\ \binom{2^n-2m}{r-m} &= \binom{2^n-2m}{2^{n-1}-m} \prod_{k=1}^{2^{n-1}-r} \frac{r-m+k}{2^{n-1}-m+k}, \end{aligned}$$

справедливо равенство

$$\frac{\binom{2m}{m} \binom{2^n-2m}{r-m}}{\binom{2^n}{r}} = \frac{\binom{2m}{m} \binom{2^n-2m}{2^{n-1}-m}}{\binom{2^n}{2^{n-1}}} \prod_{k=1}^{2^{n-1}-r} \frac{(r-m+k)(2^{n-1}+k)}{(r+k)(2^{n-1}-m+k)}. \quad (21)$$

С помощью уточненной формулы Стирлинга (см. [5], гл. 2, §9)

$$\sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{e}\right)^m e^{1/(12m+1)} < m! \sqrt{2\pi m} \left(\frac{m}{e}\right)^m e^{1/12m},$$

оценим первую дробь в правой части (21):

$$\begin{aligned} \frac{\binom{2m}{m} \binom{2^n-2m}{2^{n-1}-m}}{\binom{2^n}{2^{n-1}}} &= \frac{(2m)! (2^n-2m)!}{2^n!} \left(\frac{2^{n-1}!}{m! (2^{n-1}-m)!} \right)^2 \\ &< \frac{1}{\sqrt{\pi m(1-2m/2^n)}} \exp \left\{ \frac{1}{24m(1-2m/2^n)} + \frac{1}{3 \cdot 2^n} \right\}. \end{aligned}$$

Значит, при $s \geq 1$ и $m = n_s^-$ или $m = n_s^+$

$$\begin{aligned} \frac{\binom{2m}{m} \binom{2^n-2m}{2^{n-1}-m}}{\binom{2^n}{2^{n-1}}} &< \frac{1}{\sqrt{2^{n-3}\pi(1-1/2^{2s})}} \exp \left\{ \frac{1}{24 \cdot 2^{n-3}(1-1/2^{2s})} + \frac{1}{3 \cdot 2^n} \right\} \\ &\leq \frac{e^{7/(9 \cdot 2^n)}}{\sqrt{\pi 2^{n-3} 3/4}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Нетрудно проверить, что при $y = 2^{n-1} - r$

$$\frac{(2^{n-1} + k)(r - m + k)}{(r + k)(2^{n-1} - m + k)} = 1 - \frac{my}{(2^{n-1} + k - m)(2^{n-1} + k - y)}.$$

Таким образом, сомножители произведения (21) строго возрастают по k . Поэтому

$$\prod_{k=1}^{2^{n-1}-r} \frac{(r - m + k)(2^{n-1} + k)}{(r + k)(2^{n-1} - m + k)} \leq \left(\frac{2^n - r}{2^{n-1}} \frac{2^{n-1} - m}{2^n - r - m} \right)^{2^{n-1}-r}, \quad (23)$$

что убывает при растущем m , так как $r < 2^{n-1}$.

Из (20), (22) и того, что $q_k < q$ и

$$1 - q_k = \frac{2^n - 2r + 1}{2^n - k/2 - r + 1} \geq \frac{2^n - 2r}{2^n - k/2 - r}, \quad r \geq k/2,$$

следует оценка

$$Q(n, r) < \frac{2^{\binom{n}{2}+n+1} e^{7/(9 \cdot 2^n)}}{\sqrt{3\pi 2^{n-3}}} \left(\frac{2^n - r}{2^{n-1}} \frac{2^{n-1} - n_1^-}{2^n - r - n_1^-} \right)^{2^{n-1}-r} \left(\frac{2^n - n_1^- - r}{2^n - 2r} \right)^2. \quad (24)$$

Оценим сомножители в (24), положив $y = 2^{n-1} - r$. По условию

$$y = c_r n \sqrt{2^{n-2} \ln 2},$$

тогда при $n \geq 15$ и $c_r > 1$

$$\left(\frac{2^n - n_1^- - r}{2^{n-1} - r} \right)^2 = \left(\frac{3 \cdot 2^{n-3}}{y} + 1 \right)^2 < \left(\frac{3 \cdot 2^{n/2}}{4n \sqrt{\ln 2}} + 1 \right)^2 < \frac{2^n}{n^2}. \quad (25)$$

Используя неравенства

$$1 - x \leq e^{-x}, \quad 8\sqrt{\ln 2} < 7, \quad \frac{7 \ln 2}{36} < \frac{1}{7},$$

получим, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{2^n - r}{2^{n-1}} \frac{2^{n-1} - n_1^-}{2^n - r - n_1^-} \right)^{2^{n-1} - r} &= \left(\frac{3}{4} \right)^y \left(\frac{2^{n-1} + y}{3 \cdot 2^{n-3} + y} \right)^y = \left(1 - \frac{y}{12 \cdot 2^{n-3} + 4y} \right)^y \\ &< \exp \left\{ -\frac{y^2}{3 \cdot 2^{n-1} + 4y} \right\} < \exp \left\{ -\frac{c_r^2 n^2 (\ln 2)/6}{1 + (7/6)c_r n \sqrt{2^{-n}}} \right\} \\ &= 2^{-c_r^2 n^2/6} \exp \left\{ \frac{(7/6)c_r^3 n^3 ((\ln 2)/6) \sqrt{2^{-n}}}{1 + (7/6)c_r n \sqrt{2^{-n}}} \right\} \\ &< 2^{-c_r^2 n^2/6} \exp \left\{ \frac{(c_r n)^3}{7 \cdot 2^{n/2}} \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Значит, при $n \geq 15$ и

$$r = 2^{n-1} - c_r n \sqrt{2^{n-2} \ln 2} \geq 0, \quad c_r > 1,$$

согласно (25), (26),

$$Q(n, r) < \frac{2^{\binom{n}{2} + n + 1} e^{7/(9 \cdot 2^n)}}{\sqrt{3\pi} 2^{n-3}} 2^{-c_r^2 n^2/6} \exp \left\{ \frac{(c_r n)^3}{7 \cdot 2^{n/2}} \right\} \frac{2^n}{n^2}.$$

Учитывая, что при $n \geq 15$

$$\frac{e^{7/(9 \cdot 2^n)}}{\sqrt{3\pi/2}} < \frac{1}{2},$$

упростим оценку сверху для $Q(n, r)$:

$$Q(n, r) < \frac{2^{-n^2(c_r^2-3)/6+n+1}}{n^2} \exp \left\{ \frac{(c_r n)^3}{7 \cdot 2^{n/2}} \right\}.$$

Теорема 3 доказана.

Доказательство следствия 1. Согласно определению (8),

$$x(n, r) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{n-2}} (2^{n-1} - r)^2 - (n^2 + n) \ln 2 + \ln \left(\frac{n^2 \pi \ln 2}{\sqrt[4]{2}} \right) \right).$$

Поэтому при $n \rightarrow \infty$

$$e^{-x(n, r)} = \frac{2^{(n^2+n)/2+1/8}}{n \sqrt{\pi \ln 2}} e^{-(2^{n-1}-r)^2/2^{n-1}} \rightarrow 0,$$

если

$$\frac{(2^{n-1} - r)^2}{2^{n-1}} - \frac{n^2 + n}{2} \ln 2 \rightarrow \infty,$$

а последнее условие выполняется, если

$$n \rightarrow \infty, \quad \exists c > 1: \quad 0 \leq r < 2^{n-1} - c \sqrt{2^{n-2}(n^2 + n) \ln 2}. \quad (27)$$

Значит, при условиях (27) и достаточно больших n

$$1 - e^{-e^{-x(n,r)}} > e^{-x(n,r)} \frac{1}{\sqrt[8]{2}} = \frac{2^{(n^2+n)/2}}{n \sqrt{\pi \ln 2}} e^{-(2^{n-1}-r)^2/2^{n-1}}. \quad (28)$$

С другой стороны, из неравенства в доказательстве следствия 1 в [1] следует оценка

$$N_{2^n}^{(1)}(r) < \frac{2^{2^n+n/2-3/2}}{\sqrt{\pi}(2^{n-1}-r-1)} e^{-(2^{n-1}-r-1)^2/2^{n-1}}.$$

Так как

$$|\mathbb{F}_2(\mathbb{Q}_n, r)| < 2^{\binom{n}{2}+n+1} N_{2^n}^{(1)}(r),$$

из (28) и последнего неравенства следует, что при условиях (27) и достаточно больших n

$$\begin{aligned} \frac{|\mathbb{F}_2(\mathbb{Q}_n, r)|}{2^{2^n}(1 - e^{-e^{-x(n,r)}})} &< \frac{2^{2^n+3n/2+\binom{n}{2}}(\sqrt{2\pi}(2^{n-1}-r-1))^{-1} e^{-(2^{n-1}-r-1)^2/2^{n-1}}}{(2^{2^n+(n^2+n)/2}/(n\sqrt{\pi \ln 2})) e^{-(2^{n-1}-r)^2/2^{n-1}}} \\ &< \frac{2^{(n-1)/2} n \sqrt{\ln 2}}{2^{n-1}-r-1} e^{(2^n-2r)/2^{n-1}} \\ &< \frac{2^{(n-1)/2} n \sqrt{\ln 2}}{c \sqrt{2^{n-2}(n^2+n) \ln 2} - 1} e^{(2^n-2r)/2^{n-1}} < \frac{1,5}{c}. \end{aligned}$$

Следствие 1 доказано.

Для $Q(n, r)$ при $r < 2^{n-2}$ справедливы и более точные оценки.

Теорема 4. Если $n \geq 3$, $n_t^- \leq r < n_{t+1}^-$, $t = 1, \dots, [n/2] - 1$, тогда

$$Q(n, r) < \frac{18,75}{\sqrt{3\pi} 2^{n+3}} \exp \left\{ -\frac{2^{n-3}(1 + 1/2^{t+1})^2}{5 + 1/2^{t-1}} + t(2n - 2t + 1) \ln 2 + \ln t + \frac{7}{9 \cdot 2^n} \right\}.$$

Если $n_{[n/2]}^- \leq r < 2^{n-2}$, тогда

$$Q(n, r) < \frac{6,25}{\sqrt{3\pi} 2^{n+1}} \exp \left\{ -\frac{2^{n-3}}{5 + 1/2^{[n/2]-1}} + 2 \left[\frac{n}{2} \right] \left(n - \left[\frac{n}{2} \right] + \frac{1}{2} \right) \ln 2 + \ln \left[\frac{n}{2} \right] + \frac{7}{9 \cdot 2^n} \right\}.$$

Доказательство. Согласно оценкам (16), (17) и определению (18),

$$\begin{aligned} Q(n, r) &\leq \sum_{s=1}^{[n/2]} \frac{|W_{2n_s^-}|}{2^{\binom{2n}{r}}(1+q)} \left(\binom{2n_s^-}{n_s^-} \binom{2^n - 2n_s^-}{r - n_s^-} \frac{1 + q_{2n_s^-}}{(1 - q_{2n_s^-})^2} \right. \\ &\quad \left. + \binom{2n_s^+}{n_s^+} \binom{2^n - 2n_s^+}{r - n_s^+} \frac{1 + q_{2n_s^+}}{(1 - q_{2n_s^+})^2} \right) \\ &\quad + |W_{n_0^+}| \frac{\binom{n_0^+}{n_0^+/2} \binom{n_0^+}{r - n_0^+/2}}{2^{\binom{2n}{r}}(1+q)} \frac{1 + q_{n_0^+}}{(1 - q_{n_0^+})^2}. \end{aligned}$$

Так как

$$q_k = \frac{r - k/2}{2^n - k/2 - r + 1} < q = \frac{r}{2^n - r + 1}$$

и

$$1 - q_k = \frac{2^n - 2r + 1}{2^n - k/2 - r + 1} \geq \frac{2^n - 2r}{2^n - k/2 - r}, \quad r \geq k/2,$$

получаем, что

$$\begin{aligned} Q(n, r) &< \sum_{s=1}^{[n/2]} \frac{|W_{2n_s^-}|}{2 \binom{2^n}{r}} \left(\binom{2n_s^-}{r - n_s^-} \left(\frac{2^n - 2n_s^-}{2^n - 2r} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \binom{2n_s^+}{n_s^+} \binom{2n_s^+}{r - n_s^+} \left(\frac{2^n - n_s^+ - r}{2^n - 2r} \right)^2 \right) \\ &\quad + |W_{n_0^+}| \frac{\binom{n_0^+}{n_0^+/2} \binom{n_0^+}{r - n_0^+/2}}{2 \binom{2^n}{r}} \left(\frac{2^n - n_0^+/2 - r}{2^n - 2r} \right)^2. \end{aligned} \quad (29)$$

Для оценки последнего слагаемого в (29) используем формулу из доказательства теоремы 5 на с. 17 в [1], откуда следует, что при $n \geq 8$

$$\frac{\binom{n_0^+}{n_0^+/2} \binom{2^n - n_0^+}{2^{n-1} - n_0^+/2}}{\binom{2^n}{2^{n-1}}} = \frac{\binom{2^{n-1}}{2^{n-2}}^2}{\binom{2^n}{2^{n-1}}} < \frac{8}{5 \cdot 2^{n/2}}.$$

Объединение оценок (22), (23), полученных в доказательстве теоремы 3, приводит к неравенству

$$\begin{aligned} Q(n, r) &< \sum_{s=1}^{[n/2]} \frac{|W_{2n_s^-}|}{2} \frac{e^{7/(9 \cdot 2^n)}}{\sqrt{\pi 2^{n-3} 3/4}} \left(\left(\frac{2^n - r}{2^{n-1}} \frac{2^{n-1} - n_s^-}{2^n - r - n_s^-} \right)^y \left(\frac{2^n - n_s^- - r}{2^n - 2r} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2^n - r}{2^{n-1}} \frac{2^{n-1} - n_s^+}{2^n - r - n_s^+} \right)^y \left(\frac{2^n - n_s^+ - r}{2^n - 2r} \right)^2 \right) \\ &\quad + \frac{|W_{n_0^+}|}{2} \frac{8}{5 \cdot 2^{n/2}} \left(\frac{2^n - r}{2^{n-1}} \frac{2^{n-1} - n_0^+/2}{2^n - r - n_0^+/2} \right)^y \left(\frac{2^n - n_0^+/2 - r}{2^n - 2r} \right)^2. \end{aligned}$$

Обозначив $y = 2^{n-1} - r$, из неравенства выше получим

$$\begin{aligned} Q(n, r) &< \frac{e^{7/(9 \cdot 2^n)}}{\sqrt{\pi 2^{n-3} 3/4}} \sum_{s=1}^{[n/2]} \frac{1}{8} |W_{2n_s^-}| \left(\left(\frac{(2^{n-1} - n_s^-)(2^{n-1} + y)}{2^{n-1}(2^{n-1} + y - n_s^-)} \right)^y \left(\frac{2^{n-1} - n_s^- + y}{y} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{(2^{n-1} - n_s^+)(2^{n-1} + y)}{2^{n-1}(2^{n-1} + y - n_s^+)} \right)^y \left(\frac{2^{n-1} - n_s^+ + y}{y} \right)^2 \right) \\ &\quad + \frac{|W_{n_0^+}|}{5 \cdot 2^{n/2}} \left(1 - \frac{y}{2^{n-1} + 2y} \right)^y \left(\frac{2^{n-2}}{y} + 1 \right)^2. \end{aligned}$$

Так как

$$N_{2n}^{(2)}(2n_s^+, r) = 0, \quad N_{2n}^{(2)}(n_0^+, r) = 0,$$

при $2^{n-1} - n_{t+1}^- < y \leq 2^{n-1} - n_t^-$, то все слагаемые в (19) равны нулю, кроме слагаемых, содержащих $n_s^-, s = 1, \dots, t$, значит при $n_t^- \leq r < n_{t+1}^-$

$$Q(n, r) < \frac{e^{7/(9 \cdot 2^n)}}{\sqrt{\pi 2^{n-3}/4}} \sum_{s=1}^t \frac{1}{8} |W_{2n_s^-}| \left(\frac{(2^{n-1} - n_s^-)(2^{n-1} + y)}{2^{n-1}(2^{n-1} + y - n_s^-)} \right)^y \left(\frac{2^{n-1} - n_s^-}{y} + 1 \right)^2. \quad (30)$$

Далее оценим сверху по порядку сомножители в (30), начиная с последнего, при $s, t \geq 1$ и $2^{n-1} - n_{t+1}^- < y \leq 2^{n-1} - n_t^-$:

$$\left(\frac{2^{n-1} - n_s^-}{y} + 1 \right)^2 < \left(\frac{2^{n-1} - n_1^-}{2^{n-1} - n_{t+1}^-} + 1 \right)^2 = \left(\frac{3/2}{1 + 1/2^{t+1}} + 1 \right)^2 < 6,25;$$

так как $n_1^- < n_s^-$ и

$$1 - x \leq e^{-x},$$

получаем, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{(2^{n-1} - n_s^-)(2^{n-1} + y)}{2^{n-1}(2^{n-1} + y - n_s^-)} \right)^y &\leq \left(\frac{(2^{n-1} - n_1^-)(2^{n-1} + y)}{2^{n-1}(2^{n-1} + y - n_1^-)} \right)^y \\ &= \left(1 - \frac{n_s^-}{2^{n-1}} \right)^y \left(1 + \frac{n_s^-}{2^{n-1} + y - n_s^-} \right)^y \\ &= \left(\frac{3}{4} \right)^y \left(\frac{4 \cdot 2^{n-3} + y}{3 \cdot 2^{n-3} + y} \right)^y \\ &= \left(1 - \frac{y}{12 \cdot 2^{n-3} + 4y} \right)^y \\ &\leq \exp \left\{ -\frac{y^2}{3 \cdot 2^{n-1} + 4y} \right\}; \end{aligned}$$

оценку $|W_{2n_s^-}|$ получим из замечания 1.

При $n_t^- \leq r < n_{t+1}^-$, $t = 1, \dots, [n/2] - 1$, объединяя оценки сомножителей в (30), учитывая, что

$$|W_{2n_s^-}| \leq |W_t^-|, \quad 1 \leq s \leq t,$$

и

$$2^{n-1} - n_t^- \geq y = 2^{n-1} - r > 2^{n-1} - n_{t+1}^-,$$

получаем, что

$$\begin{aligned} Q(n, r) &< \frac{6,25e^{7/(9 \cdot 2^n)}}{\sqrt{3\pi 2^{n-3}/4}} \frac{3t \cdot 2^{2nt-2t^2+t-1}}{8} \exp \left\{ -\frac{y^2}{3 \cdot 2^{n-1} + 4y} \right\} \\ &< \frac{18,75}{\sqrt{3\pi 2^{n+3}}} \exp \left\{ -\frac{2^{n-2}(1 + 1/2^{t+1})^2}{10 + 4/2^t} + t(2n - 2t + 1) \ln 2 + \ln t + \frac{7}{9 \cdot 2^n} \right\}. \end{aligned}$$

При $n_{[n/2]}^- \leq r < 2^{n-2}$, пользуясь второй оценкой из замечания 1, получаем, что

$$Q(n, r) < \frac{6,25e^{7/(9 \cdot 2^n)}}{\sqrt{3\pi 2^{n-3}/4}} \frac{[n/2]2^{2n[n/2]-2[n/2]^2+[n/2]}}{8} \exp \left\{ -\frac{y^2}{3 \cdot 2^{n-1} + 4y} \right\} \\ < \frac{6,25}{\sqrt{3\pi 2^{n+1}}} \exp \left\{ -\frac{2^{n-2}}{10 + 4/2^{[n/2]}} + 2 \left[\frac{n}{2} \right] \left(n - \left[\frac{n}{2} \right] + \frac{1}{2} \right) \ln 2 + \ln \left[\frac{n}{2} \right] + \frac{7}{9 \cdot 2^n} \right\}.$$

Теорема 4 доказана.

Автор признателен А. М. Зубкову за постановку задачи и внимание.

Список литературы

1. Зубков А. М., Серов А. А., Оценки числа булевых функций, имеющих аффинные приближения заданной точности. *Дискретная математика* (2010) **22**, №5, 3–19.
2. Логачев О. А., Сальников А. А., Яценко В. В., *Булевы функции в теории кодирования и криптологии*. МЦНМО, Москва, 2004.
3. Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А., *Теория кодов, исправляющих ошибки*. Связь, Москва, 1979.
4. Рязанов Б. В., Чечета С. И., О приближении случайной булевой функции множеством квадратичных форм. *Дискретная математика* (1995) **7**, №3, 129–145.
5. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*. Мир, Москва, 1984.

Статья поступила 19.12.2011.