Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Копытцев, В. Г. Михайлов, Предельные теоремы пуассоновского типа для обобщенного линейного включения, *Дискрет. матем.*, 2012, том 24, выпуск 3, 108–121

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1202>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 18:36:28

Предельные теоремы пуассоновского типа для обобщенного линейного включения

© 2012 г. В. А. Копытцев, В. Г. Михайлов

Пусть A — случайная матрица размера $T \times n$ над конечным полем $GF(q)$, D — некоторое множество ненулевых элементов n -мерного пространства V^n над $GF(q)$, и для каждого $x \in D$ задано множество $B(x)$ элементов T -мерного пространства V^T над тем же полем. Выведены достаточные условия сходимости при $n, T \rightarrow \infty$ распределения числа решений системы включений $x \in D, Ax \in B(x)$ к распределениям пуассоновского типа. Полученные результаты позволили исследовать асимптотические свойства числа решений системы вида $x \in D, Ax + S(x) \in B$, где $S(x)$ — произвольное отображение V^n в V^T , и, тем самым, свойства распределения числа решений случайных полиномиальных уравнений.

1. Введение

Линейным включением (над полем K) размерности T относительно n -мерного вектора x называется запись $Ax \in B$, где A — матрица из элементов поля K размера T на n , а B — некоторое множество T -мерных векторов над этим полем. Решением линейного включения является любой вектор x из n -мерного линейного пространства V^n над полем K , для которого вектор Ax принадлежит множеству B . Понятие линейного включения впервые было использовано в [8, 9] при изучении свойств некоторых случайных систем нелинейных уравнений над конечным полем.

Условия выполнения теорем пуассоновского типа для числа решений линейного включения $Ax \in B$, удовлетворяющих условию $x \in D$, была посвящена работа [4], а немного ранее в [10] (в контексте изучения распределения числа точек случайного линейного подпространства, попавших в заданное множество) был рассмотрен частный случай, когда $D = V^n \setminus \{0^n\}$. Исследованию числа решений случайных систем линейных уравнений, принадлежащих заданному множеству D , были посвящены работы [2–4, 12].

В настоящей работе мы рассматриваем обобщение этой задачи, считая, что правая часть включения (множество B) зависит от вектора x . Таким образом, мы приходим к паре соотношений

$$x \in D, \quad Ax \in B(x), \quad (1)$$

где множество $B(x)$ является функцией аргумента $x \in D$. Система $x \in D, Ax \in B(x)$ эквивалентна одному линейному включению вида

$$\begin{pmatrix} x \\ Ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n \\ A \end{pmatrix} x \in J \quad (2)$$

размерности $n + T$, где $\begin{pmatrix} I \\ A \end{pmatrix}$ — матрица размера $(n + T) \times n$ с единичной матрицей I_n размера n в качестве верхнего блока,

$$J = J(D, \bar{B}(D)) = \bigcup_{x \in D} \{(x, b) : b \in B(x)\}. \quad (3)$$

Здесь и далее под $\bar{B}(D)$ понимается набор множеств $B(x)$, $x \in D$. По этой причине систему включений (1) мы назвали обобщенным линейным включением. Число решений системы (1) обозначим $\xi(D, A, \bar{B}(D))$.

Мы рассматриваем случай, когда параметры n и T согласованно возрастают: $n, T \rightarrow \infty$. Нас интересуют условия на характер изменения множеств $D = D(n)$ и $B(x) = B(T, x)$ и распределений элементов матрицы $A = A(T, n)$ при $n, T \rightarrow \infty$, обеспечивающие сходимость распределения числа решений системы (1) к сложному пуассоновскому распределению. Аналогичные вопросы для числа решений случайных включений изучались в работах [4–6]. Ниже мы покажем, что новая постановка позволяет получить обобщения некоторых результатов этих работ как следствия предельной теоремы для числа решений системы (1).

Опишем характеристики, в терминах которых будут выписаны условия наших предельных теорем. Прежде всего, предполагается, что элементы случайной матрицы $A = \|a_{i,j}\|_{T \times n}$ независимы в совокупности и распределены с вероятностями

$$\mathbf{P}\{a_{i,j} = k\} = \frac{1 + \Delta_{i,j}(k)}{q}, \quad k \in K,$$

где

$$\sum_{k \in K} \Delta_{i,j}(k) = 0, \quad i = 1, \dots, T, \quad j = 1, \dots, n.$$

Пусть

$$\Delta = \max_{i,j,k} |\Delta_{i,j}(k)| < 1. \quad (4)$$

Следуя [4–6], введем следующее определение. Рассмотрим подмножество H элементов линейного пространства V^m . Пусть $N(a_1, a_2, a_3, d, H)$ обозначает число решений системы из m линейных уравнений над полем K , записанной в виде уравнения

$$a_1 u^1 + a_2 u^2 + a_3 u^3 = d,$$

относительно тройки векторов $(u^1, u^2, u^3) \in H^3$, $a_1, a_2, a_3 \in K \setminus \{0\}$, $d \in V^m$. Здесь и далее в аналогичных случаях $+$ обозначает сложение векторов в линейных пространствах над полем K . Положим

$$\begin{aligned} N(H) &= \max_{a_1, a_2, a_3, d} N(a_1, a_2, a_3, d, H), \\ \rho(H) &= \frac{N(H)}{|H|^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $|H|$ обозначает число элементов конечного множества H . Очевидно, что

$$0 \leq \rho(H) \leq 1.$$

Эта характеристика сначала была использована в [10] (для множества B) и потом в [4–6] (применительно к множествам D и B) как одно из существенных условий предельных теорем. Она является своего рода мерой отличия множества H от линейного или аффинного пространства. Для линейных и аффинных подпространств эта мера принимает максимально возможное значение $\rho(H) = 1$ (см. [12]). Условие $\rho(H) \rightarrow 0$ можно трактовать как асимптотическую свободу множества $H = H(m)$ от линейных комбинаций своих элементов при $m \rightarrow \infty$. Непосредственно из определения величины $\rho(H)$ вытекают следующие свойства.

(А) При любых $h \in V^m$ выполнено равенство

$$\rho(H + h) = \rho(H).$$

(Б) Из соотношения $\rho(H) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ вытекает соотношение $\rho(H \cup H') \rightarrow 0$ для любого множества H' , удовлетворяющего условию $|H'|/|H| \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$.

Элементы (x, b) и (x', b') назовем подобными, если

$$(x', b') = (kx, kb)$$

при некотором элементе $k \in K \setminus \{0\}$.

Разобьем множество J на классы $J_1, \dots, J_M$ подобных векторов, где M — общее число таких классов. Положим

$$l_u(J) = |\{k \in \{1, \dots, M\} : |J_k| = u\}|, \quad u = 1, \dots, q-1. \quad (6)$$

Пусть $\pi_1(\lambda_1), \pi_2(\lambda_2), \dots, \pi_{q-1}(\lambda_{q-1})$ — независимые случайные величины, распределенные по закону Пуассона с параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{q-1}$ соответственно.

Теорема 1. Пусть $K = GF(q)$, распределение элементов матрицы A удовлетворяет условию (4), $0^n \notin D$, и при $n, T \rightarrow \infty$ выполнены соотношения $|D| \rightarrow \infty$,

$$\frac{l_r(J)}{q^T} \rightarrow \lambda_r, \quad 0 \leq \lambda_r < \infty, \quad r = 1, \dots, q-1, \quad \exists r: \lambda_r > 0, \quad (7)$$

$$\frac{1}{q^T} \max_{x \in D} |B(x)| = |D|^{\varepsilon(n)-1}, \quad \varepsilon(n) = o(1), \quad (8)$$

$$\rho(J) \rightarrow 0, \quad (9)$$

$$T\Delta \rightarrow 0 \quad (10)$$

Тогда распределение случайной величины $\xi(D, A, \bar{B}(D))$ сходится к распределению случайной величины

$$\pi(\lambda_1, \dots, \lambda_{q-1}) = \pi(\lambda_1) + 2\pi(\lambda_2) + \dots + (q-1)\pi(\lambda_{q-1}). \quad (11)$$

Замечание 1. Условие (9) используется впервые. Условие (10) было введено в [2] при изучении числа специальных решений случайных систем линейных уравнений над полем $GF(2)$. Оно использовалось также в [3–6].

Замечание 2. Из условия (7) и определений (6) следует, что величина $|J|$ имеет при $n, T \rightarrow \infty$ такой же порядок роста, как и q^T . Поэтому условие (8) в теореме 1 эквивалентно соотношениям

$$\max_{x \in D} |B(x)| = C(n) \frac{|J|}{|D|} = \frac{C(n)}{|D|} \sum_{x \in D} |B(x)|, \quad (12)$$

$$C(n) = \exp\{o(\ln |D|)\}.$$

Если числа $|B(x)|$ одинаковы при всех $x \in D$, то соотношения (12) выполнены с $C(n) = 1$. Значит, в этом случае условие (8) теоремы 1 также выполнено, и его можно опустить.

Рассмотрим теперь систему включений

$$x \in D, \quad Ax + S(x) \in B, \quad (13)$$

где $S(x)$ — произвольное отображение V^n в V^T , а $B = B(T)$ — заданная последовательность множеств векторов пространств V^T . Через $\xi(D, A + S, B)$ обозначим число ее решений. Система (13) может быть преобразована в систему $x \in D, Ax \in B(x)$, для которой

$$B(x) = \{x: b + S(x) \in B\}, \quad J = \bigcup_{x \in D} \{(x, b): b + S(x) \in B\}.$$

Для числа решений системы (13) с помощью теоремы 1 выведем следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $K = GF(q)$, распределение элементов матрицы A удовлетворяет условию (4), $0^n \notin D$, и при $n, T \rightarrow \infty$ выполнены соотношения $|D| \rightarrow \infty$, (7), (10),

$$\rho(D)\rho(B) \rightarrow 0. \quad (14)$$

Тогда распределение случайной величины $\xi(D, A + S, B)$ сходится к распределению случайной величины $\pi(\lambda_1, \dots, \lambda_{q-1})$.

Замечание 3. Одно из отличий теоремы 2 от теоремы 1 состоит в том, что в теореме 2 условие $\rho(J) \rightarrow 0$ заменено условием (14), которое легко проверить в тех случаях, когда известна асимптотика хотя бы одного из сомножителей в левой части. Это удобно, например, если одно из множеств D или B является шаром или сферой в метрике Хэмминга (их свойства описаны в [4, 7]).

Замечание 4. Теорема 2 распространяет на наш случай теорему 3 в [4], в которой отображение $S \equiv 0^T$ (с сохранением условий (7), (10) и (14)).

Замечание 5. Если множество B состоит из единственного вектора b , то утверждение теоремы 2 относится к числу специальных решений системы уравнений $F(x) = b$, где $F(x) = Ax + S(x)$, со случайными линейными частями Ax . В этом случае условие (14) заменяется условием $\rho(D) \rightarrow 0$.

Замечание 6. Если в множестве J нет подобных векторов, то условие (7) превращается в условие $q^{-T}|J| \rightarrow \lambda \in (0, \infty)$, а предельным в теоремах 1 и 2 будет распределение Пуассона с параметром λ . Так будет, например, если $K = GF(2)$.

Наконец, рассмотрим систему включений (13) с произвольным случайным отображением $S(x)$ пространства V^n в V^T , которое не зависит от случайной матрицы A .

Теорема 3. Пусть $K = GF(q)$, множество D не содержит подобных векторов, отображение $S(x)$ не зависит от матрицы A , распределение элементов матрицы A удовлетворяет условию (4), $0^n \notin D$, и при $n, T \rightarrow \infty$ выполнены соотношения $|D| \rightarrow \infty$, (10), (14) и

$$q^{-T}|D||B| \rightarrow \lambda \in (0, \infty). \quad (15)$$

Тогда распределение случайной величины $\xi(D, A + S, B)$ сходится к распределению Пуассона с параметром λ , причем эта сходимостъ равномерна относительно распределения отображения $S(x)$.

Замечание 7. Теорема 3, в отличие от теоремы 1, относится к нелинейному включению общего вида $F(x) \in B$ со случайным отображением $F: V^n \rightarrow V^T$ и одинаковым для всех $x \in D$ множеством B . В частности, в качестве компонент отображения $F(x)$ могут использоваться полиномы любых степеней. При этом предполагается, что отображение $F(x)$ имеет независимую линейную часть Ax , в которой распределение матрицы A удовлетворяет условию асимптотической равномерности $T\Delta \rightarrow 0$.

2. Доказательство теоремы 1

Пусть $I\{E\}$ означает индикатор случайного события E . Рассмотрим систему случайных индикаторов $\{I\{Ax = b\}: (x, b) \in \bar{J}\}$, где $\bar{J} \subseteq J$. Пусть задан набор $R_1, \dots, R_s$ непересекающихся подмножеств множества $\bar{J}$. Пусть

$$\xi_u = \sum_{(x,b) \in R_u} I\{Ax = b\}, \quad u = 1, \dots, s.$$

Теорема 4. Пусть $K = GF(q)$, распределение элементов матрицы A удовлетворяет условию (4), $0^n \notin D$, множество $\bar{J}$ не содержит подобных векторов, и при $n, T \rightarrow \infty$ выполнены условия $|D| \rightarrow \infty$, (8), $\rho(\bar{J}) \rightarrow 0$, $T\Delta \rightarrow 0$,

$$q^{-T}|J| = q^{-T} \sum_{x \in D} |B(x)| = O(1), \quad (16)$$

$$q^{-T}|R_u| \rightarrow \lambda'_u, \quad 0 \leq \lambda'_u < \infty, \quad u = 1, \dots, s. \quad (17)$$

Тогда случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_s$ асимптотически независимы, а их распределения сходятся к распределениям Пуассона с параметрами $\lambda'_1, \dots, \lambda'_s$ соответственно.

Доказательство. Воспользуемся многомерной версией теоремы Б. А. Севастьянова о предельном распределении Пуассона суммы зависимых индикаторов (см. [11]). Для ее применения потребуется ряд определений. Введем множества

$$\begin{aligned} D_{k,j} &= \{(x^1, \dots, x^k) \in D^k: \text{rank}\langle x^1, \dots, x^k \rangle = j\}, \\ D_k &= \bigcup_{j=1}^{k-1} D_{k,j}. \end{aligned} \quad (18)$$

Заметим, что

$$|D_{k,j}| \leq \binom{k}{j} q^{j(k-j)} |D|^j. \quad (19)$$

Положим

$$\bar{J}_k = \{((x^1, b^1), \dots, (x^k, b^k)) \in \bar{J}^k: (x^\alpha, b^\alpha) \neq (x^\beta, b^\beta) \text{ при } \alpha \neq \beta\}.$$

Определим исключительные множества $I_k \subset \bar{J}_k$ равенством

$$I_k = \{((x^1, b^1), \dots, (x^k, b^k)) \in \bar{J}_k: (x^1, \dots, x^k) \in D_k\}.$$

Теорема будет доказана, если убедиться, что

$$\sum_{(x,b) \in R_u} \mathbf{P}\{Ax = b\} \rightarrow \lambda'_u, \quad u = 1, \dots, s, \quad (20)$$

$$\max_{(x,b) \in \bar{J}} \mathbf{P}\{Ax = b\} \rightarrow 0, \quad (21)$$

и при всех $k = 2, 3, \dots$ (используем обозначение $v^i = (x^i, b^i)$)

$$\max_{(v^1, \dots, v^k) \in \bar{J}_k \setminus I_k} \left| \frac{\mathbf{P}\{Ax^1 = b^1, \dots, Ax^k = b^k\}}{\mathbf{P}\{Ax^1 = b^1\} \dots \mathbf{P}\{Ax^k = b^k\}} - 1 \right| \rightarrow 0, \quad (22)$$

$$\sum_{(v^1, \dots, v^k) \in I_k} \prod_{i=1}^k \mathbf{P}\{Ax^i = b^i\} \rightarrow 0, \quad (23)$$

$$\sum_{(v^1, \dots, v^k) \in I_k} \mathbf{P}\{Ax^1 = b^1, \dots, Ax^k = b^k\} \rightarrow 0. \quad (24)$$

Перед проверкой условий (20)–(24) приведем вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Пусть $(x^1, \dots, x^k) \in D_{k,j}$, $b^1, \dots, b^k \in V^T$ и выполнено условие (4). Тогда при всех $k = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}\{Ax^1 = b^1, \dots, Ax^k = b^k\} \leq \left(\frac{1 + \Delta}{q} \right)^{jT}, \quad (25)$$

если $1 \leq j \leq k-1$, а если $j = k$, то

$$\left(\frac{1 - \Delta}{q} \right)^{kT} \leq \mathbf{P}\{Ax^1 = b^1, \dots, Ax^k = b^k\} \leq \left(\frac{1 + \Delta}{q} \right)^{kT}. \quad (26)$$

Эта лемма повторяет лемму 3 из [3].

Теперь соотношения (20)–(22) следуют из леммы 1 и условий $T\Delta \rightarrow 0$ и (17). Подробности можно найти в [4–6].

Проверим соотношение (23) при $k \geq 2$. Для этого используем неравенство (25) (где $k = 1$) и получаем

$$\sum_{(v^1, \dots, v^k) \in I_k} \prod_{s=1}^k \mathbf{P}\{Ax^s = b^s\} \leq \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{1 + \Delta}{q} \right)^{kT} \sum_{(x^1, \dots, x^k) \in D_{k,j}} \prod_{s=1}^k |B(x_s)|. \quad (27)$$

Теперь, используя вытекающее из условий (7) и (8) (см. замечание 2) неравенство

$$\prod_{s=1}^k |B(x_s)| \leq \left(C(n) \frac{1}{|D|} \sum_{x \in D} |B(x)| \right)^k = \left(\frac{C(n)|J|}{|D|} \right)^k,$$

и (19), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{(v^1, \dots, v^k) \in I_k} \prod_{s=1}^k \mathbf{P}\{Ax^s = b^s\} &\leq \left(\frac{C(n)|J|}{|D|} \right)^k \left(\frac{1+\Delta}{q} \right)^{kT} \sum_{j=1}^{k-1} |D_{k,j}| \\ &\leq \left(\frac{|J|}{q^T} \right)^k (1+\Delta)^{kT} \\ &\quad \times \frac{(C(n))^k}{|D|} \frac{1}{|D|^{k-1}} \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} q^{j(k-j)} |D|^j. \end{aligned} \quad (28)$$

Из условий (16), (8) (см. замечание 2), $T\Delta \rightarrow 0$ следует, что выражение в правой части цепочки соотношений (28) стремится к нулю при всех $k \geq 2$. Соотношение (23) доказано.

Наконец, проверим соотношение (24). Введем множества

$$\bar{D}_{k,j} = D_{k,j} \cap \{(x^1, \dots, x^k) \in D^k : x^\alpha \neq cx^\beta \text{ для всех } c \in K \setminus \{0\}, \text{ где } \alpha \neq \beta\}. \quad (29)$$

Заметим, что

$$\bar{D}_{k,1} = \emptyset, \quad k = 2, 3, \dots$$

Положим

$$\bar{D}_k = \bigcup_{j=2}^{k-1} \bar{D}_{k,j}.$$

Так как множество $\bar{J}$ не содержит подобных векторов, то

$$\sum_{(v^1, \dots, v^k) \in I_k} \mathbf{P}\{Ax^1 = b^1, \dots, Ax^k = b^k\} = \sum_{\substack{(v^1, \dots, v^k) \in \bar{J}_k \\ (x^1, \dots, x^k) \in \bar{D}_k}} \mathbf{P}\{Ax^1 = b^1, \dots, Ax^k = b^k\}. \quad (30)$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{(v^1, v^2) \in I_2} \mathbf{P}\{Ax^1 = b^1, Ax^2 = b^2\} = 0. \quad (31)$$

Поэтому далее мы считаем, что $k \geq 3$.

Сопоставим набору $x^1, \dots, x^k$ векторов пространства V^n систему $L_x(x^1, \dots, x^k)$ однородных линейных уравнений вида

$$\alpha_1 x^1 + \dots + \alpha_k x^k = 0,$$

возможно, пустую, составленную из всех линейных соотношений, которым удовлетворяет набор $x^1, \dots, x^k$. Системе $L_x(x^1, \dots, x^k)$ сопоставим идентичную по составу систему $L_b(x^1, \dots, x^k)$ из линейных уравнений относительно $b^1, \dots, b^k \in V^T$. Обозначим через $B(x^1, \dots, x^k)$ множество решений $(b^1, \dots, b^k)$ системы $L_b(x^1, \dots, x^k)$, удовлетворяющих условию $b^1 \in B(x^1), \dots, b^k \in B(x^k)$.

Лемма 2. Пусть $b^1 \in B(x^1), \dots, b^k \in B(x^k)$, $(b^1, \dots, b^k) \notin B(x^1, \dots, x^k)$, $(x^1, \dots, x^k) \in \bar{D}_k$. Тогда

$$\mathbf{P}\{Ax^1 = b^1, \dots, Ax^k = b^k\} = 0.$$

Доказательство. Предположим противное, а именно, что для некоторых наборов векторов $(x^1, \dots, x^k) \in \bar{D}_k$ и $(b^1, \dots, b^k) \notin B(x^1, \dots, x^k)$, $b^1 \in B(x^1), \dots, b^k \in B(x^k)$, выполнено неравенство

$$\mathbf{P}\{Ax^1 = b^1, \dots, Ax^k = b^k\} > 0.$$

Тогда найдется такой набор элементов поля $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \neq (0, \dots, 0)$, что

$$\begin{aligned} \alpha_1 x^1 + \dots + \alpha_k x^k &= 0, \\ \alpha_1 b^1 + \dots + \alpha_k b^k &\neq 0, \end{aligned} \quad (32)$$

и, кроме этого, для некоторой реализации A' случайной матрицы A будет выполнен набор равенств

$$A'x^1 = b^1, \dots, A'x^k = b^k. \quad (33)$$

Очевидно, что условия (32) и (33) не могут выполняться одновременно. Следовательно,

$$\mathbf{P}\{Ax^1 = b^1, \dots, Ax^k = b^k\} = 0.$$

Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 следует, что

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{(v^1, \dots, v^k) \in \bar{J}_k \\ (x^1, \dots, x^k) \in \bar{D}_k}} \mathbf{P}\{Ax^1 = b^1, \dots, Ax^k = b^k\} \\ &= \sum_{j=2}^{k-1} \sum_{(x^1, \dots, x^k) \in \bar{D}_{k,j}} \sum_{(b^1, \dots, b^k) \in B(x^1, \dots, x^k)} \mathbf{P}\{Ax^1 = b^1, \dots, Ax^k = b^k\}. \end{aligned} \quad (34)$$

Лемма 3. Пусть $2 \leq j \leq k-1$. Тогда

$$|\{(x^1, \dots, x^k) \in \bar{D}_{k,j}, (b^1, \dots, b^k) \in B(x^1, \dots, x^k)\}| \leq \rho(\bar{J})|\bar{J}|^j.$$

Доказательство. Так как

$$\text{rank}\langle x^1, \dots, x^k \rangle \leq k-1,$$

то системы $L_x(x^1, \dots, x^k)$ и $L_b(x^1, \dots, x^k)$ не пусты. Перенумеруем векторы $x^1, \dots, x^k$ так, чтобы первые j из них составляли базис. Преобразованные системы $L_x(x^1, \dots, x^k)$ и $L_b(x^1, \dots, x^k)$ будут содержать, соответственно, уравнения

$$\begin{aligned} x^{j+1} &= l_{j+1}(x^1, \dots, x^j), \\ b^{j+1} &= l_{j+1}(b^1, \dots, b^j), \end{aligned} \quad (35)$$

где l_{j+1} — однородная линейная функция своих аргументов. При этом значения векторов $x^{j+1}, \dots, x^k$ и $b^{j+1}, \dots, b^k$ определяются однозначно векторами $x^1, \dots, x^j$ и $b^1, \dots, b^j$ соответственно.

Так как $(x^1, \dots, x^k) \in \bar{D}_{k,j}$, то в системах $L_x(x^1, \dots, x^k)$ и $L_b(x^1, \dots, x^k)$ нет одночленных и двучленных уравнений. Значит, каждое из уравнений (35) содержит по крайней

мере три существенные переменные. Среди них заведомо есть переменные x^{j+1} и b^{j+1} . Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что проведенная перенумерация векторов была такой, что существенными в этих уравнениях являются также переменные x^1 , x^2 и b^1 , b^2 соответственно. Значит, эти уравнения можно переписать в виде

$$\begin{aligned} x^{j+1} &= a_1 x^1 + a_2 x^2 + l'_{j+1}(x^3, \dots, x^j), \\ b^{j+1} &= a_1 b^1 + a_2 b^2 + l'_{j+1}(b^3, \dots, b^j), \end{aligned} \quad (36)$$

с некоторыми ненулевыми коэффициентами a_1 и a_2 .

Зафиксируем значения переменных $x^3, \dots, x^j$ и $b^3 \in B(x^3), \dots, b^j \in B(x^j)$. Число решений системы уравнений (36) при такой фиксации не превосходит

$$N(\bar{J}) = \max_{a_1, a_2, a_3, d} N(a_1, a_2, a_3, d, \bar{J}),$$

где $N(a_1, a_2, a_3, d = (d', d''), \bar{J})$ обозначает число решений системы из $n + T$ линейных уравнений над полем K , записанной в виде пары уравнений

$$\begin{aligned} x^{j+1} &= a_1 x^1 + a_2 x^2 + d', \\ b^{j+1} &= a_1 b^1 + a_2 b^2 + d''. \end{aligned} \quad (37)$$

Согласно определениям, приведенным во Введении,

$$N(\bar{J}) = \rho(\bar{J}) |\bar{J}|^2.$$

Заметим еще, что система (36) допускает не более $|\bar{J}|^{j-2}$ вариантов задания переменных $x^3, \dots, x^j$ и $b^3 \in B(x^3), \dots, b^j \in B(x^j)$. Поэтому число ее решений оценивается сверху величиной $\rho(\bar{J}) |\bar{J}|^j$. Лемма 3 доказана.

Применим лемму 3 и оценку (26) к выражению в правой части (34), а результат подставим в (30). Получим, учитывая условия теоремы 4, что

$$\begin{aligned} &\sum_{(v^1, \dots, v^k) \in I_k} \mathbf{P}\{Ax^1 = b^1, \dots, Ax^k = b^k\} \\ &\leq \sum_{j=2}^{k-1} \sum_{(x^1, \dots, x^k) \in \bar{D}_{k,j}} \sum_{(b^1, \dots, b^k) \in B(x^1, \dots, x^k)} \left(\frac{1+\Delta}{q}\right)^{jT} \\ &= \sum_{j=2}^{k-1} \left(\frac{1+\Delta}{q}\right)^{jT} |\{(x^1, \dots, x^k) \in \bar{D}_k, (b^1, \dots, b^k) \in B(x^1, \dots, x^k)\}| \\ &\leq \rho(\bar{J}) \sum_{j=2}^{k-1} \left(\frac{1+\Delta}{q}\right)^{jT} |J|^j = O\left(\rho(\bar{J}) \sum_{j=2}^{k-1} \left(\frac{|J|}{q^T}\right)^j\right) = O(\rho(\bar{J})) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Значит, условие (24) выполнено. Итак, мы проверили все условия многомерной версии теоремы Б. А. Севастьянова, и можем воспользоваться ею. Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 1. Напомним, что согласно (6)

$$l_u(J) = |\{k \in \{1, \dots, M\} : |J_k| = u\}|, \quad u = 1, \dots, q-1,$$

где $J_1, \dots, J_M$ — разбиение множества J на классы подобных векторов и M — общее число таких классов. Выберем из каждого множества J_k по одному произвольному элементу $\omega_k \in J_k$ и положим

$$\bar{J} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_M\}.$$

Построим разбиение этого множества на непересекающиеся множества $R_1, \dots, R_{q-1}$ по правилу

$$R_u = \{\omega_k : k \in \{1, \dots, M\}, |J_k| = u\}, \quad u = 1, \dots, q-1, \quad (38)$$

и введем случайные величины

$$\xi_u = \sum_{(x,b) \in R_u} I\{Ax = b\}, \quad u = 1, \dots, q-1, \quad (39)$$

где множества $R_1, \dots, R_{q-1}$ определены правилом (38). Тогда

$$\xi(D, A, \bar{B}) = \xi_1 + 2\xi_2 + \dots + (q-1)\xi_{q-1}. \quad (40)$$

Согласно определению,

$$\rho(\bar{J}) = \frac{N(\bar{J})}{|\bar{J}|^2},$$

где

$$N(\bar{J}) \leq N(J), \quad |\bar{J}| \geq \frac{|J|}{q-1}.$$

Поэтому

$$\rho(\bar{J}) \leq \frac{\rho(J)}{(q-1)^2},$$

и условие (9) теоремы 1 влечет условие $\rho(\bar{J}) \rightarrow 0$ теоремы 4. Значит, для случайных величин (39) выполнены все условия теоремы 4, причем

$$\lambda'_u = \lambda_u, \quad u = 1, \dots, q-1.$$

Для завершения доказательства теоремы 1 остается воспользоваться равенством (40).

3. Доказательство теоремы 2

Как уже отмечалось во Введении, систему (13) можно записать как

$$x \in D, \quad Ax \in B(x) \quad (41)$$

с множествами

$$\begin{aligned} B(x) &= \{x : b + S(x) \in B\}, \\ J &= J(D, \bar{B}(D)) = \bigcup_{x \in D} \{(x, b) : b + S(x) \in B\}. \end{aligned} \quad (42)$$

Покажем, что для этой системы выполнены условия теоремы 1. Заметим, что $|B(x)|$ одинаковы и равны $|B|$. Поэтому выполнено условие (8) (см. замечание 2). Остальные условия теоремы 1, кроме соотношения (9), присутствуют в условиях доказываемой теоремы. Итак, нам осталось показать, что из (14) следует (9).

Лемма 4. Для множества J вида (42) выполнено неравенство

$$\rho(J) \leq \rho(D)\rho(B). \quad (43)$$

Нам понадобится следующее определение. Рассмотрим подмножества B_1, B_2, B_3 элементов пространства V^T . Пусть $N(a_1, a_2, a_3, d, B_1, B_2, B_3)$ обозначает число решений системы из T линейных уравнений над полем K , записанной в виде уравнения

$$a_1u^1 + a_2u^2 + a_3u^3 = d,$$

относительно тройки векторов $(u^1, u^2, u^3) \in B_1 \times B_2 \times B_3$, $a_1, a_2, a_3 \in K \setminus \{0\}$, $d \in V^T$. Положим

$$\begin{aligned} N(B_1, B_2, B_3) &= \max_{a_1, a_2, a_3, d} N(a_1, a_2, a_3, d, B_1, B_2, B_3), \\ \rho(B_1, B_2, B_3) &= \frac{N(B_1, B_2, B_3)}{|B_1||B_2|}, \end{aligned} \quad (44)$$

Из этого определения и определения величины $\rho(B)$, приведенного во Введении, вытекают следующие свойства:

$$\begin{aligned} \rho(B, B, B) &= \rho(B), \\ \rho(B_1 + b^1, B_2 + b^2, B_3 + b^3) &= \rho(B_1, B_2, B_3) \quad \text{для всех } b^1, b^2, b^3 \in V^T; \end{aligned}$$

в частности,

$$\rho(B + b^1, B + b^2, B + b^3) = \rho(B). \quad (45)$$

Доказательство леммы 4. Рассмотрим систему уравнений

$$a_1u^1 + a_2u^2 + a_3u^3 = d, \quad (46)$$

относительно тройки векторов $(u^1, u^2, u^3) \in J^3$, $a_1, a_2, a_3 \in K \setminus \{0\}$, $d \in V^{n+T}$. Здесь $u^j = (x^j, b^j)$, $j = 1, 2, 3$. Согласно (42) систему (46) можно рассматривать как объединение двух систем: системы

$$a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 = d^X \quad (47)$$

относительно $(x^1, x^2, x^3) \in D^3$, и системы

$$a_1b^1 + a_2b^2 + a_3b^3 = d^B \quad (48)$$

относительно $b^1 \in B(x^1), b^2 \in B(x^2), b^3 \in B(x^3)$. Здесь

$$(d^X, d^B) = d.$$

При фиксированных значениях $(x^1, x^2, x^3) \in D^3$ система (48) имеет не более $\rho(B(x^1), B(x^2), B(x^3))|B(x^1)||B(x^2)|$ решений (см. формулу (44)). В силу (42), при всех $j = 1, 2, 3$ имеют место равенства

$$|B(x^j)| = |B + R(x^j)| = |B|.$$

Согласно (45), выполняется равенство

$$\rho(B(x^1), B(x^2), B(x^3)) = \rho(B).$$

Поэтому при любой фиксации $(x^1, x^2, x^3) \in D^3$ число решений системы (48) не превосходит $\rho(B)|B|^2$.

Значит, число решений системы (46) не превосходит произведения числа решений системы (47), которое оценивается сверху величиной $\rho(D)|D|^2$, и выражения $\rho(B)|B|^2$. Значит, согласно (5),

$$\rho(J) \leq \frac{\rho(D)\rho(B)|D|^2|B|^2}{|J|^2}. \quad (49)$$

Так как все $|B(x)|$ одинаковы и равны $|B|$, то

$$|J| = |D||B|.$$

Поэтому из (49) следует (43). Лемма 4 доказана.

Таким образом, все условия теоремы 1 выполнены, и мы можем применить ее к системе (41). Теорема 2 доказана.

4. Доказательство теоремы 3

Пусть классическая (одномерная) теорема Б. А. Севастьянова (см. [1]) применяется к случайной величине $W_m(\theta)$, являющейся суммой случайных индикаторов, совместное распределение которых зависит от некоторого параметра $\theta \in \Theta$, где Θ — множество произвольной природы. Если все условия теоремы Б. А. Севастьянова при $m \rightarrow \infty$ выполнены равномерно по $\theta \in \Theta$, а именно, для математического ожидания вместо условия $\mathbf{E}W(\theta) \rightarrow \lambda$ имеем соотношение

$$\sup_{\theta \in \Theta} |\mathbf{E}W(\theta) - \lambda| \rightarrow 0,$$

а в остальных условиях производится аналогичная замена, то, как вытекает из доказательства этой теоремы (опять см. [1]), факториальные моменты случайной величины $W_m(\theta)$ стремятся к своим пределам также равномерно по $\theta \in \Theta$:

$$\sup_{\theta \in \Theta} |\mathbf{E}W(\theta)_r - \lambda^r| \rightarrow 0, \quad r = 2, 3, \dots$$

Так как вероятности любой неотрицательной целочисленной случайной величины с любой заранее заданной точностью выражаются через ограниченное число (оно зависит только от точности) факториальных моментов, то получаем при $m \rightarrow \infty$ равномерную сходимость к закону Пуассона в том смысле, что

$$\sup_{\theta \in \Theta} \left| \mathbf{P}\{W(\theta) = r\} - \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda} \right| \rightarrow 0, \quad r = 0, 1, \dots$$

Приступим к доказательству теоремы 3. Сначала будем считать, что отображение S является детерминированным. Перепишем систему (13) как

$$x \in D, \quad Ax \in B(x), \quad (50)$$

где

$$B(x) = \{b \in V^T : b + S(x) \in B\},$$

и обратимся к условиям и доказательству теоремы 4, применяя ее к числу решений системы (50). Множество J не содержит подобных векторов (так как их нет в D). Положим $\bar{J} = J$. Все множества $B(x)$ у нас имеют одинаковую мощность $|B|$, поэтому

$$|J| = |D||B|,$$

и выполнено условие (8) (см. замечание 2). Возьмем $s = 1$. Тогда $R_1 = J$, а условия (16) и (17) заменятся на (15). Осталось заметить, что, согласно лемме 4, из (14) следует условие $\rho(J) \rightarrow 0$. В итоге получаем, что по предположениям теоремы 3 все условия теоремы 4 выполнены, причем, и это важно, в них не участвует отображение S .

Возвращаясь теперь к доказательству теоремы 4, нетрудно убедиться, что построение исключительных множеств ведется одинаково при всех S , а все полученные по ходу доказательства оценки, которые затем используются для проверки условий (20)–(24), равномерны по S в указанном выше смысле. Значит, условия теоремы Б. А. Севастьянова выполнены равномерно (в том же смысле) по S . Поэтому факториальные моменты и распределение случайной величины $\xi(D, A + S, B)$ при $n, T \rightarrow \infty$ и любом изменении S сходятся к факториальным моментам и распределению закона Пуассона с параметром λ равномерно по S .

Итак, мы доказали, что

$$\sup_S \left| \mathbf{P}\{\xi(D, A + S, B) = r\} - \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda} \right| \rightarrow 0. \quad (51)$$

Пусть теперь отображение S выбрано случайно и независимо от A . Из (51) и формулы полной вероятности следует, что и в этом случае при $n, T \rightarrow \infty$ распределение величины $\xi(D, A + S, B)$ сходится к распределению Пуассона с параметром λ . Эта сходимостъ равномерна относительно закона распределения случайного отображения S . Теорема 3 доказана.

Замечание 8. Естественным является вопрос о том, почему в теореме 3 рассмотрен случай сходимости к распределению Пуассона, а не сложному пуассоновскому распределению, как в теоремах 1 и 2. На первый взгляд, использованные рассуждения позволяют это сделать. Проблема здесь заключается в трудности выбора содержательного аналога условия (7) в тех случаях, когда предельное распределение числа решений системы (13) при детерминированном $S(x)$ существенно зависит от $S(x)$. Поэтому мы ограничились случаем, когда для всех $S(x)$ предельное распределение случайной величины $\xi(D, A + S, B)$ одинаково. Это легко достигается с помощью условия об отсутствии подобных векторов в D , а оно, в свою очередь, приводит к распределению Пуассона в пределе.

Список литературы

1. Колчин В. Ф., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., *Случайные размещения*. Наука, Москва, 1976.
2. Копытцев В. А., О числе решений систем линейных булевых уравнений в множестве векторов, обладающих заданным числом единиц. *Дискретная математика* (2002) **14**, №4, 87–109.
3. Копытцев В. А., О числе решений системы случайных линейных уравнений. *Дискретная математика* (2006) **18**, №1, 40–62.

4. Копытцев В. А., Михайлов В. Г., Теоремы пуассоновского типа для числа специальных решений случайного линейного включения. *Дискретная математика* (2010) **22**, №2, 3–21.
5. Копытцев В. А., Михайлов В. Г., Теоремы пуассоновского типа для числа решений случайных включений. *Математические вопросы криптографии* (2010) **1**, №4, 63–84.
6. Копытцев В. А., Михайлов В. Г., О распределении чисел решений случайных включений. *Математические вопросы криптографии* (2011) **2**, №2, 55–80.
7. Копытцев В. А., Михайлов В. Г., Об одном асимптотическом свойстве сфер в дискретных пространствах большой размерности. *Обозрение прикладной и промышленной математики* (2011) **18**, №5, 786.
8. Михайлов В. Г., Предельная теорема Пуассона для числа ненулевых решений одной системы случайных уравнений над полем $GF(2)$. *Теория вероятностей и ее применения* (1998) **43**, №3, 598–606.
9. Михайлов В. Г., Предельная теорема Пуассона для числа неколлинеарных решений системы случайных уравнений специального вида. *Дискретная математика* (2001) **13**, №3, 82–90.
10. Михайлов В. Г., Предельные теоремы для числа точек случайного линейного подпространства, попавших в заданное множество. *Дискретная математика* (2003) **15**, №2, 128–137.
11. Михайлов В. Г., О предельной теореме Б. А. Севастьянова для сумм зависимых случайных индикаторов. *Обозрение прикладной и промышленной математики* (2003) **10**, №3, 571–578.
12. Михайлов В. Г., Предельные теоремы для числа решений системы случайных линейных уравнений, попавших в заданное множество. *Дискретная математика* (2007) **19**, №1, 17–26.

Статья поступила 27.03.2012.