Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Чупрунов, И. Фазекаш, Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для максимального объема ячейки, *Дискрет. матем.*, 2012, том 24, выпуск 3, 122–129

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1203>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 12:02:05

Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для максимального объема ячейки

© 2012 г. А. Н. Чупрунов, И. Фазекаш

Рассматривается аналог обобщенной схемы размещения, в котором вместо условия, что количество частиц равно n , используется условие, что количество частиц не превосходит n . Получены предельные теоремы для максимального числа частиц в ячейке.

1. Введение

Пусть $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ — независимые одинаково распределенные невырожденные случайные величины, принимающие значения в множестве неотрицательных целых чисел $\mathbf{N}_0$. Мы будем предполагать, что случайная величина ξ_0 имеет распределение

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi_0 = k\}, \quad k \in \mathbf{N}_0, \quad (1)$$

и

$$\mathbf{E}\xi_0 = a < \infty.$$

Напомним, что случайные величины $\eta'_1, \dots, \eta'_N$, имеющие совместное распределение

$$\mathbf{P}\{\eta'_1 = k_1, \dots, \eta'_N = k_N\} = \mathbf{P}\left\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \sum_{i=1}^N \xi_i = n\right\} \quad (2)$$

образуют обобщенную схему размещения. Понятие обобщенной схемы размещения было введено В. Ф. Колчиным в [1]. Многие схемы комбинаторной теории вероятностей (схема размещения различных частиц по ячейкам, схема размещения неразличимых частиц по ячейкам, случайные перестановки, случайные отображения, случайные графы, и т. д.) являются частными случаями обобщенной схемы размещения [2]. Изучению обобщенной схемы размещения посвящено большое количество работ (см. [2, 3] и их библиографии).

Мы будем рассматривать случайные величины $\eta_1, \dots, \eta_N$, имеющие совместное распределение

$$\mathbf{P}\{\eta'_1 = k_1, \dots, \eta'_N = k_N\} = \mathbf{P}\left\{\xi_1 = k_1, \dots, \xi_N = k_N \mid \sum_{i=1}^N \xi_i \leq n\right\}. \quad (3)$$

Обобщенная схема размещения интерпретируется как схема размещения n частиц по N ячейкам. Поэтому схему (3) можно интерпретировать как обобщенную схему размещения не более чем n частиц по N ячейкам.

Классическими задачами комбинаторной теории вероятностей являются изучение случайной величины — числа ячеек, содержащих r частиц и случайной величины — максимального числа частиц в ячейке. Для схемы (3) число ячеек, содержащих r частиц, есть случайная величина

$$\mu_{nN}^{(r)} = \sum_{i=1}^N \mathbf{I}_{\{\eta_i=r\}},$$

где $\mathbf{I}_{\{\eta_i=r\}}$ — индикатор события, состоящего в том, что случайная величина η_i , определенная в (3) равна r . Здесь r — фиксированное целое неотрицательное число. Максимальное число частиц в ячейке в схеме (3) есть случайная величина

$$\eta_{(nN)} = \max_{1 \leq i \leq N} \eta_i.$$

В [4] получены законы больших чисел и локальные предельные теоремы для числа ячеек, содержащих r частиц в схеме (3) — случайных величин $\mu_{nN}^{(r)}$. Настоящая работа примыкает к [4]; здесь мы получим предельные теоремы для случайных величин $\eta_{(nN)}$; в доказательствах теорем настоящей работы существенно используются леммы из [4].

Пусть

$$\eta'_{(nN)} = \max_{1 \leq i \leq N} \eta'_i$$

— максимальный объем ячейки в обобщенной схеме размещения. Пусть $\xi_0^{(\leq r)}$ — случайная величина с распределением

$$\mathbf{P}\{\xi_0^{(\leq r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_0 = k \mid \xi_0 \leq r\},$$

и пусть $\xi_i^{(\leq r)}$, $i = 1, \dots, N$, — независимые копии $\xi_0^{(\leq r)}$. Положим

$$S_N^{(\leq r)} = \sum_{i=1}^N \xi_i^{(\leq r)}, \quad a_{(\leq r)} = \mathbf{E} \xi_0^{(\leq r)}.$$

Для обобщенной схемы размещения (см. лемму 1.2.2 в [2]) справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\eta'_{(nN)} \leq r\} = (1 - P_r)^N \frac{\mathbf{P}\{S_N^{(\leq r)} = n\}}{\mathbf{P}\{S_N = n\}} \quad (4)$$

для всех $r \in \mathbf{N}$, где

$$P_r = \mathbf{P}\{\xi_0 > r\}.$$

Мы будем использовать следующий аналог этой формулы для схемы (3).

Теорема 1. *Справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta_{(nN)} \leq r\} &= (1 - P_r)^N \frac{\mathbf{P}\{S_N^{(\leq r)} \leq n\}}{\mathbf{P}\{S_N \leq n\}} \quad r \in \mathbf{N}, \\ \mathbf{P}\{\eta_{(nN)} \leq 0\} &= \frac{(1 - P_0)^N}{\mathbf{P}\{S_N \leq n\}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Доказательство теоремы 1 повторяет доказательство леммы 1.2.2 из [2]. Теорема 1 позволяет использовать предельные теоремы для сумм независимых случайных величин при доказательстве предельных теорем для $\mathbf{P}\{\eta_{(nN)} \leq r\}$.

Пусть $b_0, b_1, b_2, \dots$ — такая последовательность неотрицательных чисел, что R — радиус сходимости ряда

$$B(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k \theta^k}{k!}$$

— положителен. Случайная величина $\xi_0 = \xi_0(\theta)$ имеет распределение

$$p_k = p_k(\theta) = \mathbf{P}\{\xi_0(\theta) = k\} = \frac{b_k \theta^k}{k! B(\theta)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Мы будем предполагать, что случайная величина $\xi_0(\theta)$ удовлетворяет условию

$$b_0 > 0, \quad b_1 > 0. \quad (A_1)$$

Свойство A_1 и случайная величина $\xi_0(\theta)$ были введены в [5]. В [5–7] были получены предельные теоремы для сумм случайных величин $\xi_i(\theta)$. Отметим, что

$$\tilde{m}(\theta) = \mathbf{E}\xi_0(\theta) = \frac{\theta B'(\theta)}{B(\theta)}, \quad 0 < \theta < R.$$

В [8] показано, что функция $\tilde{m}(\theta)$, $0 < \theta < R$, обратима.

Теоремы 5–7 являются аналогами теоремы Реньи–Эрдеша [9]. Эти результаты получены для случайных величин $\xi_i = \xi_i(\theta)$.

2. Основные результаты

Используя закон больших чисел для оценки числителя и знаменателя дроби в (5), получаем следующую теорему.

Теорема 2. (1) Пусть

$$d > \max(a, a_{\leq r}).$$

Тогда для всех $r \in \mathbf{N}$ при $n, N \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(nN)} \leq r\} = (1 - P_r)^N (1 + o(1)) \quad (7)$$

равномерно по $\alpha_{nN} > d$.

(2) Предположим, что

$$a < d < d_1 < a_{\leq r}.$$

Тогда для всех $r \in \mathbf{N}$ при $n, N \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(nN)} \leq r\} = (1 - P_r)^N o(1) \quad (8)$$

равномерно при $d_1 > \alpha_{nN} > d$.

Используя центральную предельную теорему для оценки числителя и знаменателя дроби в (5), получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Предположим, что $\mathbf{E}\xi_0^2 < \infty$, и пусть $\sigma^2, \sigma_{\leq r}^2$ — дисперсии случайных величин $\xi_0, \xi_0^{(\leq r)}$ соответственно. Пусть $-\infty < C \leq \infty$. Тогда для всех $r \in \mathbf{N}$, при $n, N \rightarrow \infty$ таких, что*

$$\sqrt{N}(\alpha_{nN} - a) \rightarrow C$$

верно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta_{(nN)} \leq r\} &= (1 - P_r)^N \left(\left(\frac{1}{\Phi(C/\sigma)} \right) + o(1) \right), & a_{(\leq r)} < a; \\ \mathbf{P}\{\eta_{(nN)} \leq r\} &= (1 - P_r)^N \left(\left(\frac{\Phi(C/\sigma_{(\leq r)})}{\Phi(C/\sigma)} \right) + o(1) \right), & a_{(\leq r)} = a; \\ \mathbf{P}\{\eta_{(nN)} \leq r\} &= (1 - P_r)^N o(1), & a_{(\leq r)} > a. \end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned} L_{(\leq r)}(\lambda) &= e^{a_{(\leq r)}\lambda} \mathbf{E}e^{-\lambda\xi^{(\leq r)}}, & m_{(\leq r)}(\lambda) &= (\ln(L_{(\leq r)}(\lambda)))', \\ \sigma_{(\leq r)}^2(\lambda) &= m'_{(\leq r)}(\lambda), & \lambda &\geq 0. \end{aligned}$$

Пусть $r \geq 1$,

$$\mathbf{P}(\xi_0 = 0) > 0, \quad \mathbf{P}(\xi_0 \leq r) > \mathbf{P}(\xi_0 = 0).$$

Тогда $m_{\leq r}(\lambda)$ — возрастающая непрерывная функция, такая, что

$$m_{(\leq r)}(0) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} m_{(\leq r)}(\lambda) = a_{(\leq r)}.$$

Пусть

$$0 < \alpha_{nN} < \min(a, a_{\leq r}).$$

Обозначим

$$\begin{aligned} h &= m^{-1}(a - \alpha_{nN}), \\ h_{(\leq r)} &= m_{(\leq r)}^{-1}(a_{(\leq r)} - \alpha_{nN}), \\ \beta_{(\leq r)}(\alpha_{nN}) &= \frac{(1 - e^{-h})}{(1 - e^{-h_{(\leq r)}})}. \end{aligned}$$

Теорема 4. *Предположим, что $r \geq 1$,*

$$\mathbf{P}(\xi_0 = 0) > 0, \quad \mathbf{P}(\xi_0 \leq r) > \mathbf{P}(\xi_0 = 0).$$

Пусть

$$0 < d < d_1 < \min(a, a_{\leq r}).$$

Тогда для всех $r \in \mathbf{N}$, при $n, N \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(nN)} \leq r\} = \mathbf{P}\{\eta'_{(N)} \leq r\} \beta_{(\leq r)}(\alpha_{nN})(1 + o(1))$$

равномерно по $d < \alpha_{nN} < d_1$.

Теорема 5. Предположим, что $\xi = \xi(\theta)$ имеет распределение (6) и условие A_1 выполнено. Пусть $r \in \mathbf{N}$. Пусть $\theta = \theta(N)$ выбраны так, что

$$Np_{r+1}(\theta) \rightarrow \lambda, \quad 0 < \lambda < \infty.$$

Тогда, если $n, N \rightarrow \infty$ так, что

$$\frac{n}{N^{r/(r+1)}} \rightarrow \infty,$$

то

$$\mathbf{P}\{\eta_{(nN)} = r\} = e^{-\lambda} + o(1)$$

и

$$\mathbf{P}\{\eta_{(nN)} = r + 1\} = 1 - e^{-\lambda} + o(1).$$

Теорема 6. Предположим, что $\xi = \xi(\theta)$ имеет распределение (6) и условие A_1 выполнено. Пусть $n \in \mathbf{N}$ фиксировано. Пусть $\theta = \theta(N)$ выбраны так, что

$$Np_1(\theta) \rightarrow \lambda, \quad 0 < \lambda < \infty.$$

Тогда при $N \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(nN)} = 0\} = \frac{e^{-\lambda}}{\sum_{l=0}^n \frac{\lambda^l e^{-\lambda}}{l!}} + o(1)$$

и

$$\mathbf{P}\{\eta_{(nN)} = 1\} = 1 - \frac{e^{-\lambda}}{\sum_{l=0}^n \frac{\lambda^l e^{-\lambda}}{l!}} + o(1).$$

В случае $r = 0$ теорема 5 верна при более слабых условиях.

Теорема 7. Предположим, что $\xi = \xi(\theta)$ имеет распределение (6) и условие A_1 выполнено. Пусть $\theta = \theta(N)$ выбраны так, что

$$Np_1(\theta) \rightarrow \lambda, \quad 0 < \lambda < \infty.$$

Тогда при $n, N \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(nN)} = 0\} = e^{-\lambda} + o(1)$$

и

$$\mathbf{P}\{\eta_{(nN)} = 1\} = 1 - e^{-\lambda} + o(1).$$

3. Доказательства

Доказательство теоремы 2. Используя формулу (15) из [4] для ξ_i и для $\xi_i^{(\leq r)}$ в (5), получаем (7).

По закону больших чисел Колмогорова,

$$\mathbf{P}\{S_N^{(\leq r)} \leq n\} \rightarrow 0$$

если $n, N \rightarrow \infty$ так, что $d < \alpha_{nN} < d_1$. Используя этот факт и формулу (15) из [4] в (5), получаем (8).

Для доказательства теоремы 3 достаточно применить формулу (16) из [4] к ξ_i и к $\xi_i^{(\leq r)}$ в (5).

Для доказательства теоремы 4 достаточно применить формулу (38) из [4] к ξ_i и $\xi_i^{(\leq r)}$ в (5) с учетом (4).

Доказательство теоремы 5. Заметим, что

$$B(\theta) = b_0 + o(1), \quad \theta = \left(\frac{(r+1)!(b_0\lambda + o(1))}{Nb_{r+1}} \right)^{1/(r+1)}.$$

Подставляя $r+1$ вместо r в формулу (52) в [4], получаем

$$\mathbf{P}\{S_N > n\} \leq \frac{1}{n} \mathbf{E}S_N = o(1). \quad (9)$$

Пусть $r_1 \in \mathbf{N}$. Тогда верны соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_N^{(\leq r_1)} > n\} &\leq \frac{N}{n} \mathbf{E}\xi^{(\leq r_1)} \\ &= \frac{N}{n} \frac{\sum_{k=1}^{r_1} k \frac{b_k}{k! b_0} \left(\left(\frac{(r+1)!(b_0\lambda + o(1))}{Nb_{r+1}} \right)^{1/(r+1)} \right)^k}{\sum_{k=0}^{r_1} \frac{b_k}{k! b_0} \left(\left(\frac{(r+1)!(b_0\lambda + o(1))}{Nb_{r+1}} \right)^{1/(r+1)} \right)^k} (1 + o(1)) = o(1) \end{aligned} \quad (10)$$

и

$$\begin{aligned} (1 - P_{r-1})^N &= o(1), \\ (1 - P_r)^N &= e^{-\lambda} + o(1), \\ (1 - P_{r+1})^N &= 1 + o(1). \end{aligned} \quad (11)$$

Тогда, в силу (9) и (10),

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_N \leq n\} &= 1 + o(1), \\ \mathbf{P}\{S_N^{(\leq r_1)} \leq n\} &= 1 + o(1), \end{aligned}$$

Применив эти оценки и (11) к (5), получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\eta_{(nN)} \leq r - 1\} &= o(1), \\ \mathbf{P}\{\eta_{(nN)} \leq r\} &= e^{-\lambda} + o(1), \\ \mathbf{P}\{\eta_{(nN)} \leq r + 1\} &= 1 + o(1).\end{aligned}$$

Последние оценки доказывают теорему 5.

Доказательство теоремы 6. Справедливы соотношения

$$\begin{aligned}(1 - P_{-1})^N &= 0, \\ (1 - P_0)^N &= e^{-\lambda} + o(1), \\ (1 - P_1)^N &= 1 + o(1)\end{aligned}\tag{12}$$

и

$$\mathbf{P}\{\eta_{(nN)} \leq -1\} = 0.\tag{13}$$

Применив пуассоновскую предельную теорему и (12) к (5), получаем

$$\mathbf{P}\{\eta_{(nN)} \leq 0\} = \frac{e^{-\lambda}}{\sum_{l=0}^n \frac{\lambda^l e^{-\lambda}}{l!}} + o(1).\tag{14}$$

Заметим, что $\xi_1^{(\leq 1)}, \dots, \xi_N^{(\leq 1)}$ — независимые индикаторы, такие, что

$$N\mathbf{P}\{\xi_i^{(\leq 1)} = 1\} \rightarrow \lambda$$

при $N \rightarrow \infty$. Следовательно, по пуассоновской предельной теореме

$$\mathbf{P}\{S_N^{(\leq 1)} \leq n\} = \sum_{l=0}^n \frac{\lambda^l e^{-\lambda}}{l!} + o(1).\tag{15}$$

Применив (12), (15) и пуассоновскую предельную теорему к (5), получаем

$$\mathbf{P}\{\eta_{(nN)} \leq 1\} = (1 + o(1)) \frac{\sum_{l=0}^n \frac{\lambda^l e^{-\lambda}}{l!} + o(1)}{\sum_{l=0}^n \frac{\lambda^l e^{-\lambda}}{l!} + o(1)} = 1 + o(1).\tag{16}$$

Из (13), (14) and (16) следует теорема 6.

Доказательство теоремы 7 повторяет доказательство теоремы 6.

Список литературы

1. Колчин В. Ф., Один класс предельных теорем для условных распределений. *Литовский матем. сборник* (1968) **8**, №1, 53–63.
2. Колчин В. Ф., *Случайные графы*. Физматлит, Москва, 2000.
3. Тимашев А. Н., *Асимптотические разложения в вероятностной комбинаторике*. ТВП, Москва, 2011.
4. Чупрунов А. Н., Фазекаш И., Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для числа ячеек заданного объема. *Дискретная математика* (2012) **24**, №1, 140–158.
5. Колчин А. В., Предельные теоремы для обобщенной схемы размещения. *Дискретная математика* (2003) **15**, №4, 143–157.
6. Колчин А. В., Колчин В. Ф., О переходе распределений сумм независимых одинаково распределенных случайных величин с одной решетки на другую в обобщенной схеме размещения. *Дискретная математика* (2006) **18**, №4, 113–127.
7. Колчин А. В., Колчин В. Ф., Переход с одной решетки на другую распределений сумм случайных величин, встречающихся в обобщенной схеме размещения. *Дискретная математика* (2007) **19**, №3, 15–21.
8. Chuprunov A. N., Fazekas I., An inequality for moments and its applications to the generalized allocation scheme. *Publ. Math. Debrecen* (2010) **76**, №3, 271–286.
9. Erdős P., Rényi A., On the evolution of random graphs. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* (1960) **5**, 17–61.

Статья поступила 18.05.2011.