Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Е. Дьяконова, Многотипные ветвящиеся процессы, эволюционирующие в марковской среде, *Дискрет. матем.*, 2012, том 24, выпуск 3, 130–151

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1204>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 11:14:52

Многотипные ветвящиеся процессы, эволюционирующие в марковской среде

© 2012 г. Е. Е. Дьяконова

Рассматриваются многотипные ветвящиеся процессы в случайной марковской среде, обладающие свойством критичности. Получена условная предельная теорема о распределении числа частиц в процессе в момент времени n при условии невырождения процесса к этому моменту.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 11-01-00139.

1. Введение и основные результаты

Впервые ветвящийся процесс в случайной среде был рассмотрен Смитом и Вилкинсоном [1]. В их работе среда, в которой эволюционирует процесс, порождалась последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. Вскоре Атрейя и Карлин [2] исследовали свойства ветвящихся процессов, функционирующих в случайной среде более общего вида. С тех пор появилось много работ, в которых изучаются ветвящиеся процессы в случайной среде (см., например, [3–23]). Так, в [3, 5] для многотипных ветвящихся процессов в случайной среде были найдены условия невырождения с вероятностью единица и установлены предельные теоремы о распределении числа частиц в процессе. Для среды, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, многотипный докритический ветвящийся процесс с финальным продуктом был исследован в [14], а докритический многотипный ветвящийся процесс с иммиграцией был изучен в [15, 22]. Вероятность невырождения критических и докритических однитипных ветвящихся процессов для случая стационарной случайной среды анализировалась в [21].

До появления статей [7, 10], стандартным условием, накладываемым на критический ветвящийся процесс, эволюционирующий в случайной среде, было предположение о конечности второго момента $\mathbf{E}X^2 < \infty$ приращения X сопровождающего случайного блуждания. Именно при этом условии (и соответственно, при его многомерном аналоге в многотипном случае) в случае среды, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, в [23, 9] была исследована асимптотика вероятности невырождения для критических однитипных ветвящихся процессов, а для критических многотипных ветвящихся процессов — в [17]. В последующих работах [7, 10–12, 20] была получена асимптотика вероятности невырождения и изучено поведение числа частиц в процессе для гораздо более богатого класса критических ветвящихся процессов с одним типом частиц, функционирующих в случайной среде, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин. Для

представителей этого класса не только конечность второго момента $\mathbf{E}X^2$ не обязательна, но даже и существование математического ожидания у случайной величины X не является необходимым требованием. Многотипные ветвящиеся процессы в случайной среде, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, рассматривались в [16, 18] в предположении, что сопровождающие случайные блуждания этих процессов удовлетворяют условию Спичера–Дони (см. ниже условие C1), а матрицы средних значений законов размножения частиц всех поколений имеют один и тот же общий левый (или правый) собственный вектор, соответствующий их перроновым корням.

В [19] исследовалась асимптотика вероятности невырождения многотипных ветвящихся процессов в случайной марковской среде, обладающих свойством критичности. В настоящей работе для этого класса ветвящихся процессов изучается предельное поведение числа частиц в процессе в момент времени $n \rightarrow \infty$. В частности, мы обобщаем некоторые результаты [7, 16, 19].

Для описания интересующей нас модели ветвящегося процесса в случайной среде потребуется ряд стандартных обозначений. Пусть $\mathbf{e}_j$, $j = 1, \dots, p$, — p -мерная вектор-строка, j -я компонента которой равняется 1, а все остальные компоненты — нули, $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ — p -мерная нулевая вектор-строка, а $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ — p -мерная единичная вектор-строка. Для

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p), \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_p)'$$

положим

$$|\mathbf{x}| = \sum_{i=1}^p |x_i|, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^p x_i y_i;$$

будем обозначать $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$ матрицу размера $p \times p$, имеющую элементы $x_i y_j$, $1 \leq i, j \leq p$; здесь и далее штрих обозначает транспонирование. Для положительной матрицы $A = (A(i, j))_{i,j=1}^p$ обозначим $\rho(A)$ ее перронов корень и введем норму

$$\|A\| = \sum_{i,j=1}^p A(i, j).$$

Пусть $\mathbf{v}(A) = (v_1(A), \dots, v_p(A))$ — левый, а $\mathbf{u}(A) = (u_1(A), \dots, u_p(A))'$ — правый положительные собственные векторы матрицы A , соответствующие собственному значению $\rho(A)$ и удовлетворяющие условиям

$$|\mathbf{u}(A)| = 1, \quad (\mathbf{v}(A), \mathbf{u}(A)) = 1.$$

Пусть

$$\mathbf{J}^p = \{\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_p): 0 \leq s_i \leq 1, i = 1, \dots, p\},$$

$$\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}, \quad \mathbf{N}_0^p = \{\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_p): t_i \in \mathbf{N}_0, i = 1, \dots, p\}.$$

Для $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_p) \in \mathbf{J}^p$ и $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_p) \in \mathbf{N}_0^p$ положим

$$\mathbf{s}^{\mathbf{t}} = \prod_{i=1}^p s_i^{t_i}.$$

Пусть $\zeta = \{\zeta_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ — неприводимая положительно возвратная цепь Маркова со счетным множеством состояний $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k, \dots\}$ и переходной матрицей

$$Q = (Q_{ij})_{i,j=1}^\infty = (Q(\theta_i, \theta_j))_{i,j=1}^\infty. \quad (1)$$

С каждым значением $\theta \in \Theta$ свяжем p -мерный вектор $\mathbf{f}^{(\theta)}(\mathbf{s}) = (f_1^{(\theta)}(\mathbf{s}), \dots, f_p^{(\theta)}(\mathbf{s}))$, $\mathbf{s} \in \mathbf{J}^p$, вероятностных производящих функций $f_i^{(\theta)}(\mathbf{s})$, $i = 1, \dots, p$, соответствующих p -мерным распределениям вероятностей $\mathbf{F}_i^{(\theta)}(\{\mathbf{t}\})$, $\mathbf{t} \in \mathbf{N}_0^p$. Таким образом,

$$f_i^{(\theta)}(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{t} \in \mathbf{N}_0^p} \mathbf{F}_i^{(\theta)}(\{\mathbf{t}\}) \mathbf{s}^{\mathbf{t}}, \quad i = 1, \dots, p.$$

Последовательность случайных p -мерных векторов $\mathbf{Z}(n) = (Z_1(n), \dots, Z_p(n))$, $n \in \mathbf{N}_0$, с неотрицательными целочисленными координатами называется ветвящимся процессом Гальтона–Ватсона с p типами частиц в случайной среде ζ , если $\mathbf{Z}(0)$ не зависит от ζ и для всех $n \in \mathbf{N}_0$, $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbf{N}_0^p$ и $k_0, k_1, \dots \in \mathbf{N}$

$$\mathcal{L}(\mathbf{Z}(n+1) \mid \mathbf{Z}(n) = (z_1, \dots, z_p), \zeta = (\theta_{k_0}, \theta_{k_1}, \dots)) = \mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{z_i} \xi_i^{(j)}(n)\right), \quad (2)$$

где случайные p -мерные векторы $\xi_i^{(1)}(n), \xi_i^{(2)}(n), \dots, \xi_i^{(z_i)}(n)$, $i = 1, \dots, p$, имеющие целочисленные неотрицательные координаты, независимы в совокупности, и, кроме того, при фиксированном $i \in \{1, \dots, p\}$ случайные векторы $\xi_i^{(1)}(n), \xi_i^{(2)}(n), \dots, \xi_i^{(z_i)}(n)$ распределены согласно вероятностной мере $\mathbf{F}_i^{(\theta_{k_n})}$.

Соотношение (2) задает ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона в случайной среде, в котором $Z_i(n)$, $i = 1, \dots, p$, — число частиц типа i в n -м поколении, причем частицы в этом процессе эволюционируют следующим образом. Если $\zeta_n = \theta \in \Theta$, то все $Z_i(n)$ частиц типа i , принадлежащие n -му поколению, производят потомков согласно закону распределения $\mathbf{F}_i^{(\theta)}$, порождаемому p -мерной производящей функцией $f_i^{(\theta)}(\mathbf{s})$, независимо от других частиц этого поколения и предыстории процесса. Таким образом, в момент времени $n+1$ потомство частицы типа i из n -го поколения описывается случайным вектором $\xi_i(n)$, имеющим распределение $\mathbf{F}_i^{(\theta)}$. Начальное распределение вектора $\mathbf{Z}(0)$ будет указано позднее.

Для $\mathbf{z} \in \mathbf{N}_0^p$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, символы $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\mathbf{z}}$ и $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\mathbf{z}}$ будут обозначать математическое ожидание и, соответственно, вероятность, относящиеся к рассматриваемому ветвящемуся процессу в случайной среде с начальным значением $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{z}$.

Символы $\mathbf{E}_{\zeta}$ и $\mathbf{P}_{\zeta}$, играющие существенную роль в последующих рассуждениях, используются для обозначения условного математического ожидания и условной вероятности при фиксированной среде $(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \dots)$. Символы $\mathcal{E}_{\zeta_n}$ и $\mathcal{P}_{\zeta_n}$ обозначают условное математическое ожидание и условную вероятность при фиксированной векторнозначной вероятностной производящей функции $\mathbf{f}^{(\zeta_n)} = \mathbf{f}^{(\zeta_n)}(\mathbf{s}) = (f_1^{(\zeta_n)}(\mathbf{s}), \dots, f_p^{(\zeta_n)}(\mathbf{s}))'$, $\mathbf{s} \in \mathbf{J}^p$, компонентами которой служат вероятностные производящие функции от p переменных.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что для всех $\theta \in \Theta$, $i = 1, \dots, p$, у производящих функций $f_i^{(\theta)}(\mathbf{s})$ существуют все частные производные первого и второго порядка в точке $\mathbf{1}$. Пусть

$$M^{(\theta)} = (M^{(\theta)}(i, j))_{i,j=1}^p = \left(\frac{\partial f_i^{(\theta)}(\mathbf{1})}{\partial s_j} \right)_{i,j=1}^p$$

и

$$M_n = (M_n(i, j))_{i,j=1}^p = M^{(\xi_n)} = \left(\frac{\partial f_i^{(\xi_n)}(\mathbf{1})}{\partial s_j} \right)_{i,j=1}^p$$

— матрицы средних значений, соответствующие производящим вектор-функциям $\mathbf{f}^{(\theta)}(\mathbf{s})$ и $\mathbf{f}^{(\xi_n)}(\mathbf{s})$.

Введем класс $\mathcal{C}_b$, $0 < b < 1$, всех матриц $A = (A(i, j))_{i,j=1}^p$ с положительными элементами, таких, что

$$b \leq \frac{A(i_1, j_1)}{A(i_2, j_2)} \leq b^{-1}, \quad 1 \leq i_1, i_2, j_1, j_2 \leq p.$$

Нас будут интересовать многотипные ветвящиеся процессы $\mathbf{Z}(n)$, $n \in \mathbf{N}_0$, в случайной среде ζ , для которых выполнено следующее условие.

Условие A0. Существует число $0 < b < 1$ такое, что для всех $\theta \in \Theta$

$$M^{(\theta)} \in \mathcal{C}_b.$$

Кроме того, будем предполагать, что пространство Θ содержит особое выделенное состояние θ_1 , у которого матрица $M^{(\theta_1)}$ имеет вид

$$M^{(\theta_1)} = \rho(M^{(\theta_1)})\mathbf{u} \otimes \mathbf{v},$$

где

$$\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_p), \quad \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_p)', \quad v_i > 0, \quad u_i > 0, \quad 1 \leq i \leq p, \quad (3)$$

$$|\mathbf{u}| = 1, \quad (\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 1. \quad (4)$$

Ясно, что

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(M^{(\theta_1)}), \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(M^{(\theta_1)}).$$

Начальным состоянием нашей среды будет именно это выделенное состояние: $\zeta_0 = \theta_1$. Обозначим $\eta \geq 1$ момент первого возвращения марковской цепи ζ в состояние θ_1 . Пусть

$$\rho = \rho \left(\prod_{i=0}^{\eta-1} M^{(\zeta_i)} \right), \quad X = \log \rho,$$

а $\{X_i, i = 1, 2, \dots\}$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих то же распределение, что и величина X .

Положим

$$\Sigma_0 = 0, \quad \Sigma_n = X_1 + \dots + X_n, \quad n \geq 1,$$

и будем говорить, что случайное блуждание $\{\Sigma_n, n \geq 0\}$ порождено случайной величиной X . Пусть $\xi_i(n)$ — случайный p -мерный вектор, который описывает существующее в момент времени $n + 1$ потомство частицы типа i из n -го поколения.

В дальнейшем предполагается, что ветвящийся процесс $\mathbf{Z}(n)$, $n \in \mathbf{N}_0$, в случайной среде ζ удовлетворяет следующим условиям.

Условие А1. Найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\mathbf{E}\eta^{2+\delta} < \infty.$$

Условие А2. При всех $n \geq 0$ выполняется соотношение

$$\mathbf{P}(\min_{1 \leq i \leq p} \mathcal{P}_{\xi_n}(|\xi_i(n)| > 1) > 0) = 1.$$

Условие В1. Существуют числа $b_n > 0$, $n \geq 1$, что нормированные суммы Σ_n/b_n сходятся по распределению к устойчивому распределению λ с параметром $\alpha \in (0, 2]$, причем $0 < \lambda(\mathbf{R}_+) < 1$.

Известно, что для случайного блуждания Σ_n , удовлетворяющего условию В1,

$$b_n = n^{1/\alpha} l(n),$$

где $l(n)$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция, и для Σ_n выполняется следующее условие Спичера–Дони [27].

Условие С1. Существует число $a \in (0, 1)$ такое, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\Sigma_n > 0) \rightarrow a. \quad (5)$$

Отметим, что для случайного блуждания Σ_n , удовлетворяющего условию В1,

$$a = \lambda(\mathbf{R}_+)$$

(см., например, [28]).

Для $0 \leq k \leq n$ положим

$$M_{k,n} = M_k \cdots M_n,$$

$$\rho_{k,n} = \rho(M_{k,n}),$$

$$\rho_k = \rho(M_k).$$

Пусть

$$S_0 = 0,$$

$$S_n = \log \rho(M_{0,n-1}), \quad n \in \mathbf{N}.$$

Введем случайные величины

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \rho_n^{-2} \left(\max_{i,k} \sum_{j=1}^p \frac{\partial^2 f_k^{(\xi_n)}(\mathbf{1})}{\partial s_j \partial s_i} + 1 \right), \\ \mu &= \sum_{i=0}^{\eta-1} \sigma_i e^{-S_i}. \end{aligned} \quad (6)$$

Положим

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(\mu \geq x, \eta > k).$$

Условие A3. Существует

$$\beta > \frac{1-a}{1/\alpha + a}$$

такое, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\beta g(x) = 0. \quad (7)$$

Для $0 \leq k \leq n$ введем итерации производящих функций $\mathbf{f}^{(\zeta_k)}(\mathbf{s}), \mathbf{f}^{(\zeta_{k+1})}(\mathbf{s}), \dots, \mathbf{f}^{(\zeta_n)}(\mathbf{s})$

$$\mathbf{f}^{k,n}(\mathbf{s}) = \mathbf{f}^{(\zeta_k)}(\mathbf{f}^{(\zeta_{k+1})}(\dots \mathbf{f}^{(\zeta_n)}(\mathbf{s}))).$$

Пусть, далее,

$$\mathbf{f}^{0,\eta-1}(\mathbf{s}) = (f_1^{0,\eta-1}(\mathbf{s}), \dots, f_p^{0,\eta-1}(\mathbf{s})) = \mathbf{f}^{(\zeta_0)}(\mathbf{f}^{(\zeta_1)}(\dots \mathbf{f}^{(\zeta_{\eta-1})}(\mathbf{s}))) \quad (8)$$

— итерации, построенные по последовательности производящих функций $\mathbf{f}^{(\zeta_0)}(\mathbf{s}), \mathbf{f}^{(\zeta_1)}(\mathbf{s}), \dots, \mathbf{f}^{(\zeta_{\eta-1})}(\mathbf{s})$, а $\mathbf{F}_i^{0,\eta-1}(\{\mathbf{t}\})$, $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_p) \in \mathbf{N}_0^p$, — p -мерное распределение вероятностей на $\mathbf{N}_0^p$, соответствующее производящей функции $f_i^{0,\eta-1}(\mathbf{s})$:

$$f_i^{0,\eta-1}(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{t} \in \mathbf{N}_0^p} \mathbf{F}_i^{0,\eta-1}(\{\mathbf{t}\}) \mathbf{s}^{\mathbf{t}}, \quad i = 1, \dots, p. \quad (9)$$

Для $d \in \mathbf{N}_0$ положим

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_d^p &= \{\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_p) \in \mathbf{N}_0^p : t_i < d, i = 1, \dots, p\}, \\ \mathbf{N}_d^p &= \mathbf{N}_0^p \setminus \mathbf{U}_d^p. \end{aligned}$$

Наше следующее условие связано со случайной величиной

$$\kappa(d) = \frac{1}{\rho^2} \sum_{\mathbf{t} \in \mathbf{N}_d^p} \sum_{j,k,i=1}^p \mathbf{F}_i^{0,\eta-1}(\{\mathbf{t}\}) t_j t_k. \quad (10)$$

Условие B2. Существуют числа $\varepsilon > 0$ и $d \in \mathbf{N}_0$ такие, что

$$\mathbf{E}(\log^+ \kappa(d))^{\alpha+\varepsilon} < \infty,$$

где величина α та же, что и в условии B1.

Для фиксированного начального значения $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ определим процесс $W(n) = W(n, \mathbf{z})$ соотношением

$$W(n) = \frac{(\mathbf{Z}(n), \mathbf{u})}{\exp\{S_n\}}.$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия A0, A1, A2, A3, B1 и B2. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\mathcal{L}(W(n) \mid \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}; \mathbf{Z}(0) = \mathbf{z}) \xrightarrow{d} \mathcal{L}(W_z), \quad (11)$$

где случайная величина W_z положительна и конечна с вероятностью 1.

Здесь и далее символ $\xrightarrow{d}$ обозначает сходимость по распределению.

Для случая процесса $Z(n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, с одним типом частиц и начальным значением $Z(0) = 1$ теорема 1 принимает следующий вид.

Следствие 1. Если $p = 1$ и выполняются условия A1, A2, A3, B1 и B2, в которых

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=0}^{\eta-1} \log \left(\frac{d}{ds} f^{(\zeta_i)}(1) \right), \\ S_i &= \sum_{k=0}^{i-1} \log \left(\frac{d}{ds} f^{(\zeta_k)}(1) \right), \\ \mu &= \sum_{i=0}^{\eta-1} \left(1 + \frac{d^2}{ds^2} f^{(\zeta_i)}(1) \left(\frac{d}{ds} f^{(\zeta_i)}(1) \right)^{-2} \right) e^{-S_i}, \end{aligned}$$

то при $n \rightarrow \infty$

$$\mathcal{L} \left(\frac{Z(n)}{e^{S_n}} \mid Z(n) > 0; Z(0) = 1 \right) \xrightarrow{d} \mathcal{L}(W), \quad (12)$$

где случайная величина W положительна и конечна с вероятностью 1.

Теорема 1 справедлива и для случайной среды, порожденной последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, причем в этой ситуации от предположения счетности множества Θ можно отказаться. А именно, пусть $\hat{\mathbf{Z}}(n) = (\hat{Z}_1(n), \dots, \hat{Z}_p(n))$ — процесс Гальтона-Ватсона с p типами частиц, функционирующий в случайной среде $\hat{\zeta} = \{\hat{\zeta}_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, которая задается последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ и принимающих значения из не обязательно счетного борелевского множества $\hat{\Theta} \subseteq (-\infty, +\infty)$. В остальном определение процесса $\hat{\mathbf{Z}}(n)$ совпадает с определением процесса $\mathbf{Z}(n)$: каждому значению $\theta \in \hat{\Theta}$ поставлен в соответствие p -мерный вектор $\mathbf{f}^{(\theta)}(\mathbf{s}) = (f_1^{(\theta)}(\mathbf{s}), \dots, f_p^{(\theta)}(\mathbf{s}))$ многомерных вероятностных производящих функций с матрицей средних значений $M^{(\theta)}$, и т. д. Предположим, что $\hat{\Theta} = \hat{\Theta}_1 \cup \hat{\Theta}_2$, где $\hat{\Theta}_i, i = 1, 2$, — непересекающиеся борелевские множества,

$$\mathbf{P}(\theta \in \hat{\Theta}_1) = p > 0,$$

причем для любого $\theta \in \hat{\Theta}_1$ матрица $M^{(\theta)}$ имеет вид

$$M^{(\theta)} = \rho(M^{(\theta)})\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}^{(\theta)},$$

где, как и прежде,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(\theta)} &= (v_1^{(\theta)}, \dots, v_p^{(\theta)}), \quad \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_p)', \quad v_i^{(\theta)} > 0, \quad u_i > 0, \quad 1 \leq i \leq p, \\ |\mathbf{u}| &= 1, \quad (\mathbf{v}^{(\theta)}, \mathbf{u}) = 1. \end{aligned}$$

Ясно, что

$$\mathbf{v}^{(\theta)} = \mathbf{v}(M^{(\theta)}), \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(M^{(\theta)}).$$

Отметим, что для всех матриц $M^{(\theta)}$ с параметром $\theta \in \hat{\Theta}_1$ вектор $\mathbf{u} = \mathbf{u}(M^{(\theta)})$ является одним и тем же собственным правым вектором. Пусть $\hat{\xi}_0 = \theta \in \hat{\Theta}_1$. Условимся сохранить для момента первого возвращения среды $\hat{\xi}$ во множество $\hat{\Theta}_1$ прежнее обозначение η . Придерживаясь того же соглашения, положим

$$\rho = \rho \left(\prod_{i=0}^{\eta-1} M^{(\hat{\xi}_i)} \right), \quad X = \log \rho,$$

и обозначим $\{\Sigma_n, n \geq 0\}$ случайное блуждание, порожденное случайной величиной X . Наконец, определим через соответствующие процессу $\hat{\mathbf{Z}}(n)$ случайные величины ρ и η величину $\kappa(d)$ с помощью формул (8), (9) и (10), а величину μ — с помощью формулы (6). Для фиксированного начального значения $\hat{\mathbf{Z}}(0) = \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ введем процесс $\hat{W}(n) = \hat{W}(n, \mathbf{z})$ соотношением

$$\hat{W}(n) = \frac{(\hat{\mathbf{Z}}(n), \mathbf{u})}{\exp\{S_n\}}.$$

Теорема 2. Если для случайного процесса $\hat{\mathbf{Z}}(n)$ при соответствующих ему случайном блуждании $\{\Sigma_n, n \geq 0\}$ и параметре $\kappa(d)$ выполнены условия A0, A2, A3, B1 и B2, то при $n \rightarrow \infty$

$$\mathcal{L}(\hat{W}(n, \mathbf{z}) \mid \hat{\mathbf{Z}}(n) \neq \mathbf{0}; \hat{\mathbf{Z}}(0) = \mathbf{z}) \xrightarrow{d} \mathcal{L}(W_{\mathbf{z}}), \quad (13)$$

где случайная величина $W_{\mathbf{z}}$ положительна и конечна с вероятностью 1.

2. Вспомогательные результаты

Приведем сначала несколько результатов, характеризующих произведения матриц из класса $\mathcal{C}_b$, упомянутого в условии A0.

Лемма 1 ([19]). Если $\{A_k, k \geq 1\}$ — последовательность положительных матриц из класса $\mathcal{C}_b$, $0 < b < 1$, то существует число $0 < b^* < 1$ такое, что при всех $n = 1, 2, \dots$

$$\prod_{k=1}^n A_k \in \mathcal{C}_{b^*}. \quad (14)$$

Лемма 2. Для элементов матрицы $A = (A(i, j))_{i,j=1}^p \in \mathcal{C}_b$ и ее правого собственного вектора $\mathbf{u}(A) = (u_1(A), \dots, u_p(A))$, соответствующего перронову корню $\rho(A)$, выполняются соотношения

$$\min_i u_i(A) \geq \frac{b}{p}, \quad pb \leq \frac{\rho(A)}{A(i, j)} \leq pb^{-1}, \quad i, j = 1, \dots, p.$$

Доказательство. Положим

$$A(k) = \sum_{j=1}^p A(k, j), \quad k = 1, \dots, p.$$

Так как

$$\min_k A(k) \leq \rho(A) \leq \max_k A(k),$$

то, в соответствии с определением класса $\mathcal{C}_b$,

$$pb \leq \min_k A(k)/A(i, j) \leq \rho(A)/A(i, j) \leq \max_k A(k)/A(i, j) \leq pb^{-1}.$$

Поскольку

$$\sum_{j=1}^p u_j(A) = 1, \quad u_j(A) > 0,$$

получаем, что

$$u_i(A) = \sum_{j=1}^p \frac{A(i, j)}{\rho(A)} u_j(A) \geq b/p.$$

Лемма доказана.

Лемма 3 ([19]). Пусть $A = (A(i, j))_{i,j=1}^p$ — матрица, все элементы которой положительны, а матрица $M^{(\theta_1)}$ имеет вид

$$M^{(\theta_1)} = \rho(M^{(\theta_1)}) \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}, \quad (15)$$

где векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ удовлетворяют условиям (3) и (4). Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(AM^{(\theta_1)}) &= \mathbf{v}, \\ \mathbf{u}(M^{(\theta_1)}A) &= \mathbf{u}, \\ \rho(AM^{(\theta_1)}) &= \rho(M^{(\theta_1)}A) = \rho(M^{(\theta_1)})(\mathbf{v}, A\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Пусть $0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \dots$ — строгие убывающие лестничные моменты случайного блуждания Σ_n . Введем функцию

$$\begin{aligned} V(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{P}(\Sigma_{\gamma_i} \geq -x), & x \geq 0; \\ V(x) &= 0, & x < 0. \end{aligned}$$

Условие C2. Существуют числа $\varepsilon > 0$ и $d \in \mathbf{N}_0$ такие, что

$$\mathbf{E}(\log^+ \kappa(d))^{1/a+\varepsilon} < \infty, \quad \mathbf{E}(V(X)(\log^+ \kappa(d))^{1+\varepsilon}) < \infty,$$

где a берется из условия (5) и $\kappa(d)$ определено соотношением (10).

Пусть, далее,

$$\begin{aligned} \eta(0) &= 0, \\ \eta(n+1) &= \min\{k > \eta(n): \zeta_k = \theta_1\}, \quad n \in \mathbf{N}_0, \end{aligned} \quad (16)$$

— последовательность моментов попадания марковской цепи ζ в особое состояние θ_1 . Заметим, что набор $\eta(0), \eta(1), \eta(2), \dots$ образует процесс восстановления, причем приращения $\eta(n+1) - \eta(n)$, $n \in \mathbf{N}_0$, распределены так же, как и случайная величина $\eta = \eta(1)$ с

математическим ожиданием $\mathbf{E}\eta \geq 1$. Введем вложенный ветвящийся процесс при помощи равенств

$$\mathbf{Z}^*(n) = \mathbf{Z}(\eta(n)), \quad n \in \mathbf{N}_0.$$

Отметим, что $\mathbf{f}^{\eta(n), \eta(n+1)-1}(\mathbf{s})$ является векторнозначной производящей функцией, соответствующей закону размножения частиц n -го поколения процесса $\mathbf{Z}^*(n)$. Так как наборы $\zeta_{\eta(n)}, \zeta_{\eta(n)+1}, \dots, \zeta_{\eta(n+1)-1}$, $n \in \mathbf{N}_0$, одинаково распределены и не зависят друг от друга, то процесс $\mathbf{Z}^*(n)$, $n \in \mathbf{N}_0$, является ветвящимся процессом Гальтона–Ватсона, эволюционирующим в случайной среде с независимыми одинаково распределенными компонентами. Обозначим M_n^* матрицу средних, соответствующую закону размножения частиц n -го поколения процесса $\mathbf{Z}^*(n)$. Ясно, что

$$M_n^* = \prod_{i=\eta(n)}^{\eta(n+1)-1} M_i.$$

Пусть

$$X_j^* = \log \rho(M_{j-1}^*),$$

и

$$\begin{aligned} S_0^* &= 0, \\ S_n^* &= X_1^* + \dots + X_n^* \end{aligned}$$

— сопровождающее случайное блуждание для процесса $\mathbf{Z}^*(n) = \mathbf{Z}(\eta(n))$, $n \in \mathbf{N}_0$. Очевидно, что

$$X_j^* \stackrel{d}{=} X^* = \log \rho(M_{0, \eta-1}).$$

Определим процесс $W^*(n)$ соотношением

$$W^*(n) = \frac{(\mathbf{Z}^*(n), \mathbf{u})}{\exp\{S_n^*\}}.$$

Лемма 4. Пусть выполнены условия A0, A1, A2, A3, B1 и B2. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\mathbf{Z}^*(n) \neq \mathbf{0} \mid \mathbf{Z}^*(0) = \mathbf{z}) \sim c_z l^*(n) n^{-(1-a)}, \quad (17)$$

$$\mathcal{L}(W^*(n) \mid \mathbf{Z}^*(n) \neq \mathbf{0}; \mathbf{Z}^*(0) = \mathbf{z}) \xrightarrow{d} \mathcal{L}(W_z^*), \quad (18)$$

где $c_z > 0$, $l^*(n)$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция, а случайная величина W_z^* положительна и конечна с вероятностью 1.

Доказательство. Ясно, что

$$M_n^* = M^{(\theta_1)} \prod_{i=\eta(n)+1}^{\eta(n+1)-1} M_i, \quad (19)$$

и по лемме 3

$$\mathbf{u}(M_n^*) = \mathbf{u}, \quad n \in \mathbf{N}_0. \quad (20)$$

Таким образом, при любом $n \in \mathbf{N}_0$ вектор $\mathbf{u}$ является правым собственным вектором матрицы M_n^* , отвечающим ее перрону корню $\rho_n^* = \rho(M_n^*)$. Следовательно, в силу теоремы 2 из [16] и рассуждений, приведенных при доказательстве теоремы 1 из [16], при выполнении условий С1 и С2 верны соотношения (17) и (18). Повторяя практически дословно доказательства теорем 1 и 2 из [16], с той лишь разницей, что при доказательстве леммы 1 из [16] вместо первой части доказательства леммы 2.7 из [7] нужно использовать ее вторую часть, нетрудно показать, что совокупность условий С1 и С2 в формулировках теорем 1 и 2 из [16] может быть заменена на комплекс условий В1 и В2. Лемма доказана.

Определим случайные величины $r = r(n)$ и $m = m(n)$ соотношениями

$$r = r(n) = \max\{k: \eta(k) < n\}, \quad (21)$$

$$m = m(n) = \max\{k < n: \zeta_k = \theta_1\}. \quad (22)$$

Отметим, что $S_r^* = S_m$. Пусть E — единичная матрица размера $p \times p$ и $M_{0,-1} = E$.

Лемма 5. При $n \geq 1$ справедливо равенство

$$S_n = S_{r(n)}^* + \log \rho(M_{m(n),n-1}). \quad (23)$$

Доказательство. Так как при $n \geq 1$

$$M_{0,n-1} = M_{0,m(n)-1} M_{m(n),n-1},$$

то в силу леммы 3 при $m(n) \geq 1$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(M_{0,m(n)-1}) = \mathbf{u}(M_{m(n),n-1}).$$

Следовательно, при $m(n) \geq 1$

$$\rho(M_{0,n-1}) = \rho(M_{0,m(n)-1}) \rho(M_{m(n),n-1}). \quad (24)$$

Логарифмируя (24), получаем (23). Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть выполнены условия А0, А1, А2, В1 и В2. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\mathbf{P}(\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0} \mid \mathbf{Z}(0) = \mathbf{z}) \sim c_z l(n) n^{-(1-a)}, \quad (25)$$

где медленно меняющаяся функция

$$l(n) = l^*(n)(\mathbf{E}\eta)^{1-a},$$

а функция $l^*(n)$ и константа $c_z > 0$ те же, что и в лемме 4. В частности,

$$\mathbf{P}(\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0} \mid \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_i) \sim c_i l(n) n^{-(1-a)},$$

где константы $c_i > 0$, $i = 1, \dots, p$.

Доказательство. При доказательстве теорем 1 и 3 из [19] было показано, что если начальное распределение среды ζ имеет вид

$$\mathbf{P}(\zeta_0 = \theta_j) = Q_{1j}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

(см. (1)) и справедливы условия A0, A1, B1 и B2, то

$$\mathbf{P}(\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0} \mid \mathbf{Z}(0) = \mathbf{e}_i) \sim \frac{1}{\mathbf{E}\eta} \mathbf{P}(\tilde{\mathbf{Z}}(n) \neq \mathbf{0} \mid \tilde{\mathbf{Z}}(0) = \mathbf{e}_i) \sim \frac{c_i}{\mathbf{E}\eta} \tilde{l}(n) n^{-(1-a)},$$

где вложенный ветвящийся процесс $\tilde{\mathbf{Z}}(n)$ задается соотношением

$$\tilde{\mathbf{Z}}(n) = \mathbf{Z}(\eta(n) + 1), \quad n \in \mathbf{N}_0,$$

а $\tilde{l}(n)$ — некоторая медленно меняющаяся на бесконечности функция. Применяя к нашим процессам $\mathbf{Z}(n)$ и $\mathbf{Z}^*(n)$ те же рассуждения, которые проводились в доказательствах теорем 1 и 3 из [19] для процессов $\mathbf{Z}(n)$ и $\tilde{\mathbf{Z}}(n)$, и используя лемму 4, нетрудно убедиться в справедливости (25). Лемма доказана.

Для $0 \leq n_1 \leq n_2$ и $\mathbf{f}^{n_1, n_2}(\mathbf{s}) = (f_1^{n_1, n_2}(\mathbf{s}), \dots, f_p^{n_1, n_2}(\mathbf{s}))$, чтобы упростить обозначения, положим

$$B_k^{n_1, n_2}(\mathbf{s}) = (B_k^{n_1, n_2}(\mathbf{s}; i, j))_{i,j=1}^p = \left(\frac{\partial^2 f_k^{n_1, n_2}(\mathbf{s})}{\partial s_i \partial s_j} \right)_{i,j=1}^p,$$

$$B_k^{n_1, n_2} = (B_k^{n_1, n_2}(i, j))_{i,j=1}^p = (B_k^{n_1, n_2}(\mathbf{1}; i, j))_{i,j=1}^p = B_k^{n_1, n_2}(\mathbf{1}),$$

и пусть $\xi_{ji}(n_1, n_2)$ — число частиц типа i , существующих в процессе $\mathbf{Z}(n)$ в момент времени n_2 и являющихся потомками частицы типа j , которая жила в n_1 -м поколении этого процесса. Введем случайные величины

$$v_j(m, n) = \rho_{m, n-1}^{-1} \sum_{i=1}^p u_i \xi_{ji}(m, n) - u_j, \quad j = 1, \dots, p. \quad (26)$$

Лемма 7. Для $n \geq 1$ и момента $t = t(n)$ последнего до n попадания цепи ζ в специальное состояние справедливо неравенство

$$\mathbb{D}_\zeta v_j(m, n) \leq \rho_{m, n-1}^{-2} \|B_j^{m, n-1}\| + u_j \rho_{m, n-1}^{-1}, \quad j = 1, \dots, p.$$

Здесь и далее символ $\mathbb{D}_\zeta \vartheta$ обозначает дисперсию случайной величины ϑ относительно меры $\mathbb{P}_\zeta$.

Доказательство. Для $j = 1, \dots, p$

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_\zeta[v_j(m, n)] &\leq \rho_{m, n-1}^{-2} \mathbb{E}_\zeta \left(\sum_{i=1}^p u_i \xi_{ji}(m, n) \right)^2 \\ &= \rho_{m, n-1}^{-2} \left(\sum_{i=1}^p u_i^2 \mathbb{E}_\zeta (\xi_{ji}(m, n))^2 + 2 \mathbb{E}_\zeta \left(\sum_{i=1}^p \sum_{l=i+1}^p u_i u_l \xi_{ji}(m, n) \xi_{jl}(m, n) \right) \right) \\ &\leq \rho_{m, n-1}^{-2} \left(\sum_{i=1}^p u_i \mathbb{E}_\zeta (\xi_{ji}(m, n)(\xi_{ji}(m, n) - 1)) + \sum_{i=1}^p M_{m, n-1}(j, i) u_i \right) \\ &\quad + \rho_{m, n-1}^{-2} \left(2 \mathbb{E}_\zeta \left(\sum_{i=1}^p \sum_{l=i+1}^p \xi_{ji}(m, n) \xi_{jl}(m, n) \right) \right) \\ &\leq \rho_{m, n-1}^{-2} \left(\|B_j^{m, n-1}\| + \sum_{i=1}^p M_{m, n-1}(j, i) u_i \right) = \rho_{m, n-1}^{-2} \|B_j^{m, n-1}\| + u_j \rho_{m, n-1}^{-1}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 8. Для $n \geq 1$ и момента $t = t(n)$ последнего до n попадания цепи ζ в специальное состояние справедливо неравенство

$$\rho_{m,n-1}^{-2} \sum_{j=1}^p \|B_j^{m,n-1}\| \leq c \sum_{k=m}^{n-1} \sigma_k \rho_{m,k-1}^{-1}, \quad c > 0, \quad (27)$$

где σ_k те же, что и в (6).

Доказательство. Ввиду равенства

$$B_j^{m,n-1}(\mathbf{s}; i, l) = \frac{\partial^2 f_j^{m,n-2}(\mathbf{f}^{(\zeta_{n-1})}(\mathbf{s}))}{\partial s_i \partial s_l},$$

несложно видеть, что

$$B_j^{m,n-1}(i, l) = \sum_{k,t=1}^p B_j^{m,n-2}(k, t) M_{n-1}(k, i) M_{n-1}(t, l) + \sum_{t=1}^p M_{m,n-2}(j, t) B_t^{n-1,n-1}(i, l). \quad (28)$$

Пусть $D_k = (D_k(i, j))_{i,j=1}^p$ — матрица с элементами

$$D_k(i, j) = \sum_{l=1}^p \frac{\partial^2 f_i^{(\zeta_k)}(\mathbf{1})}{\partial s_l \partial s_j} = \sum_{l=1}^p B_i^{k,k}(l, j). \quad (29)$$

Ясно, что

$$D_k(i, j) \leq \hat{\sigma}_k \rho_k M_k(i, j), \quad (30)$$

где

$$\hat{\sigma}_k = \rho_k^{-1} \max_{i,j} \frac{D_k(i, j)}{M_k(i, j)}. \quad (31)$$

Так как по лемме 2 отношение перронова корня ρ_k матрицы M_k к любому ее элементу $M_k(i, j)$ отделено от нуля и бесконечности, то

$$\hat{\sigma}_k \leq \rho_k \max_{i,j} \frac{1}{M_k(i, j)} \rho_k^{-2} \max_{i,j} D_k(i, j) \leq C_1 \sigma_k, \quad (32)$$

где $C_1 > 0$. Объединяя (28)–(32), получаем

$$B_j^{m,n-1}(i, l) = (M'_{n-1} B_j^{m,n-2} M_{n-1})(i, l) + C_1 \sigma_{n-1} \rho_{n-1} M_{m,n-1}(j, l). \quad (33)$$

Пусть $\mathcal{J}$ — матрица размера $p \times p$, все элементы которой равны 1. Соотношение (33) дает

$$B^{m,n-1} = \sum_{j=1}^p B_j^{m,n-1} \leq M'_{n-1} B^{m,n-2} M_{n-1} + C_1 \sigma_{n-1} \rho_{n-1} \mathcal{J} M_{m,n-1}. \quad (34)$$

Из оценки (34), применяя итерирование необходимое число раз и учитывая, что

$$M_{m,k} M_{k+1,n-1} = M_{m,n-1}, \quad B^{m,m} \leq p \sigma_m \mathcal{J},$$

получаем

$$\|B^{m,n-1}\| \leq C_2 \sum_{k=m}^{n-1} \sigma_k \rho_k \|M'_{k+1,n-1} \mathcal{J} M_{m,n-1}\|, \quad (35)$$

где $C_2 > 0$, а $M_{k,l} = E$ при $k > l$. Положим

$$\underline{u} = \min_i u_i, \quad \bar{u} = \max_i u_i. \quad (36)$$

Введем матрицу $R = (R(i, j))_{i,j=1}^p$, все столбцы которой одинаковы, причем $R(i, j) = u_i$. По лемме 3, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(M_{m,k})$ при всех $k \geq m$. Применяя леммы 1, 2 и учитывая, что $\|\mathcal{J}\| = p^2$, получаем, что

$$\begin{aligned} \|M'_{k+1,n-1} \mathcal{J} M_{m,n-1}\| &\leq \frac{1}{\underline{u}} \|M'_{k+1,n-1} \mathcal{J} M_{m,n-1} R\| = \frac{\rho_{m,n-1}}{\underline{u}} \|M'_{k+1,n-1} \mathcal{J} R\| \\ &= \frac{\rho_{m,n-1}}{\underline{u}} \|M'_{k+1,n-1} \mathcal{J}\| \leq \frac{\rho_{m,n-1} p^2}{\underline{u}} \|M_{k+1,n-1}\| \\ &= \frac{\rho_{m,n-1} p^2}{\underline{u}} \|E M_{k+1,n-1}\| \leq \frac{\rho_{m,n-1} p^3}{\rho_{m,k} b^* \underline{u}} \|M_{m,k} M_{k+1,n-1} E\| \\ &\leq C_3 \frac{\rho_{m,n-1}}{\rho_{m,k}} \|M_{m,n-1} R\| = C_3 \frac{\rho_{m,n-1}^2}{\rho_{m,k}} \|R\| = C_3 p \frac{\rho_{m,n-1}^2}{\rho_{m,k}}, \end{aligned} \quad (37)$$

где

$$C_3 = \frac{p^3}{b^* \underline{u}^2}.$$

В силу лемм 1 и 2,

$$\begin{aligned} \rho_{m,k} &= \frac{1}{p} \|M_{m,k-1} M_k R\| \geq \frac{\rho_k b^*}{p} \|M_{m,k-1} \mathcal{J} R\| \\ &= \frac{\rho_k b^*}{p} \|M_{m,k-1} \mathcal{J}\| \geq \frac{\rho_k b^*}{p \bar{u}} \|M_{m,k-1} R\| \\ &= \frac{\rho_k \rho_{m,k-1} b^*}{\bar{u}}. \end{aligned} \quad (38)$$

Объединяя соотношения (34), (35), (37) и (38), приходим к (27). Лемма доказана.

Из лемм 7 и 8 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2. Для $n \geq 1$ и момента $t = t(n)$ последнего до n попадания цепи ζ в специальное состояние справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^p \mathbb{D}_\zeta v_j(m, n) \leq c \sum_{k=m}^{n-1} \sigma_k \rho_{m,k-1}^{-1} + \rho_{m,n-1}^{-1}, \quad (39)$$

где константа c та же, что и в лемме 8.

3. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим при $x \geq 0$

$$\mathbf{P}(W(n) > x, \mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}) = \mathbf{P}(W(n) > x).$$

Пусть $\xi_{ji}^{(k)}(n_1, n_2)$ — число частиц типа i в процессе $\mathbf{Z}(n) = (Z_1(n), \dots, Z_p(n))$ в момент времени n_2 , являющихся потомками k -й, $k = 1, \dots, Z_j(n_1)$, частицы типа j , которая жила в n_1 -м поколении. Используя лемму 5, несложно видеть, что

$$\begin{aligned} W(n) - W^*(r(n)) &= \frac{(\mathbf{Z}(n), \mathbf{u})}{\exp\{S_n\}} - \frac{(\mathbf{Z}^*(r), \mathbf{u})}{\exp\{S_r^*\}} \\ &= \frac{1}{e^{S_r^*}} \sum_{j=1}^p \left(\sum_{k=1}^{Z_j^*(r)} \left(\sum_{i=1}^p \frac{u_i \xi_{ji}^{(k)}(m, n)}{\rho_{m, n-1}} - u_j \right) \right) = \kappa_{r, n}, \end{aligned}$$

причем $\xi_{ji}^{(k)}(m, n) \stackrel{d}{=} \xi_{ji}(m, n)$, где случайные величины $\xi_{ji}(m, n)$ — те же, что и в (26). Отсюда получаем, что

$$\mathbf{P}(W(n) > x) = \mathbf{P}(W^*(r) + \kappa_{r, n} > x, \mathbf{Z}^*(r) \neq \mathbf{0}).$$

Пусть

$$T = \mathbf{E}\eta.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon_0 \in (0, 1/2)$. Положим

$$U_n = U_n(\varepsilon_0) = [n(1 - \varepsilon_0)/T, n(1 + \varepsilon_0)/T].$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ оценим

$$\mathbf{P}(|\kappa_{r, n}| > \varepsilon) = \mathbf{P}(|\kappa_{r, n}| > \varepsilon, r \in U_n) + \mathbf{P}(|\kappa_{r, n}| > \varepsilon, r \notin U_n).$$

Из формул (36) и (37) работы [19] следует, что

$$\mathbf{P}(|\kappa_{r, n}| > \varepsilon, r \notin U_n) \leq \mathbf{P}(\mathbf{Z}(n) \neq \mathbf{0}, r(n) \notin U_n) = o(n^{-\delta-1}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (40)$$

где величина δ та же, что и в условии A1. Покажем, что для функции

$$y_n = l(n)n^{-(1-a)},$$

где медленно меняющаяся на бесконечности функция $l(n)$ — та же, что и в лемме 6,

$$\mathbf{P}(|\kappa_{r, n}| > \varepsilon, r \in U_n) = o(y_n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (41)$$

В силу условия A3, найдутся числа $\varepsilon_1 \in (0, 1/\alpha + a)$ и $\varepsilon_2 > 0$ такие, что

$$\beta = \frac{1 - a + \varepsilon_2}{1/\alpha + a - \varepsilon_1}. \quad (42)$$

Пусть

$$\tau^*(n) = \min\{j \leq n: S_j^* = \min(S_0^*, \dots, S_n^*)\}$$

– самая левая точка, в которой случайное блуждание $S_0^*, \dots, S_n^*$ на интервале $[0, n]$ достигает минимума. Для $0 \leq l \leq k$ обозначим

$$L_{l,k}^* = \min_{0 \leq j \leq k-l} (S_{l+j}^* - S_l^*),$$

$$L_k^* = L_{0,k}^*.$$

Таким образом, L_k^* – минимум случайного блуждания $S_0^*, \dots, S_k^*$ на интервале $[0, k]$. Заметим, что

$$\{\tau^*(k) = l\} = \{\tau^*(l) = l\} \cap \{L_{l,k}^* \geq 0\}. \quad (43)$$

Положим

$$\mathbf{f}_*^k(\mathbf{s}) = \mathbf{f}^{(\zeta_{\eta(k)})}(\mathbf{f}^{(\zeta_{\eta(k)+1})}(\dots \mathbf{f}^{(\zeta_{\eta(k+1)-1})}(\mathbf{s}))), \quad k \geq 0,$$

$$\mathbf{f}_*^{l,k}(\mathbf{s}) = \mathbf{f}_*^l(\mathbf{f}_*^{l+1}(\dots \mathbf{f}_*^k(\mathbf{s}))), \quad M_{l,k}^* = M_l^* \dots M_k^*, \quad 0 \leq l \leq k.$$

В силу леммы 1 и условия A0, $M_{0,l-1}^* \in \mathcal{C}_{b^*}$. Применяя лемму 2 к $M_{0,l-1}^*$ и учитывая, что

$$\rho(M_{0,l-1}^*) = e^{S_l^*},$$

получаем, что при любом $k > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{Z}^*(n) \neq \mathbf{0}, \tau^*(n) > k) &\leq \mathbf{P}(\mathbf{Z}^*(\tau^*(n)) \neq \mathbf{0}, \tau^*(n) > k) \\ &= \sum_{l=k+1}^n \mathbf{P}(\mathbf{Z}^*(l) \neq \mathbf{0}, \tau^*(l) = l, L_{l,n}^* \geq 0) \\ &= \sum_{i=k+1}^n \mathbf{P}(\mathbf{Z}^*(l) \neq \mathbf{0}, \tau^*(l) = l) \mathbf{P}(L_{n-l}^* \geq 0) \\ &\leq |\mathbf{z}| \sum_{i=k+1}^n \mathbf{E}(|1 - \mathbf{f}_*^{0,l-1}(\mathbf{0})|; \tau^*(l) = l) \mathbf{P}(L_{n-l}^* \geq 0) \\ &\leq |\mathbf{z}| \sum_{i=k+1}^n \mathbf{E}(\mathbf{1}' M_{0,l-1}^* \mathbf{1}; \tau^*(l) = l) \mathbf{P}(L_{n-l}^* \geq 0) \\ &\leq \frac{p|\mathbf{z}|}{b^*} \sum_{i=k+1}^n \mathbf{E}(e^{S_l^*}; \tau^*(l) = l) \mathbf{P}(L_{n-l}^* \geq 0), \end{aligned} \quad (44)$$

где $\mathbf{z} = \mathbf{Z}(\mathbf{0}) = \mathbf{Z}^*(\mathbf{0})$ и b^* взяты из (14). Так как в силу условия B1 сопровождающее случайное блуждание процесса $\mathbf{Z}^*(n)$ удовлетворяет условию C1, то из (44) следует (см. формулу (4.3) статьи [7]), что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n^{-1} \mathbf{P}(\mathbf{Z}^*(n) \neq \mathbf{0}, \tau^*(n) > k) = 0. \quad (45)$$

Для $M = [n^{\varepsilon_1/4}]$ (здесь и далее $[x]$ обозначает целую часть числа x) запишем представление

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|\mathcal{X}_{r,n}| > \varepsilon, r \in U_n) &= \mathbf{P}(|\mathcal{X}_{r,n}| > \varepsilon, \tau^*(r) > M, r \in U_n) \\ &\quad + \mathbf{P}(|\mathcal{X}_{r,n}| > \varepsilon, \tau^*(r) \leq M, r \in U_n) \\ &= \mathcal{H}(n, M) + \mathcal{A}(n, M). \end{aligned} \quad (46)$$

Несложно видеть, что

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(n, M) &\leq \mathbf{P}(\mathbf{Z}^*(r) \neq \mathbf{0}, \tau^*(r) > M, r \in U_n) \\ &\leq \mathbf{P}(\mathbf{Z}^*([n(1 - \varepsilon_0)/T]) \neq \mathbf{0}, \tau^*([n(1 + \varepsilon_0)/T]) > M) \\ &\leq \mathcal{H}_1(n, M) + \mathcal{H}_2(n),\end{aligned}\quad (47)$$

где

$$\mathcal{H}_1(n, M) = \mathbf{P}(\mathbf{Z}^*([n(1 + \varepsilon_0)/T]) \neq \mathbf{0}, \tau^*([n(1 + \varepsilon_0)/T]) > M), \quad (48)$$

$$\mathcal{H}_2(n) = \mathbf{P}(\mathbf{Z}^*([n(1 - \varepsilon_0)/T]) \neq \mathbf{0}, \mathbf{Z}^*([n(1 + \varepsilon_0)/T]) = \mathbf{0}). \quad (49)$$

В силу (45),

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} y_n^{-1} \mathcal{H}_1(n, M) = 0. \quad (50)$$

Так как

$$\mathcal{H}_2(n) = \mathbf{P}(\mathbf{Z}^*([n(1 - \varepsilon_0)/T]) \neq \mathbf{0}) - \mathbf{P}(\mathbf{Z}^*([n(1 + \varepsilon_0)/T]) \neq \mathbf{0}),$$

учитывая, что $\varepsilon_0 \in (0, 1/2)$, в силу (17) получаем

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{H}_2(n)}{y_n} &= c_z((1 - \varepsilon_0)^{-(1-a)} - (1 + \varepsilon_0)^{-(1-a)}) \\ &\leq c_z \left(\left(\frac{1 + \varepsilon_0}{1 - \varepsilon_0} \right)^{1-a} - 1 \right) \leq c_z \left(\frac{1 + \varepsilon_0}{1 - \varepsilon_0} - 1 \right) \leq 4c_z \varepsilon_0.\end{aligned}\quad (51)$$

Оценим теперь величину $\mathcal{A}(n, M)$. Для $N = [n^{\varepsilon_1/2}]$ представим $\mathcal{A}(n, M)$ в виде

$$\mathcal{A}(n, M) = \mathcal{A}_1(n, M, N) + \mathcal{A}_2(n, M, N), \quad (52)$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1(n, M, N) &= \sum_{l=0}^M \mathbf{P}(|\chi_{r,n}| > \varepsilon, \mathbf{Z}^*(r) \neq \mathbf{0}, e^{-S_l^*} > N, \tau^*(r) = l, r \in U_n), \\ \mathcal{A}_2(n, M, N) &= \sum_{l=0}^M \mathbf{P}(|\chi_{r,n}| > \varepsilon, \mathbf{Z}^*(r) \neq \mathbf{0}, e^{-S_l^*} \leq N, \tau^*(r) = l, r \in U_n).\end{aligned}\quad (53)$$

Ясно, что

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1(n, M, N) &\leq \sum_{l=0}^M \mathbf{P}(\mathbf{Z}^*(r) \neq \mathbf{0}, e^{-S_l^*} > N, \tau^*(r) = l, r \in U_n) \\ &= \mathbf{E} \left(\sum_{l=0}^M \mathbb{P}_\zeta(\mathbf{Z}^*(r) \neq \mathbf{0}, e^{-S_l^*} > N, \tau^*(r) = l, r \in U_n) \right) \\ &\leq |\mathbf{z}| \mathbf{E} \left(\sum_{l=0}^M |1 - \mathbf{f}_*^{0,r-1}(\mathbf{0})| I\{e^{-S_l^*} > N, \tau^*(r) = l, r \in U_n\} \right) \\ &\leq |\mathbf{z}| \mathbf{E} \left(\sum_{l=0}^M 1M_{0,l-1}^* (1 - \mathbf{f}_*^{l,r-1}(\mathbf{0}))' I\{e^{-S_l^*} > N, \tau^*(r) = l, r \in U_n\} \right),\end{aligned}\quad (54)$$

где $M_{0,-1}^* = E$ и $I\{\mathcal{C}\}$ — индикатор события $\mathcal{C}$. Из теоремы 1 и формул (45) и (46) в [16] следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{Z}^*(n) \neq \mathbf{0}, L_n^* \geq 0 \mid \mathbf{Z}^*(0) = \mathbf{e}_i) &= \mathbf{E}(\mathbb{P}_\zeta(\mathbf{Z}^*(n) \neq \mathbf{0}, L_n^* \geq 0 \mid \mathbf{Z}^*(0) = \mathbf{e}_i)) \\ &= \mathbf{E}((\mathbf{e}_i, (1 - \mathbf{f}_*^{0,n-1}(\mathbf{0}))') I\{L_n^* \geq 0\}) \\ &\sim \mathbf{P}(\mathbf{Z}^*(n) \neq \mathbf{0} \mid \mathbf{Z}^*(0) = \mathbf{e}_i). \end{aligned} \quad (55)$$

Из (54), применяя сначала леммы 1, 2 и 4, а затем соотношения (43) и (55), получаем, что для некоторого $C > 0$ и b^* из (14)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1(n, M, N) &\leq \frac{p|\mathbf{z}|}{b^*} \mathbf{E} \left(\sum_{l=0}^M e^{S_l^*} |1 - \mathbf{f}_*^{l,r-1}(\mathbf{0})| I\{e^{-S_l^*} > N, \tau^*(r) = l, r \in U_n\} \right) \\ &\leq \frac{p|\mathbf{z}|}{Nb^*} \mathbf{E} \left(\sum_{l=0}^M |1 - \mathbf{f}_*^{l,r-1}(\mathbf{0})| I\{\tau^*(r) = l, r \in U_n\} \right) \\ &= \frac{p|\mathbf{z}|}{Nb^*} \sum_{l=0}^M \mathbf{P}(\tau^*(l) = l) \mathbf{E}(|1 - \mathbf{f}_*^{l,r-1}(\mathbf{0})|; L_{l,r-1}^* \geq 0, r \in U_n) \\ &\leq \frac{(M+1)p|\mathbf{z}|}{Nb^*} \mathbf{E}(|1 - \mathbf{f}_*^{l,r-1}(\mathbf{0})|; L_{l,r-1}^* \geq 0, r \in U_n) \\ &\leq C \frac{(M+1)|\mathbf{z}|}{N} y_n (1 - \varepsilon_0)^{-(1-a)} = o(y_n), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (56)$$

Пусть

$$m^+ = m^+(n) = \min\{k \geq n: \zeta_k = \theta_1\}$$

— следующий после $m(n)$ момент попадания цепи ζ в особое состояние. Для случайных величин $m = m(n)$ и $m^+ = m^+(n)$ положим

$$\begin{aligned} \Xi &= \Xi(n) = \sum_{k=m}^n \sigma_k \rho_{m,k-1}^{-1}, \\ \Xi^{(1)} &= \Xi^{(1)}(n) = \sum_{k=m}^{m^+} \sigma_k \rho_{m,k-1}^{-1}. \end{aligned} \quad (57)$$

При $x_n = n^{1/\alpha+a-\varepsilon_1}$, где ε_1 взят из (42), представим величину $\mathcal{A}_2(n, M, N)$ (см. (53)) в виде

$$\mathcal{A}_2(n, M, N) = \mathcal{A}_2^{(1)}(n, M, N) + \mathcal{A}_2^{(2)}(n, M, N), \quad (58)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2^{(1)}(n, M, N) &= \sum_{l=0}^M \mathbf{P}(|\varkappa_{r,n}| > \varepsilon, e^{-S_l^*} \leq N, \Xi > x_n, \tau^*(r) = l, r \in U_n), \\ \mathcal{A}_2^{(2)}(n, M, N) &= \sum_{l=0}^M \mathbf{P}(|\varkappa_{r,n}| > \varepsilon, e^{-S_l^*} \leq N, \Xi \leq x_n, \tau^*(r) = l, r \in U_n). \end{aligned}$$

Положим

$$\eta_n^- = n - S_{m(n)}, \quad G(y) = \mathbf{P}(\eta \leq y).$$

Пусть

$$H(k) = \sum_{l=1}^{\infty} G^{l*}(k), \quad h(k+1) = H(k+1) - H(k), \quad k \in \mathbf{N}_0,$$

где $G^{l*}(y)$ — l -кратная свертка функции распределения $G(y)$. Положим $t = [(1 - \varepsilon_0)/T]$. Используя очевидные неравенства

$$\Xi^{(1)} \geq \Xi, \quad m(n) \geq r(n),$$

закключаем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2^{(1)}(n, M, N) &\leq \mathbf{P}(\Xi > x_n, r \in U_n) \leq \mathbf{P}(\Xi^{(1)} > x_n, m(n) \geq nt) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n(1-t)} \mathbf{P}(\Xi^{(1)} > x_n, \eta_n^- = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n(1-t)} h(n-k) \mathbf{P}(\mu > x_n, \eta \geq k); \end{aligned}$$

отсюда в силу теоремы восстановления (см., например, [30], гл. 11, §1) получаем, что при достаточно больших n

$$\mathcal{A}_2^{(1)}(n, M, N) \leq \frac{2}{T} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(\mu > x_n, \eta > k). \quad (59)$$

Из условия А3 и оценки (59) следует, что

$$\mathcal{A}_2^{(1)}(n, M, N) = o(y_n), \quad n \rightarrow \infty. \quad (60)$$

Оценим теперь $\mathcal{A}_2^{(2)}(n, M, N)$. Очевидно, что

$$\mathcal{A}_2^{(2)}(n, M, N) = \mathbf{E} \left(\sum_{l=0}^M \mathbb{P}_{\zeta}(|x_{r,n}| > \varepsilon, e^{-S_l^*} \leq N, \Xi \leq x_n, \tau^*(r) = l, r \in U_n) \right). \quad (61)$$

Пусть

$$v_j^{(k)}(n_1, n_2) = \sum_{i=1}^p \frac{u_i \xi_{ji}^{(k)}(n_1, n_2)}{\rho_{n_1, n_2-1}} - u_j, \quad k = 1, \dots, Z_j(n_1).$$

Тогда

$$x_{r,n} = \frac{1}{e^{S_r^*}} \sum_{j=1}^p \left(\sum_{k=1}^{Z_j^*(r)} v_j^{(k)}(m, n) \right) = \frac{1}{e^{S_r^*}} \sum_{j=1}^p \left(\sum_{k=1}^{Z_j(m)} v_j^{(k)}(m, n) \right).$$

Отметим, что $v_j^{(k)}(m, n) \stackrel{d}{=} v_j(m, n)$, где случайные величины $v_j(m, n)$ те же, что и в соотношении (26). Согласно неравенству Чебышева,

$$\mathbb{P}_\xi(|\mathcal{K}_{r,n}| > \varepsilon, \tau^*(r) = l, r \in U_n) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 e^{2S_r^*}} \mathbb{D}_\xi \left(\sum_{j=1}^p \left(\sum_{k=1}^{Z_j(m)} v_j^{(k)}(m, n) \right) \right). \quad (62)$$

Так как при фиксированной среде ζ случайные величины $v_j^{(k)}(m, n)$, $j = 1, \dots, p$, $k = 1, \dots, Z_j(m)$, независимы и $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{z}$, то

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_\xi \left(\sum_{j=1}^p \left(\sum_{k=1}^{Z_j(m)} v_j^{(k)}(m, n) \right) \right) &\leq |\mathbf{z}| \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^p M_{0,m-1}(i, j) \mathbb{D}_\xi v_j(m, n) \\ &\leq \frac{|\mathbf{z}|}{\min_i u_i} \sum_{k=1}^p \mathbb{D}_\xi v_k(m, n) \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^p M_{0,m-1}(i, j) u_j \\ &= \frac{|\mathbf{z}|}{\min_i u_i} \exp\{S_r^*\} \sum_{k=1}^p \mathbb{D}_\xi v_k(m, n). \end{aligned} \quad (63)$$

В силу следствия 2,

$$\sum_{k=1}^p \mathbb{D}_\xi v_k(m, n) \leq c \Xi, \quad (64)$$

где Ξ то же, что и в соотношении (57), а c взято из следствия 2. Из (61)–(64) получаем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2^{(2)}(n, M, N) &\leq \sum_{l=0}^M \mathbf{E} \left(\frac{e^{-S_l^*}}{\varepsilon^2 e^{S_r^* - S_l^*}} \Xi; e^{-S_l^*} \leq N, \Xi \leq x_n, \tau^*(r) = l, r \in U_n \right) \\ &\leq \frac{C_0 N x_n}{\varepsilon^2} \sum_{l=0}^M \mathbf{E}(e^{-(S_r^* - S_l^*)}; \tau^*(r) = l, r \in U_n), \end{aligned} \quad (65)$$

где $C_0 > 0$. В силу утверждения 2.1 работы [8],

$$\mathbf{E}(e^{-S_k^*}, L_k^* \geq 0) \sim C k^{-1-1/\alpha} l^{-1}(k), \quad k \rightarrow \infty. \quad (66)$$

Соотношения (65) и (66) дают

$$\mathcal{A}_2^{(2)}(n, M, N) \leq \frac{C_1 N (M+1) x_n}{\varepsilon^2} n^{-1-1/\alpha} l^{-1}(n) = o(y_n), \quad n \rightarrow \infty, \quad (67)$$

где $C_1 > 0$. Объединяя (46)–(52), (56), (58), (60) и (67), в силу произвольности ε_0 приходим к (41). Из (40) и (41), пользуясь леммой 4, получаем (7). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Для ветвящегося процесса $\hat{\mathbf{Z}}(n)$ положим $\hat{\eta}(0) = 0$ и обозначим $\hat{\eta}(1)$ момент первого возвращения среды $\hat{\zeta}_n$ во множество Θ_1 . Пусть

$$\hat{\eta}(n+1) = \min\{k > \hat{\eta}(n): \hat{\zeta}_k \in \Theta_1\}, \quad n \in \mathbf{N}_0. \quad (68)$$

Отметим, что в условиях теоремы 2 момент $\eta = \hat{\eta}(1)$ первого возвращения среды $\hat{\xi}_n$ во множество Θ_1 удовлетворяет условию Крамера, и, следовательно, условию A1. Теперь остается лишь применить схему доказательства теоремы 1, проинтерпретировав встречающиеся в ней величины $\eta(k)$ в соответствии с соотношением (68) как $\hat{\eta}(k)$. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность рецензенту, чьи замечания способствовали улучшению работы.

Список литературы

1. Smith W. L., Wilkinson W., On branching processes in random environment. *Ann. Math. Statist.* (1969) **40**, №3, 814–827.
2. Athreya K. B., Karlin S., On branching processes with random environments. I, II. *Ann. Math. Statist.* (1971) **42**, №5; 6, 1499–1520; 1843–1858.
3. Tanny D., On multitype branching processes in a random environment. *Adv. Appl. Probab.* (1981) **13**, №3, 464–497.
4. Weissener E. W., Multitype branching processes in random environments. *J. Appl. Probab.* (1971) **8**, №1, 17–31.
5. Kaplan N., Some results about multidimensional branching processes with random environments. *Ann. Probab.* (1974) **2**, №3, 441–455.
6. Афанасьев В. И., Предельная теорема для критического ветвящегося процесса в случайной среде. *Дискретная математика* (1993) **5**, №1, 45–58.
7. Afanasyev V. I., Geiger J., Kersting G., Vatutin V. A., Criticality for branching processes in random environment. *Ann. Probab.* (2005) **33**, №2, 645–673.
8. Afanasyev V. I., Böinghoff K., Kersting G., Vatutin V. A., Limit theorems for weakly subcritical branching processes in random environment. *J. Theoretical Probab.* (2012) **25**, №3, 703–732.
9. Geiger J., Kersting G., The survival probability of a critical branching process in random environment. *Теория вероятностей и ее применения* (2000) **45**, №3, 607–615.
10. Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е., Ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона в случайной среде. I: предельные теоремы. *Теория вероятностей и ее применения* (2003) **48**, №2, 274–300.
11. Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е., Ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона в случайной среде. II: конечномерные распределения. *Теория вероятностей и ее применения* (2004) **49**, №2, 231–268.
12. Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е., Ветвящиеся процессы в случайной среде и бутылочные горлышки в эволюции популяций. *Теория вероятностей и ее применения* (2006) **51**, №1, 22–46.
13. Ватутин В. А., Вахтель В. И., Внезапное вырождение критического ветвящегося процесса в случайной среде. *Теория вероятностей и ее применения* (2009) **54**, №3, 417–438.
14. Ватутин В. А., Системы поллинга и многотипные ветвящиеся процессы в случайной среде. *Теория вероятностей и ее применения* (2010) **55**, №4, 644–679.
15. Ватутин В. А., Многотипные ветвящиеся процессы с иммиграцией, эволюционирующие в случайной среде. *Матем. тр.* (2011) **14**, №1, 3–49.
16. Ватутин В. А., Дьяконова Е. Е., Асимптотические свойства многотипных критических ветвящихся процессов, эволюционирующих в случайной среде. *Дискретная математика* (2010) **22**, №2, 22–40.
17. Дьяконова Е. Е., Об асимптотике вероятности невырождения многомерного ветвящегося процесса в случайной среде. *Дискретная математика* (1999) **11**, №1, 113–128.

18. Дьяконова Е. Е., Критические многотипные ветвящиеся процессы в случайной среде. *Дискретная математика* (2007) **19**, №4, 23–41.
19. Дьяконова Е. Е., Многотипные ветвящиеся процессы Гальтона–Ватсона в марковской случайной среде. *Теория вероятностей и ее применения* (2011) **55**, №3, 592–601.
20. Dyakonova E. E., Geiger J., Vatutin V. A., On the survival probability and a functional limit theorem for branching processes in random environment. *Markov Process. Related Fields* (2004) **10**, №2, 289–306.
21. D’Souza J. C., Hambly B. M., On the survival probability of a branching process in a random environment. *Adv. Appl Probab.* (1997) **29**, №1, 38–55.
22. Roitershtein A., A note on multitype branching processes with immigration in a random environment. *Ann. Probab.* (2007) **35**, №4, 1573–1592.
23. Козлов М. В., Об асимптотике вероятности невырождения критических ветвящихся процессов в случайной среде. *Теория вероятностей и ее применения* (1976) **21**, №4, 813–825.
24. Kesten H., Spitzer F., Convergence in distribution of products of random matrices. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb.* (1984) **67**, №4, 363–386.
25. Петров В. В., *Суммы независимых случайных величин*. Наука, Москва, 1972.
26. Athreya K. B., Ney P. E., *Branching processes*. Springer,, Berlin, 1972.
27. Doney R. A., Spitzer’s condition and ladder variables in random walks. *Theory Probab. Related Fields* (1995) **101**, 577–580.
28. Золотарев В. М., *Одномерные устойчивые распределения*. Наука, Москва, 1983.
29. Севастьянов Б. А., *Ветвящиеся процессы*. Наука, Москва, 1971.
30. Феллер В., *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, **2**. Мир, Москва, 1984.

Статья поступила 23.01.2012.