Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Н. Бояринов, О числе промежутков Грама, содержащих ординаты последовательных нулей дзета-функции Римана, *Дискрет. матем.*, 2012, том 24, выпуск 3, 152–159

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1205>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 13:54:31

О числе промежутков Грама, содержащих ординаты последовательных нулей дзета-функции Римана

© 2012 г. Р. Н. Бояринов

Получена верхняя оценка числа промежутков Грама, содержащих k ординат последовательных нулей дзета-функции Римана.

При $t > 0$ определим функцию $\vartheta(t)$ как приращение непрерывной ветви аргумента функции $\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$ при изменении s вдоль отрезка, соединяющего точки $s = 1/2$ и $s = 1/2 + it$. Выбрав ветвь аргумента, значение которой в точке $s = 1/2$ равно нулю, получаем

$$\vartheta(t) = \operatorname{Im} \ln \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right) - \frac{t}{2} \ln \pi = \frac{t}{2} \ln \frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + \Delta(t),$$

где

$$\Delta(t) = \frac{t}{4} \ln \left(1 + \frac{1}{4t^2}\right) + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2t}\right) - \frac{t}{2} \int_0^\infty \frac{\rho(u) du}{(u + 1/4)^2 + t^2/4},$$
$$\rho(u) = 1/2 - \{u\}.$$

Пусть $n \geq 0$ — целое число. Назовем точкой Грама g_n единственный корень уравнения

$$\vartheta(g_n) = \pi(n - 1),$$

а n -м промежутком Грама G_n — промежуток $(g_{n-1}, g_n]$. При $n \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические формулы

$$g_n = \frac{2\pi n}{\ln n} (1 + o(1)), \quad g_{n+1} - g_n = \frac{2\pi}{\ln n} (1 + o(1)).$$

В 1903 г. Дж. Грам [1] установил, что первые 15 промежутков G_n содержат только по одному нулю функции $\zeta(1/2 + it)$. Иными словами, первые пятнадцать нулей функции $\zeta(1/2 + it)$ отделены друг от друга точками Грама. Грам предположил, что обнаруженная закономерность не является общей.

В 1925 г. Дж. Хатчинсон [2] нашел два исключения: промежуток G_{127} не содержал ни одного нуля функции $\zeta(1/2 + it)$, а промежуток G_{135} содержал даже два нуля.

Тем не менее, в большинстве рассмотренных случаев каждый промежуток Грама содержал ровно один нуль функции $\zeta(1/2 + it)$. Свойство нулей функции $\zeta(1/2 + it)$ быть отделенными точками Грама было названо правилом Грама (законом Грама).

В 1934 г. Е. Титчмарш [3] получил оценку снизу для количества промежутков Грама, лежащих на $(0, T)$ и содержащих не менее одного нуля функции $\zeta(1/2 + it)$. Тем самым Е. Титчмарш доказал, что бесконечно много промежутков Грама содержат по крайней мере один нуль функции $\zeta(1/2 + it)$.

В 1946 г. А. Сельберг [4] доказал существование положительных постоянных K и N_0 таких, что для любого $N > N_0$ среди первых N промежутков Грама найдется не менее KN промежутков G_n , содержащих не менее одного нуля функции $\zeta(1/2 + it)$ и не менее KN промежутков G_n , не содержащих ни одного нуля функции $\zeta(1/2 + it)$.

В 1977 г. Я. Мозер [5] получил оценку снизу для количества промежутков Грама, лежащих на $(T, T + H]$ и содержащих хотя бы один нуль $\zeta(1/2 + it)$, $H = T^{1/2}\psi(T)\ln T$, где $\psi(T)$ – возрастающая к бесконечности функция, уточнив тем самым результат Е. Титчмарша.

В данной статье доказывается оценка сверху для числа промежутков Грама, лежащих на коротком интервале и содержащих k ординат последовательных нулей дзета-функции Римана из критической полосы.

Обозначим через $v_k(N)$ количество промежутков Грама G_n с номерами $n \leq N$, содержащих k ординат последовательных (одинаковые ординаты различных нулей получают различные номера) нулей дзета-функции Римана из критической полосы.

Далее $S(t)$ – аргумент дзета-функции Римана на критической прямой (определение см. в [7]). Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $0 < \varepsilon < 0,001$, $N > N_0(\varepsilon) > 0$, $M = [N^{27/82+\varepsilon}]$. Тогда для любого целого $k \geq 4/\chi$ справедливо неравенство

$$\sum_{j=k}^{\infty} (v_j(N + M) - v_j(N)) \leq \frac{e^{2,1}M}{15} \exp(-\chi k),$$

где $\chi = 2\varepsilon^{3/2}/(3e^{18})$.

Замечание 1. Неравенство теоремы с $M = [N^\varepsilon]$ верно для всех $N \in (X, 2X)$, $X \geq X_0(\varepsilon)$, за исключением значений, образующих множество E с мерой $\text{mes}(E) < X^{1-0,04\varepsilon}$.

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Пусть $0 < \varepsilon < 0,001$, $N > N_0(\varepsilon) > 0$, $M = [N^{27/82+\varepsilon}]$, $x = g_N^{0,1\varepsilon}$, m – целое число, $1 \leq m < (\ln x)/192$, $x^{1/(4m)} < y \leq x^{1/m}$. Тогда имеет место оценка

$$\sum_{N < n \leq N+M} \left(S(g_n) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < y} \frac{\sin(g_n \ln p)}{\sqrt{p}} \right)^{2m} < \frac{1}{20} (Am^2)^m M,$$

где $A = e^{34}\varepsilon^{-3}$.

Доказательство леммы можно найти в [6], см. с. 98.

Замечание 2. Неравенство леммы 1 с $M = [N^\varepsilon]$ верно для всех $N \in (X, 2X)$, $X \geq X_0(\varepsilon)$, за исключением значений, образующих множество E с мерой $\text{mes}(E) < X^{1-0,04\varepsilon}$.

Следствие 1. При выполнении условий леммы 1 справедлива оценка

$$\sum_{N < n \leq N+M} \left(S(g_{n+1}) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < y} \frac{\sin(g_{n+1} \ln p)}{\sqrt{p}} \right)^{2m} < \frac{1}{10} (Am^2)^m M,$$

где $A = e^{34}\varepsilon^{-3}$.

Доказательство. Пусть

$$\begin{aligned} A_m &= \sum_{N < n \leq N+M} \left(S(g_{n+1}) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < y} \frac{\sin(g_{n+1} \ln p)}{\sqrt{p}} \right)^{2m}, \\ B_m &= \sum_{N < n \leq N+M} \left(S(g_n) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < y} \frac{\sin(g_n \ln p)}{\sqrt{p}} \right)^{2m}, \\ C_m &= \left(S(g_{N+M+1}) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < y} \frac{\sin(g_{N+M+1} \ln p)}{\sqrt{p}} \right)^{2m}. \end{aligned}$$

Тогда

$$A_m \leq B_m + C_m.$$

Докажем, что

$$C_m \leq \frac{1}{20} (Am^2)^m M.$$

Отсюда будет следовать справедливость следствия 1. Так как (см. [7], с. 73) верно неравенство

$$|S(g_{N+M+1})| \leq 15,5 \ln g_{N+M+1} < 16 \ln N,$$

то

$$C_m \leq (16 \ln N + \sqrt{y})^{2m} \leq 2^{2m} (16^{2m} \ln^{2m} N + x).$$

Верны неравенства

$$4^m x \leq 4^m N^{0,1\varepsilon} < \frac{1}{64} (Am^2)^m M, \quad (32 \ln N)^{2m} \leq \frac{1}{32^m} (Am^2)^m M.$$

Последнее неравенство эквивалентно

$$32^3 \ln^2 N \leq Am^2 M^{1/m}.$$

Функция

$$f(t) = t^2 M^{1/t}$$

на промежутке $[1, \infty)$ принимает минимальное значение в точке $t = (\ln M)/2$. Так как $M \geq [N^\varepsilon] > N^{\varepsilon/2}$, то

$$\frac{\ln M}{2} > \frac{\varepsilon}{4} \ln N > \frac{0,1\varepsilon}{192} \ln N > m \geq 1.$$

Отсюда имеем

$$f(m) \geq f(\tfrac{1}{2} \ln M) = \frac{e^2}{4} \ln^2 M > \ln^2 M.$$

Получаем

$$Am^2 M^{1/m} > A \ln^2 M > \frac{A\varepsilon^2}{4} \ln^2 N > 32^3 \ln^2 N.$$

Отсюда

$$C_m \leq \frac{3}{64} (Am^2)^m M < \frac{1}{20} (Am^2)^m M.$$

Замечание 3. Неравенство следствия 1 с $M = [N^\varepsilon]$ верно для всех $N \in (X, 2X)$, $X \geq X_0(\varepsilon)$, за исключением значений, образующих множество E с мерой $\text{mes}(E) < X^{1-0,04\varepsilon}$.

Лемма 2. Пусть $0 < \kappa < 1/2$, $0 < c < 1/2 - \kappa$, k, r, v, N, M — целые числа, $k \geq 0$, $r \geq 0$, $k + r = v$, $v \geq 1$, $N \geq \exp(9\kappa^{-1})$, $M \geq \exp(\frac{3}{2}vc^{-1})$, $M \leq N$, $y = M^{2v/c}$. Пусть, далее, $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_r$ принимают значения простых чисел из промежутка $(1; y]$ и удовлетворяют условию $p_1 \cdots p_k \neq q_1 \cdots q_r$. Пусть, наконец, все члены последовательности $a(p)$ при $p \leq y$ подчинены условию $|a(p)| \leq \delta$. Если g_n — последовательность точек Грама, то для суммы

$$\Sigma = \sum_{N < n \leq N+M} \sum_{\substack{p_1, \dots, p_k \\ q_1, \dots, q_r}} \frac{a(p_1) \cdots a(p_k) \bar{a}(q_1) \cdots \bar{a}(q_r)}{(p_1 \cdots p_k q_1 \cdots q_r)^{1/2}} \left(\frac{q_1 \cdots q_r}{p_1 \cdots p_k} \right)^{ig_n}$$

имеет место оценка

$$|\Sigma| < (\delta y^{3/2})^v \ln N.$$

Доказательство леммы можно найти в [6], см. с. 92.

Лемма 3. Пусть g_n — точка Грама с номером $N < n \leq N+M$, где N, M — натуральные числа, $M < N$, и

$$\begin{aligned} h_n &= \frac{g_{n+1} - g_n}{2}, & h &= \frac{\pi}{\ln(g_N/(2\pi))}, \\ b_n(p) &= p^{ih_n} \sin(h_n \ln p), & a(p) &= p^{ih} \sin(h \ln p). \end{aligned}$$

Тогда справедливы равенства

$$h_n = h + O\left(\frac{M}{N \ln^2 N}\right), \quad b_n(p) = a(p) + O\left(\frac{M}{N \ln N}\right),$$

где постоянные под знаком O абсолютные.

Доказательство. Из формулы Лагранжа о конечных приращения для функции $\vartheta(t)$ получаем

$$\begin{aligned} g_{n+1} - g_n &= \frac{\vartheta(g_{n+1}) - \vartheta(g_n)}{\vartheta'(\xi_n)} = \frac{\pi}{\vartheta'(\xi_n)} \\ &= \frac{2\pi}{\ln(\xi_n/(2\pi)) + O(1/\xi_n^2)}, \quad g_n < \xi_n < g_{n+1}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} g_{n+1} - g_n &= \frac{2\pi}{\ln(\xi_n/(2\pi))} + O\left(\frac{1}{\xi_n^2 \ln \xi_n}\right) \\ &= \frac{2\pi}{\ln(\xi_n/(2\pi))} + O\left(\frac{1}{g_n^2 \ln g_n}\right) \\ &= \frac{2\pi}{\ln(\xi_n/(2\pi))} + O\left(\frac{1}{N^2}\right). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{\xi_n}{2\pi}\right) &= \ln\left(\frac{g_N}{2\pi}\right) + O\left(\ln\frac{g_{N+M+1}}{g_N}\right) \\ &= \ln\left(\frac{g_N}{2\pi}\right) + O\left(\frac{M}{N}\right).\end{aligned}$$

Поэтому

$$g_{n+1} - g_n = \frac{2\pi}{\ln(g_N/(2\pi))} + O\left(\frac{M}{N \ln^2 N}\right).$$

Отсюда следуют утверждения леммы 3.

Лемма 4. Пусть $0 < \varepsilon < 0,001$, $N > N_0(\varepsilon) > 0$, $M = [N^{27/82+\varepsilon}]$, $x = g_N^{0,1\varepsilon}$, m — целое число, $1 \leq m < (\ln x)/192$. Тогда верно неравенство

$$\sum_{N < n \leq N+M} (S(g_{n+1}) - S(g_n))^{2m} < \frac{1}{15} (9Am^2)^m M,$$

где $A = e^{34}\varepsilon^{-3}$.

Доказательство. Пусть

$$\begin{aligned}h_n &= \frac{g_{n+1} - g_n}{2}, & h &= \frac{\pi}{\ln(g_N/(2\pi))}, \\ b_n(p) &= p^{ih_n} \sin(h_n \ln p), & a(p) &= p^{ih} \sin(h \ln p), \\ U_n &= \frac{1}{\pi} \sum_{p < y} b_n(p) p^{-1/2+ig_n}, & x^{1/(4m)} < y \leq x^{1/m}.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}S(g_{n+1}) - S(g_n) &= \left(S(g_{n+1}) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < y} \frac{\sin(g_{n+1} \ln p)}{\sqrt{p}} \right) \\ &\quad - \left(S(g_n) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < y} \frac{\sin(g_n \ln p)}{\sqrt{p}} \right) - (U_n + \bar{U}_n).\end{aligned}$$

Используя неравенство Гельдера, получаем, что

$$\sum_{N < n \leq N+M} (S(g_{n+1}) - S(g_n))^{2m} \leq 3^{2m-1} (A_m + B_m + D_m),$$

где A_m, B_m определены в доказательстве следствия 1 и

$$D_m = \sum_{N < n \leq N+M} (U_n + \bar{U}_n)^{2m}.$$

Из леммы 1 и следствия 1 получаем, что

$$A_m + B_m \leq \frac{3}{20} (Am^2)^m M.$$

Докажем, что для D_m выполняется неравенство

$$D_m \leq \frac{1}{20}(Am^2)^m M.$$

Действительно,

$$D_m = \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} \sigma_k,$$

где $\binom{2m}{k}$ — биномиальный коэффициент, а

$$\sigma_k = \frac{1}{\pi^{2m}} \sum_{N < n \leq N+M} \sum_{\substack{p_1, \dots, p_k \\ q_1, \dots, q_{2m-k}}} \frac{b_n(p_1) \cdots b_n(p_k) \bar{b}_n(q_1) \cdots \bar{b}_n(q_{2m-k})}{(p_1 \cdots p_k q_1 \cdots q_{2m-k})^{1/2}} \left(\frac{p_1 \cdots p_k}{q_1 \cdots q_{2m-k}} \right)^{i g_n}.$$

Используя лемму 3, получаем, что

$$\sigma_k = \omega_k + O\left(\frac{1}{\pi^{2m}} \frac{M^2 y^m}{N}\right) = \omega_k + O\left(\frac{1}{\pi^{2m}} \frac{1}{N^{1/4}}\right),$$

где

$$\omega_k = \frac{1}{\pi^{2m}} \sum_{N < n \leq N+M} \sum_{\substack{p_1, \dots, p_k \\ q_1, \dots, q_{2m-k}}} \frac{a(p_1) \cdots a(p_k) \bar{a}(q_1) \cdots \bar{a}(q_{2m-k})}{(p_1 \cdots p_k q_1 \cdots q_{2m-k})^{1/2}} \left(\frac{p_1 \cdots p_k}{q_1 \cdots q_{2m-k}} \right)^{i g_n}.$$

При $k \neq m$ из леммы 2 получаем оценку для ω_k :

$$|\omega_k| \leq \frac{y^{3m} \ln N}{\pi^{2m}} \leq \frac{x^3 \ln N}{\pi^{2m}} < \frac{N^{0,3\varepsilon}}{\pi^{2m}}.$$

Отсюда получаем, что

$$|\sigma_k| \leq \frac{0,6M}{\pi^{2m}}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \omega_m &= \frac{M}{\pi^{2m}} \sum_{p_1 \cdots p_m = q_1 \cdots q_m} \frac{a(p_1) \cdots a(p_m) \bar{a}(q_1) \cdots \bar{a}(q_m)}{(p_1 \cdots p_m q_1 \cdots q_m)^{1/2}} \\ &\quad + \frac{1}{\pi^{2m}} \sum_{N < n \leq N+M} \sum_{p_1 \cdots p_m \neq q_1 \cdots q_m} \frac{a(p_1) \cdots a(p_m) \bar{a}(q_1) \cdots \bar{a}(q_m)}{(p_1 \cdots p_m q_1 \cdots q_m)^{1/2}} \left(\frac{p_1 \cdots p_m}{q_1 \cdots q_m} \right)^{i g_n} \\ &= \omega_m^* + \omega_m^{**}. \end{aligned}$$

Из леммы 2 получаем оценку для ω_m^{**} :

$$|\omega_m^{**}| \leq \frac{y^{3m} \ln N}{\pi^{2m}} \leq \frac{x^3 \ln N}{\pi^{2m}} < \frac{N^{0,3\varepsilon}}{\pi^{2m}} < \frac{0,1M}{\pi^{2m}}.$$

Используя однозначность разложения натурального числа, большего единицы, на простые

сомножители, для ω_m^* получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} |\omega_m^*| &\leq \frac{M}{\pi^{2m}} \sum_{p_1 \cdots p_m = q_1 \cdots q_m} \frac{|a(p_1)| \cdots |a(p_m)| |\bar{a}(q_1)| \cdots |\bar{a}(q_m)|}{(p_1 \cdots p_m q_1 \cdots q_m)^{1/2}} \leq \frac{Mm!}{\pi^{2m}} \left(\sum_{p < y} \frac{|a(p)|^2}{p} \right)^m \\ &= \frac{Mm!}{\pi^{2m}} \left(\sum_{p < y} \frac{\sin^2(h \ln p)}{p} \right)^m \leq \frac{Mm!}{\pi^{2m}} \left(h^2 \ln y \sum_{p < y} \frac{\ln p}{p} \right)^m \\ &\leq \frac{Mm!}{\pi^{2m}} (2h \ln y)^{2m} < \frac{M}{\pi^{2m}} \left(\frac{2\pi\varepsilon}{5\sqrt{m}} \right)^{2m} < \frac{0,1M}{\pi^{2m}}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$|\sigma_m| < \frac{0,3M}{\pi^{2m}}.$$

Далее,

$$|D_m| < \binom{2m}{m} |\sigma_m| + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{2m} \binom{2m}{k} |\sigma_k| < \frac{2^{2m}}{\pi^{2m}} 0,9M < \frac{1}{20} (Am^2)^m M.$$

Отсюда следует справедливость леммы 4.

Замечание 4. Неравенство леммы 4 с $M = [N^\varepsilon]$ верно для всех $N \in (X, 2X)$, $X \geq X_0(\varepsilon)$, за исключением значений, образующих множество E с мерой $\text{mes}(E) < X^{1-0,04\varepsilon}$.

Доказательство теоремы 1. Количество $N(T)$ нулей дзета-функции Римана $\zeta(s)$, удовлетворяющих условию $0 < \text{Im } s \leq T$, $0 \leq \text{Re } s \leq 1$, выражается формулой Римана–Мангольдта (см. [7], с. 44):

$$N(T) = \frac{\vartheta(t)}{\pi} + 1 + S(T).$$

Перенумеруем мнимые части нулей $\zeta(s)$ в критической полосе в порядке возрастания, а в случае совпадения нескольких ординат — в произвольном порядке следующим образом: $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots \leq \gamma_n \leq \gamma_{n+1} \leq \dots$. Пусть промежуток $(g_n, g_{n+1}]$ содержит только ординаты $\gamma_{s+1}, \dots, \gamma_{s+l}$, где $l \geq k$. Тогда

$$S(g_{n+1}) - S(g_n) = N(g_{n+1}) - N(g_n) - 1 \geq N(g_{n+1}) - N(g_n + 0) - 1 \geq k - 3/2.$$

Далее,

$$(k - 3/2)^{2m} \sum_{j=k}^{\infty} (v_j(N + M) - v_j(N)) \leq \sum_{N < n \leq N+M} (S(g_{n+1}) - S(g_n))^{2m}.$$

Заметим, что при $k \geq 32 \ln N$ левая часть этого неравенства будет равна нулю, поскольку нет нулей $\zeta(s)$, ординаты которых лежат на промежутке $(g_N, g_{N+M}]$ и кратность которых больше $32 \ln N$. Применяя лемму 4, получаем, что

$$(k - 3/2)^{2m} \sum_{j=k}^{\infty} (v_j(N + M) - v_j(N)) < \frac{1}{15} (9Am^2)^m M.$$

При $4/\varkappa \leq k \leq 32 \ln N$, где $\varkappa = 2\varepsilon^{1.5}/(3e^{18})$, отсюда получаем, что

$$\sum_{j=k}^{\infty} (v_j(N + M) - v_j(N)) < \frac{1}{15} \left(\frac{3m\sqrt{A}}{k - 3/2} \right)^{2m} M.$$

Возьмем

$$m = \left[\frac{k - 3/2}{3e\sqrt{A}} \right].$$

Тогда

$$\sum_{j=k}^{\infty} (v_j(N + M) - v_j(N)) < \frac{1}{15} e^{-2m} M < \frac{e^{2,1} M}{15} \exp(-\kappa k).$$

Теорема полностью доказана.

Список литературы

1. Gram J.-P., Note sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. *Acta Math.* (1903) **27**, №1, 289–304.
2. Hutchinson J. I., On the roots of the Riemann zeta function. *Trans. Amer. Math. Soc.* (1925) **27**, №1, 49–60.
3. Titchmarsh E. C., On van der Corput's method and the zeta-function. IV. *Quart. J. Math., Oxf. Ser.* (1934) **5**, 98–105.
4. Selberg A., The zeta function and the Riemann hypothesis. In: *Dixième Congrès Math. Skandinaves 1946*, **10**. Gjellerups Forlag, Copenhagen, 1947, pp. 187–200.
5. Mózer, J., On Gram's law in the theory of the Riemann zeta-function. *Acta Arithmetica* (1977) **32**, 107–113..
6. Королев М. А., Закон Грама и гипотеза Сельберга о распределении нулей дзета-функции Римана. *Известия РАН, сер. матем.* (2010) **74**, №4, 83–118.
7. Карацуба А. А., Королев М. А., Аргумент дзета-функции Римана. *Успехи матем. наук* (2005) **60**, №3 (363), 41–96.
8. Карацуба А. А., Королев М. А., Поведение аргумента дзета-функции Римана на критической прямой. *Успехи матем. наук* (2006) **61**, №3 (369), 3–92.

Статья поступила 18.05.2011.