Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Безверхний, Проблема сопряженного вхождения
в циклическую подгруппу в группах с условием $C(3)-T(6)$,
Дискрет. матем., 2012, том 24, выпуск 4, 27–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1208>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 14:16:56

Проблема сопряженного вхождения в циклическую подгруппу в группах с условием $C(3)-T(6)$

© 2012 г. Н. В. Безверхний

Построен алгоритм, решающий проблему сопряженного вхождения в циклическую подгруппу в группах с копредставлением $G = (X; R)$, удовлетворяющим условиям $C(3)-T(6)$. Применяется метод диаграмм.

1. Введение

Наша цель состоит в доказательстве существования алгоритма, выясняющего для любых слов v, w в групповом алфавите X группы G с копредставлением $(X; R)$, удовлетворяющим условиям $C(3)-T(6)$, существует ли такое целое число n , что слова w^n и v сопряжены в группе G . При наличии такого алгоритма говорят, что в группе G разрешима проблема сопряженного вхождения в циклическую подгруппу.

Будем считать, что копредставление $G = (X; R)$ обладает следующими свойствами: $|X| < \infty$, $|R| < \infty$, X содержит инверсии всех своих элементов, множество R определяющих соотношений симметризовано: содержит инверсии и все циклические перестановки своих элементов.

Определение 1. Обозначим через $F = F(X)$ свободную группу с базисом X . Непустое общее начало двух различных определяющих соотношений называется куском. Группа G с копредставлением $(X; R)$ удовлетворяет условию $C(p)$, если ни одно из слов множества R не представимо в виде произведения менее чем p кусков. Группа G удовлетворяет условию $T(q)$, если для любого набора слов $r_1, \dots, r_t$ из R , $2 < t < q$, таких, что соседние элементы в последовательности $r_1, r_2, \dots, r_i, r_{i+1}, \dots, r_t, r_1$, не являются взаимно обратными в $F(X)$, по крайней мере одно из произведений $r_1 r_2, \dots, r_t r_1$ приведено в $F(X)$.

В [1–3] дано описание элементов бесконечного порядка в группах с условиями $C(6)$, $C(4)-T(4)$, $C(3)-T(6)$. Именно, строится алгоритм, который для данного представителя w элемента g бесконечного порядка формирует приведенное в определенном ниже смысле слово w_0 , сопряженное с w , любая степень которого тоже является приведенным словом. Слово w_0 мы называем нормальной формой элемента g с представителем w . Данный алгоритм вычисляет и сопрягающий элемент z : $w = z^{-1} w_0 z$.

Класс групп с условиями $C(3)-T(6)$ отличается от двух названных слабостью условия $C(3)$ и спецификой условия $T(q)$ (здесь $q = 6$). Тем не менее, работа в этом классе сильно упрощается благодаря следующему элементарно доказываемому утверждению (см. [4]).

Свойство копредставлений с условием $T(q)$ при $q > 4$. Если группа G обладает копредставлением $(X; R)$ с условием $T(q)$ при $q > 4$, то длина любого куска равна единице.

Графическое равенство слов u, v обозначим $u \equiv v$. Предположим, что $r_1 \equiv abr'_1$, $r_2 \equiv abr'_2$ — различные определяющие соотношения, где a, b, r'_1, r'_2 — непустые слова в алфавите X .

Рассмотрим слова из R , обратные к r_1, r_2 , и их циклические перестановки $u_1 \equiv br'_1a$, $u_2 \equiv a^{-1}(r'_2)^{-1}b^{-1}$, $u_3 \equiv br'_1a$, $u_4 \equiv a^{-1}(r'_2)^{-1}b^{-1}$. Последовательность u_1, u_2, u_3, u_4 , u_1 противоречит условию $T(6)$. Значит, общее начало ab двух различных определяющих соотношений из R имеет единичную длину.

Понятия области, карты, дуальной карты, диаграммы, кольцевой диаграммы, граничного цикла области D (∂D) и граничного цикла связной односвязной диаграммы M (∂M), граничной метки $\varphi(p)$ пути p будем считать известными [5]. Кроме того, считаем, что граничная метка области читается по часовой стрелке, граничная метка связной односвязной диаграммы читается против часовой стрелки, внешняя граница кольцевой диаграммы ориентирована против часовой стрелки, а внутренняя граница кольцевой диаграммы ориентирована по часовой стрелке.

Подпуты

$$\partial D \cap \partial M = p$$

в граничных циклах области D и диаграммы M , либо в граничных циклах двух областей, называется последовательной частью границы как области D , так и карты M , или двух областей, соответственно [5].

Граничной вершиной в карте M называется любая вершина, принадлежащая граничному циклу карты M . Вершины, не являющиеся граничными, называются внутренними. Внутренним ребром в карте будем считать общую часть граничных циклов двух областей, гомеоморфную отрезку и являющуюся последовательной частью границы обеих областей. Область D называется граничной в карте M , если в ее граничном цикле ∂D есть граничные вершины карты M , то есть $\partial D \cap \partial M \neq \emptyset$. Граничные ребра диаграммы M взаимно однозначно сопоставим множеству букв в слове $\varphi(\partial M)$.

Определение 2. Пара областей (D_1, D_2) с общим ребром e в диаграмме M называется сократимой, если граничная метка односвязной поддиаграммы $D_1 \cup D_2$ равна единице в свободной группе $F(X)$. Если в диаграмме M нет сократимых пар областей, то диаграмма M называется приведенной. Заметим, что можно определить сократимую пару и в случае многосвязной диаграммы $D_1 \cup D_2$, см. [5].

Очевидно, что в приведенной диаграмме метка внутреннего ребра всегда является куском, а в $C(3)$ – $T(6)$ -диаграмме — буквой.

Скажем несколько слов о геометрической интерпретации условий малого сокращения $C(3)$ и $T(6)$. Рассмотрим произвольную группу $G = (X; R)$ с копредставлением, удовлетворяющим условиям $C(3)$ – $T(6)$. Пусть M — приведенная диаграмма над группой G с данным копредставлением. Тогда условие $C(3)$ означает, что если область $D \subset M$ не имеет ребер на границе ∂M диаграммы M , то степень области $D : d(D)$ (число ребер в ее граничном цикле ∂D) не может быть меньше 3. Число внутренних ребер области D обозначим через $i(D)$.

Условие $T(6)$ означает, что степень $d(v)$ (число инцидентных ей ребер) любой внутренней вершины v диаграммы M не может быть меньше 6.

Циклические перестановки слова w обозначим w^* . Символом $|w|$ обозначим длину слова w .

2. Понятия R - и $\bar{R}$ -сокращений и основные теоремы

Определение 3. Рассмотрим диаграмму M над $C(3)$ – $T(6)$ -группой. Область $D \subset M$ назовем дэновской, если

- (1) $\partial D \cap \partial M$ — последовательная часть границы ∂M , то есть $\partial D \cap \partial M = p$ — подпуть в граничных циклах области D и диаграммы M (см. [5]);
- (2) $i(D) \in \{0, 1\}$.

Понятие дэновской области аналогично определяется и для карты M , в которой любая внутренняя область имеет не менее трех ребер и любое внутреннее ребро имеет степень не менее 6.

Определение 4. Будем говорить, что в слове w есть R -сокращение, если существует элемент $r \in R$, такой, что

- (1) $r \equiv r_1 r_2$;
- (2) $w \equiv w_1 w_2 w_3$;
- (3) $r_1 \equiv w_2$;
- (4) слово r_2 либо пусто, либо является куском;
- (5) слова $w_1 r_2^{-1}, r_2^{-1} w_3$ несократимы в свободной группе;
- (6) в случае замены слова w равным ему в группе G словом $w_1 r_2^{-1} w_3$ будем говорить, что в w выполнено R -сокращение;
- (7) R -сокращение в слове w , являющемся степенью некоторого слова v : $w = v^s$, называется длинным, если $|w_2| \geq |v|$ для w_2 из п. 2 определения 4; если же $|w_2| < |v|$, то R -сокращение называется коротким.

Если в любой циклической перестановке слова w нет R -сокращений, то слово w называется циклически R -несократимым.

Определение 5. Полосой в диаграмме M над $C(3)$ – $T(6)$ -группой называется поддиаграмма

$$\Pi = \bigcup_{i=1}^k D_i$$

со следующими свойствами:

- (1) $\partial D_i \cap \partial M = p$ — последовательная часть границы ∂M ;
- (2) $\partial \Pi \cap \partial M$ — последовательная часть границы ∂M ;
- (3) при $k = 3$

$$i(D_1) = i(D_2) = i(D_3) = 2,$$

причем соседние области имеют общее ребро, а все три области полосы имеют общую вершину; при $k > 3, k = 2l + 1$

$$\begin{aligned} i(D_1) &= i(D_2) = i(D_{2l}) = i(D_{2l+1}) = 2, \\ i(D_3) &= i(D_5) = \dots = i(D_{2l-3}) = i(D_{2l-1}) = 3, \\ i(D_4) &= i(D_6) = i(D_{2l-4}) = i(D_{2l-2}) = 2; \end{aligned}$$

(4) $\partial D_i \cap \partial D_{i+1}$ — ребро, $i = 1, \dots, k - 1$.

Понятие полосы аналогично определяется и для карты M .

Замечание 1. Любая полоса в диаграмме M с циклически несократимой в свободной группе, циклически R -несократимой граничной меткой $\varphi(\partial M)$ является приведенной диаграммой.

Действительно, предположив, что две соседние области в полосе образуют сократимую пару, приходим к выводу о свободной сократимости слова $\varphi(\partial M)$, либо к выводу о том, что в слове $\varphi(\partial M)$ есть R -сокращение. Достаточно рассмотреть два случая:

(1) сократимые области D_1, D_2 имеют внутренние степени $i(D_1) = 2, i(D_2) = 2$;

(2) $i(D_1) = 2, i(D_2) = 3$.

В первом случае из сократимости пары (D_1, D_2) следует свободная сократимость слова $\varphi(\partial M)$. Во втором случае рассмотрим три соседние области в полосе: D_1, D_2, D_3 . Ясно, что

$$i(D_3) = i(D_1) = 2, \quad i(D_2) = 3.$$

Из сократимости пары D_1, D_2 и из того, что кусок в $T(6)$ -группе имеет длину 1, следует, что в слове $\varphi(\partial M)$ есть R -сокращение: метка ребра $\partial D_2 \cap \partial D_3$ является подсловом в метке пути $\partial D_1 \cap \partial M$, и область D_3 можно наклеить по указанному ребру на границу ∂M , в результате чего будет получена область, реализующая R -сокращение в граничной метке диаграммы M .

Понятие $\bar{R}$ -сокращения можно определять в рассматриваемом классе групп аналогично тому, как это сделано для R -сокращения (см. также [1, 2] об $\bar{R}$ -сокращении для групп с условием $C(6)$ и $C(4)-T(4)$). Но из-за громоздкости такого определения в группах, удовлетворяющих условию $T(6)$, будем пользоваться другим, эквивалентным определением.

Определение 6. Пусть Π — полоса в диаграмме M . Граничным словом области $D_i \subset \Pi$ называется метка пути $\partial D_i \cap \partial M$, прочитанная в соответствии с ориентацией области D_i . Граничным словом полосы Π называется метка пути $\partial \Pi \cap \partial M$, прочитанная в направлении, противоположном ориентации границы ∂M . Аналогично определяется граничное слово дэновской области.

Дадим понятиям R - и $\bar{R}$ -сокращений определения, использующие только язык диаграмм.

Определение 7. Будем говорить, что в слове v есть R -сокращение, если существует связанная односвязная диаграмма M над копредставлением $G = (X; R)$, в которой существует дэновская область, граничное слово которой является подсловом в v . В слове v есть $\bar{R}$ -сокращение, если существует связанная односвязная диаграмма M над копредставлением $G = (X; R)$, в которой существует полоса Π , граничное слово которой является подсловом в v .

Приведенное ниже утверждение является следствием этого определения.

Следствие 1. Для любого циклически несократимого в $F(X)$ слова w , не равного единице в группе G , существует циклически $R, \bar{R}$ -несократимое слово w_0 , сопряженное с w в G .

Действительно, из определения 7 следует, что в результате $R, \bar{R}$ -сокращения длина слова строго уменьшается. Записав произвольное слово w на окружности S и выполняя в его циклических перестановках $R, \bar{R}$ -сокращения, получим либо пустое слово, что невозможно, поскольку $w \neq 1$ в G , либо непустое слово w_0 , в циклических перестановках которого нет $R, \bar{R}$ -сокращений.

Понятия дэновской области и полосы были введены в [6] на языке групповых диаграмм. Независимо аналогичные понятия использовались в [4] при исследовании кусочно-евклидовых комплексов. Работая с диаграммами, мы будем придерживаться терминологии, использованной в [5, 6].

В [3] доказаны две основные теоремы. В первой из них утверждается, что существует алгоритм, строящий из любого циклически $R, \bar{R}$ -несократимого слова w сопряженное его степени слово, любая степень которого R -несократима. Во второй доказано существование алгоритма, строящего из циклически $R, \bar{R}$ -несократимого слова w , любая степень которого R -несократима, сопряженное ему в группе G слово w_0 , любая степень которого $R, \bar{R}$ -несократима. При этом из доказательства обеих теорем следует, что всегда возможно построение сопрягающего слова z : $w = zw_0z^{-1}$.

Определение 8. Слово w_0 , сопряженное слову w в группе G и обладающее свойством $R, \bar{R}$ -несократимости всех своих степеней, называется нормальной формой слова w .

Теорема 1 ([3]). Пусть слово w представляет в группе $G = (X; R)$, удовлетворяющей условиям $C(3)-T(6)$, элемент бесконечного порядка, причем само слово w циклически несократимо в свободной группе и циклически $R, \bar{R}$ -несократимо. Пусть

$$m = \max_{r \in R} |r|.$$

- (1) Если для некоторого $n' \in \mathbb{N}$ слово $w^{n'}$ R -сократимо, то существует $n \in \mathbb{N}$, $n \leq m$, для которого слово w^n R -сократимо.
- (2) Если число m' удовлетворяет неравенствам $1 < m' \leq m$ и для некоторой циклической перестановки w^* слово $(w^*)^{m'}$ R -сократимо, причем ни при каком $m'' < m'$ в слове $(w^*)^{m''}$ нет R -сокращений, то в результате выполнения этого сокращения получается слово $w_0 = (w^*)^{m'}$ (равенство в группе G), любая степень которого R -несократима.

Теорема 2 ([3]). Если слово w представляет в группе $G = (X; R)$, удовлетворяющей условиям $C(3)-T(6)$, элемент бесконечного порядка, причем само слово w циклически $\bar{R}$ -несократимо, а все его степени w^n R -несократимы, то если слово w^2 $\bar{R}$ -несократимо, то любая степень w^n $\bar{R}$ -несократима; если же в слове w^2 есть $\bar{R}$ -сокращение, то либо

- (1) все степени слова $w_1 = w^2$ (равенство в группе G), полученного из w^2 в результате этого $\bar{R}$ -сокращения, $R, \bar{R}$ -несократимы; либо
- (2) существует конечный алгоритм, строящий последовательность сопряженных в группе G слов $w, w_1, \dots, w_t$, в которой $t < |w|$, и слово w_t $R, \bar{R}$ -несократимо вместе со своими степенями.

В настоящей работе доказывается следующая теорема.

Теорема 3. В группе с копредставлением $(X; R)$, удовлетворяющим условиям $C(3)$ – $T(6)$, разрешима проблема сопряженного вхождения в циклическую подгруппу.

Для решения данной проблемы для произвольных слов $\bar{v}$, $\bar{w}$ в алфавите $X = X^{-1}$ рассмотрим представители v , w , все степени которых $\bar{R}$, R -несократимы. В соответствии с теоремами 1 и 2, построение таких представителей всегда возможно, и они сопряжены с некоторыми степенями (показатели которых не превосходят длины m самого длинного определяющего соотношения из R) исходных слов $\bar{v}$, $\bar{w}$.

Итак, если $\bar{v} \sim (\bar{w})^n$, и v_0, w , где $v_0 \sim \bar{v}$, $w \sim (\bar{w})^k$, $k \leq m$, — циклически несократимые представители слов $\bar{v}$, $\bar{w}$, и степени слова w несократимы, то

$$v = v_0^k \sim w^n.$$

Ниже будет доказано, что $|n|$ не превосходит линейной функции длины слова $v = v_0^k$. Значит, для проверки сопряженности слов $\bar{v}$, $\bar{w}^n$ при некотором неизвестном n достаточно проверить только те значения n , которые не превосходят по модулю вышеупомянутой линейной функции длины слова $v = v_0^k$.

Для получения верхней оценки для числа $|n|$, для которого $v \sim w^n$, мы рассмотрим диаграмму M сопряженности слов v , w^n , $\partial M = \sigma \cup \tau$. Будет доказано, что длины граничных меток $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ диаграммы M удовлетворяют неравенствам

$$|\varphi(\sigma)| \leq 3|r_0||\varphi(\tau)|, \quad |\varphi(\tau)| \leq 3|r_0||\varphi(\sigma)|.$$

Здесь r_0 — самое длинное определяющее соотношение из множества R . Заметим, во-первых, что в оценке величины $|n|$ показатель $k \leq m$ можно принять равным его наибольшему возможному значению, то есть m . Во-вторых, очевидно, что при выполнении указанных неравенств для проверки сопряженности слов $\bar{v}$ и $\bar{w}^n$ достаточно конечное число раз применить алгоритм, построенный в [5] и выявляющий сопряженность двух данных слов в $C(3)$ – $T(6)$ -группе.

Все кольцевые диаграммы мы разобьем на три класса: простые, n -слойные и C - n -слойные. Для каждого класса будет доказано выполнение выписанных выше неравенств. Для этого нам понадобится предварительное исследование дисковых карт специального вида. Этому посвящен раздел 3.

3. Дисковые карты и их свойства

Определение 9. Связная односвязная карта M называется дисковой, если ее граничный цикл ∂M является простым замкнутым путем (то есть не имеет самопересечений).

Пусть M — дисковая $(6, 3)$ -карта, то есть все внутренние вершины в M имеют степень не меньше 6, а все внутренние области имеют степень не меньше 3. Пусть граничный цикл карты M является объединением двух путей: $\partial M = \sigma \cup \tau$, причем $\sigma \cap \tau = \{A, B\}$ — две вершины. Определим граничные слои K_σ и K_τ карты M как подкарты, состоящие из всех областей, имеющих вершины на σ и τ , соответственно.

В этом разделе считаем, что слои K_σ , K_τ не содержат полос и дэновских областей карты M . Докажем, что при выполнении перечисленных условий граничные слои K_σ и K_τ карты M содержат равное число областей: $|K_\sigma| = |K_\tau|$.

Нам понадобятся понятия полосы и дэновской области в диаграмме над группой с условиями $C(6)-T(3)$ (см. [1, 7]). Заметим, что, как показано в [5], такая диаграмма является $(3, 6)$ -картой.

Понятие дэновской области в $(3, 6)$ -карте отличается от введенного выше понятия дэновской области в $(6, 3)$ -карте лишь тем, что в отличие от $(6, 3)$ -карт, в $(3, 6)$ -карте такая область имеет не строго одно, а не более двух внутренних ребер.

Понятие полосы в $(3, 6)$ -карте также отличается от введенного для $(6, 3)$ -карт понятия полосы только числом внутренних ребер в составляющих полосу областях. Итак, в $(3, 6)$ -карте полоса состоит не менее, чем из двух областей, причем для концевых областей полосы (понятие концевой области полосы введено в [3], это область в полосе, имеющая общее ребро только с одной областью этой полосы, таких областей в полосе ровно две) число внутренних ребер равно трем, а для всех остальных областей — четырем.

Если в карте M определены слои K_σ , K_τ , то для дуальной карты M^* слои K_{σ^*} , K_{τ^*} определим следующим образом. Область D_i^* содержится в K_{σ^*} (K_{τ^*}), если хотя бы одна ее вершина содержится в некоторой области из K_σ (K_τ).

Докажем следующую лемму о сокращениях в граничных слоях.

Лемма 1. Пусть M — дисковая $(6, 3)$ -карта, причем $\partial M = \sigma \cup \tau$. Если в слоях K_σ , K_τ нет полос и дэновских областей, то в дуальной карте M^* , $\partial M^* = \sigma^* \cup \tau^*$, которая является $[3, 6]$ -картой, слои K_{σ^*} , K_{τ^*} тоже не содержат полос и дэновских областей.

Доказательство. Рассмотрим карту M^* , дуальную к M . Карта M является $(6, 3)$ -картой, поэтому (см. [5]) M^* является $[3, 6]$ -картой. Докажем, что слои K_{σ^*} , K_{τ^*} не содержат дэновских областей и полос.

Предположим, что слой K_{σ^*} содержит дэновскую область D^* внутренней степени 1 или 2. Из выполнения для карты M^* условий $[3, 6]$ следует, что дэновская область имеет не менее четырех ребер на границе карты. Из построения дуальной карты следует, что трем вершинам, разделяющим ребра области D^* на ∂M^* , соответствуют три граничных области в карте M , имеющих одну общую вершину в карте M , которая соответствует области D^* . Таким образом, эти области образуют полосу из трех областей в слое K_σ карты M , что невозможно.

Предположим, что слой K_{σ^*} содержит полосу Π^* . Концевые области в Π^* имеют по три внутренних ребра в карте M^* . Значит, по определению $[3, 6]$ -карты, эти области имеют не менее трех граничных ребер каждая, и эти ребра разделены не менее, чем двумя вершинами в каждой области. В карте M этим вершинам соответствуют пары областей внутренней степени 2, причем для каждой пары есть общая вершина в M , соответствующая концевой области в карте M^* . Если полоса Π^* содержит только концевые области, то в карте M есть полоса из трех областей. Если же $|\Pi^*| > 2$, то в карте M в слое K_σ есть полоса из более, чем трех областей, что невозможно.

В [3] изучено строение дисковых диаграмм над $C(6)-T(3)$ -группами и $[3, 6]$ -карт. (Диаграмма над $C(6)-T(3)$ -группой является $[3, 6]$ -картой.) Доказано, что если в дисковой диаграмме ($[3, 6]$ -карте) M граничные слои K_σ , K_τ не содержат полос и дэновских областей, то $|K_\sigma| = |K_\tau|$. Поскольку в наших рассуждениях карта M^* является $[3, 6]$ -картой, верно следствие 2.

Следствие 2. Слои K_{σ^*} , K_{τ^*} карты M^* , дуальной к карте M из леммы 1, не содержат полос и дэновских областей, причем справедливо равенство

$$|K_{\sigma^*}| = |K_{\tau^*}|.$$

Определение 10. Пару областей в слое K_σ (K_τ) карты M внутренней степени i , имеющих общее внутреннее ребро, будем называть i -парой. При различных i и j , i -пару и j -пару будем называть разноименными. Область внутренней степени i будем называть i -областью.

Определение 11. Область $D \subset M$ называется простой, если множество $\partial D \cap \partial M$ связно и является последовательной частью границы области D .

Связная односвязная карта M с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$ называется простым диском, если $\sigma \cap \tau = \{A, B\}$ — две вершины, и все области в M простые.

Определение 12. Связная односвязная подкарта M_1 карты M называется островом в M , если $M = M_1 \cup M_2 \cup p$, где p — простой подпуть в ∂M , возможно, нулевой длины, не имеющий ребер в граничных циклах областей карт M_1 и M_2 и имеющий по одной вершине в циклах ∂M_1 и в ∂M_2 , $|M_1| > 0$, $|M_2| > 0$. Будем говорить, что M_1 — остров на участке s границы карты M , если граничный цикл ∂M_1 является подпутем в s .

Определение 13. Связная односвязная подкарта M_1 карты M называется полуостровом в M , если существует область $D_0 \subset M$, $M = M_0 \cup D_0 \cup M_1$, $|M_1| > 0$, $|M_2| > 0$, причем карта $M_1 \cup M_0$ не является связной. Будем говорить, что M_1 — полуостров на участке s границы карты M , если граничный цикл ∂M_1 является подпутем в s .

Справедлива следующая лемма о полосах.

Лемма 2 ([6]). Пусть M — связная односвязная $(6, 3)$ -карта, не содержащая дэновских областей, $|M| > 0$. Тогда в ней есть две полосы, не имеющие общих областей.

Докажем следующую лемму об островах и полуостровах.

Лемма 3. Пусть M — связная односвязная или кольцевая карта. Пусть s — подпуть в граничном цикле ∂M для односвязной карты M или в одном из граничных циклов σ , τ для кольцевой карты M с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$. Тогда, если в карте M нет полос Π и дэновских областей D , для которых $\partial \Pi \cap \partial M$ — подпуть в s , $\partial D \cap \partial M$ — подпуть в s , то в M нет островов и полуостровов на участке границы s .

Доказательство. Вначале докажем, что на участке s нет островов. Предположим противное: пусть подкарта M_0 — остров в M , $M = M_0 \cup p \cap M_1$, и p — простой путь с концами A, B , $A \in \partial M_0$, $B \in \partial M_1$.

В подкарте M_0 может быть одна дэновская область D_0 или одна полоса Π , если вершина B является внутренней вершиной пути $\partial D_0 \cap \partial M_0$, или пути $\partial \Pi \cap \partial M_0$, соответственно. Действительно, в указанной ситуации $\partial D_0 \cap \partial M_0$ и $\partial \Pi \cap \partial M_0$ не являются последовательными частями границы карты M , что требуется в определениях полосы и дэновской области, то есть D_0 и Π не являются дэновской областью и полосой, соответственно, в карте M на участке s .

Если в M_0 есть полоса Π с указанным свойством, то, в соответствии с леммой о полосах из [6], в M_0 должна существовать еще одна полоса Π_1 , что невозможно, поскольку такая полоса уже была бы полосой и в карте M на участке s . Значит, в M_0 есть дэновская область D_0 , такая, что $i(D_0) = 1$. Единственное внутреннее ребро области D_0 является общим для нее и некоторой области D_1 , причем $\partial D_1 \cap \partial M_0$ есть несвязное множество, так как в противном случае область D_1 является дэновской в карте M на участке s , что невозможно.

Область D_1 , для которой $\partial D_1 \cap \partial M_0$ — несвязное множество, называется неправильной в карте M_0 . В подкарте M_0 могут быть и другие неправильные области. Пусть $D_1, \dots, D_s$

— все такие области, причем $\partial D_j \cap \partial D_{j+1}$ — ребро с концами на ∂M_0 , $j = 0, \dots, s-1$. Будем считать, что в карте

$$N = M_0 \setminus \{D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_{s-1}\}$$

область D_s имеет не менее двух внутренних ребер. Значит, D_s — не дэновская в карте N . Очевидно, в N нет дэновских областей. По лемме о полосах из [6], в карте N существуют две полосы. Очевидно, одна из них является полосой и в карте M на участке s , что невозможно. Значит, в M нет островов.

Пусть теперь в M есть полуостров M_0 такой, что $M = M_0 \cup D_0 \cup M_1$. Если $\partial D_0 \cap \partial M_0$ — одно ребро, то, повторяя рассуждения первой части доказательства, приходим к противоречию с условием леммы.

Пусть $\partial D_0 \cap \partial M_0$ суть не менее двух ребер. Значит, область D_0 — не дэновская в карте $M_2 = D_0 \cup M_0$. Очевидно, в этой карте нет дэновских областей. По лемме о полосах, в карте M_2 должны существовать две полосы, не имеющие общих областей. Одна из них может содержать область D_0 и не являться поэтому полосой в карте M . Но вторая полоса в M_2 обязательно будет являться полосой и в карте M на участке s , что противоречит условию леммы. Значит, в M нет и полуостровов.

Докажем следующую лемму о строении граничных слоев простого диска.

Лемма 4. Пусть M есть простой диск. Если M есть $(6, 3)$ -карта и граничные слои K_σ , K_τ не содержат полос и дэновских областей, то справедливы следующие утверждения:

- (1) для каждой из вершин $\{A, B\}$ в карте M существует единственная область D_A , D_B , соответственно, такая, что $A \in \partial D_A$, $B \in \partial D_B$;
- (2) $i(D_A) = i(D_B) = 2$;
- (3) слои K_σ , K_τ содержат только области внутренней степени 2 и 3, причем в каждой из подкарт $K_\sigma \setminus (D_B \cup D_A)$, $K_\tau \setminus (D_B \cup D_A)$ областей первого типа на две больше, чем второго;
- (4) в слоях K_σ , K_τ могут встречаться только 2-пары и 3-пары и нет 2-троек, 3-троек, и т. д., причем в каждом из слоев число 2-пар на единицу больше, чем 3-пар, а разноименные пары чередуются в каждом из слоев K_σ , K_τ ; то же верно и для областей: в K_σ , K_τ могут встречаться только 2- и 3-области.

Доказательство. Обозначим через n_i^σ , n_i^τ количества областей с i внутренними ребрами в слоях K_σ , K_τ соответственно. Пусть $n_{\geq 4}^\sigma$ ($n_{\geq 4}^\tau$) — число областей $D \in K_\sigma$ (или K_τ), для которых $i(D) \geq 4$. Так как, по условию, в слоях K_σ , K_τ нет дэновских областей и карта M является простым диском, $n_1^\sigma = n_1^\tau = 0$.

1. Предположим, что каждая из вершин A, B принадлежит границам как минимум двух областей. Рассмотрим функции

$$f_\sigma(n_2^\sigma, n_3^\sigma, n_4^\sigma) = \frac{n_2^\sigma - n_3^\sigma - 3n_{\geq 4}^\sigma}{2},$$

$$f_\tau(n_2^\tau, n_3^\tau, n_4^\tau) = \frac{n_2^\tau - n_3^\tau - 3n_{\geq 4}^\tau}{2}.$$

Очевидны неравенства

$$\sum_{D \subset \sigma} \left(\frac{5}{2} - i(D) \right) \leq f_{\sigma}(n_2^{\sigma}, n_3^{\sigma}, n_4^{\sigma}) \leq f_{\sigma}(n_2^{\sigma}, n_3^{\sigma}, 0),$$

$$\sum_{D \subset \tau} \left(\frac{5}{2} - i(D) \right) \leq f_{\tau}(n_2^{\tau}, n_3^{\tau}, n_4^{\tau}) \leq f_{\tau}(n_2^{\tau}, n_3^{\tau}, 0).$$

В соответствии с формулой кривизны (см. [5]), для карты M должно выполняться неравенство

$$\sum_M^* \left(\frac{5}{2} - i(D) \right) \geq 3, \quad (1)$$

где знак $*$ означает, что суммирование распространяется только на граничные области карты M . Для этого необходимо, чтобы выполнялось хотя бы одно из неравенств

$$\sum_{K_{\sigma}}^* \left(\frac{5}{2} - i(D) \right) \geq \frac{3}{2},$$

$$\sum_{K_{\tau}}^* \left(\frac{5}{2} - i(D) \right) \geq \frac{3}{2},$$

которые выполняются только если

$$f_{\sigma}(n_2^{\sigma}, n_3^{\sigma}, 0) \geq \frac{3}{2}, \quad f_{\tau}(n_2^{\tau}, n_3^{\tau}, 0) \geq \frac{3}{2},$$

то есть

$$\frac{n_2^{\sigma} - n_3^{\sigma}}{2} \geq \frac{3}{2}, \quad \frac{n_2^{\tau} - n_3^{\tau}}{2} \geq \frac{3}{2},$$

$$n_2^{\sigma} \geq n_3^{\sigma} + 3, \quad n_2^{\tau} \geq n_3^{\tau} + 3. \quad (2)$$

Предложение 1. При выполнении неравенства

$$\sum_{K_{\sigma}} \left(\frac{5}{2} - i(D) \right) \geq \frac{3}{2},$$

в слое K_{σ} можно выделить связную подкарту, в которой есть только 3- и 2-области, причем 3-областей не менее, чем на три меньше, чем 2-областей.

Доказательство. Если в K_{σ} нет таких областей D , что $i(D) > 3$, то предложение 1 следует из (2).

При наличии в K_{σ} таких областей D , что $i(D) > 3$, рассмотрим неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{D \subset K_{\sigma}} \left(\frac{5}{2} - i(D) \right) &= \sum_{i(D)=2} \left(\frac{5}{2} - i(D) \right) + \sum_{i(D)=3} \left(\frac{5}{2} - i(D) \right) + \sum_{i(D)=4} \left(\frac{5}{2} - i(D) \right) + \dots \\ &= \sum_{i(D)=2} \frac{1}{2} - \sum_{i(D)=3} \frac{1}{2} - \sum_{i(D)=4} \frac{3}{2} - \dots \\ &= \frac{1}{2} (n_2^{\sigma} - n_3^{\sigma} - 3n_4^{\sigma} - 5n_5^{\sigma} - \dots) \geq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Умножив последнее неравенство на 2, получим, что

$$n_2^\sigma = 3 + n_3^\sigma + 3n_4^\sigma + 5n_5^\sigma + \dots \geq 3 + n_3^\sigma + 3n_{\geq 4}^\sigma.$$

Представим слой K_σ в виде объединения подкарт, следующих в K_σ в указанной последовательности:

$$K_\sigma = L_1 \cup D_{\geq 4}^1 \cup L_2 \cup D_{\geq 4}^2 \cup L_3 \cup D_{\geq 4}^3 \cup \dots \cup D_{\geq 4}^m \cup L_{m+1},$$

где $i(D_{\geq 4}^j) \geq 4$ при всех j , а в подкартах $L_1, \dots, L_m$ таких областей нет. При этом мы не исключаем возможность равенства нулю некоторых из чисел $|L_i|$.

Обозначим количества областей в L_i с двумя и тремя внутренними ребрами через n_2^i , n_3^i . Предположим, что при всех i выполнено неравенство

$$n_2^i \leq n_3^i + 2.$$

Просуммируем эти неравенства по всем $i = 1, \dots, m + 1$. Получим, что

$$n_2^\sigma \leq 2(m + 1) + n_3^\sigma,$$

что противоречит неравенству

$$n_2^\sigma \geq 3 + 3m + n_3^\sigma.$$

Значит, при некотором j выполняется неравенство

$$n_2^j \geq 3 + n_3^j.$$

Предложение 1 доказано.

Предложение 2. Если связная подкарта L в слое K_σ содержит только области с двумя и тремя внутренними ребрами и

$$n_2^L \geq n_3^L + 3,$$

то в L есть полоса.

Доказательство. Сопоставим последовательности $\{D_1, D_2, \dots, D_{2n+3}\}$ областей этой подкарты числовую последовательность $\{x_k\}$, $k \in \{0, 1, \dots, 2n + 3\}$, следующим образом:

$$x_0 = 0, \quad x_k = 2 \sum_{l=1}^k \left(\frac{5}{2} - i(D_l) \right), \quad k \in \{1, 2, \dots, 2n + 3\}.$$

Очевидно, x_k принимают только целые значения. Пусть $x_{k_1} = 3$ и $x_k < 3$ при всех $k < k_1$. Такое k_1 существует, так как $x_{2n+3} = 3$, и мы выбираем в качестве k_1 минимальное среди всех k : $x_k = 3$. Пусть, кроме того, k_0 — ближайший к k_1 слева номер, для которого $x_{k_0} = 0$.

Заметим, что любая подпоследовательность последовательности $\{x_k\}$, начинающаяся нулем и оканчивающаяся тройкой, между которыми — только единицы и двойки, соответствует полосе в слое K_σ . Если такая подпоследовательность имеет длину 4, то это 0, 1, 2, 3, и ей соответствует полоса из трех областей в K_σ . Если длина подпоследовательности больше четырех, то это 0, 1, 2, ..., 1, 2, 3, и ей соответствует полоса из более чем трех областей.

Выбор номеров k_0, k_1 гарантирует то, что в подпоследовательности $\{x_{k_0}, \dots, x_{k_1}\}$ не встречаются числа, большие трех. Значит, она имеет один из двух рассмотренных выше видов, то есть соответствует полосе в слое K_σ .

Продолжим доказательство леммы 4. Из неравенств (2) и предложений 1, 2 следует, что сделанные выше предположения о наличии не менее двух областей для каждой из вершин A, B , содержащих их в своих границах, приводят к наличию полосы в одном из слоев K_σ, K_τ , что невозможно по условию леммы.

Заметим, что при $n_{\geq 4}^\sigma \neq 0, n_{\geq 4}^\tau \neq 0$ для выполнения неравенства (1) необходимо выполнение неравенств (2), что, как мы видели, приводит к наличию полосы в слоях карты M . Итак,

$$n_{\geq 4}^\sigma = 0, \quad n_{\geq 4}^\tau = 0.$$

2. Предположим, что существует лишь одна область D_B , границе которой принадлежит вершина B , но существуют хотя бы две области D_A^1, D_A^2 , границам которых принадлежит вершина A . При условии, что $i(D_B) = 2$, справедливо неравенство

$$\sum_{M \setminus D_B}^* \left(\frac{5}{2} - i(D) \right) \geq \frac{5}{2}.$$

Значит, либо

$$\sum_{D \subset K_\sigma \setminus D_B} \left(\frac{5}{2} - i(D) \right) \geq \frac{3}{2},$$

либо

$$\sum_{D \subset K_\tau \setminus D_B} \left(\frac{5}{2} - i(D) \right) \geq \frac{3}{2}.$$

В обоих случаях, повторяя рассуждения из п. 1 доказательства данной леммы, приходим к противоречию с условием леммы. Также в силе остается и замечание об областях с числом внутренних ребер, большим трех: $n_{\geq 4}^\sigma = 0, n_{\geq 4}^\tau = 0$.

3. Пусть существуют области D_A, D_B такие, что

$$i(D_A) = i(D_B) = 2,$$

и вершина A принадлежит границе только области D_A , а вершина B принадлежит границе только области D_B карты M . В этом случае не возникает никаких противоречий с условием леммы, и без труда строится пример карты M , удовлетворяющей поставленным в п. 3 условиям.

Если $i(D_A) \geq 3$, то при $i(D_B) = 2$ суммарный вклад этих областей в неравенство формулы кривизны меньше или равен нулю, и тогда верно хотя бы одно из неравенств

$$\begin{aligned} \sum_{D \subset K_\sigma \setminus (D_A \cup D_B)} \left(\frac{5}{2} - i(D) \right) &\geq \frac{3}{2}, \\ \sum_{D \subset K_\tau \setminus (D_A \cup D_B)} \left(\frac{5}{2} - i(D) \right) &\geq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Как в п. 2, получаем противоречие с предположением об отсутствии полос в слоях карты M . Аналогичное рассуждение применимо к ситуации, когда $i(D_A), i(D_B) \geq 3$.

Тем самым доказаны утверждения 1, 2 леммы 4.

4. Докажем утверждения 3 и 4 леммы. Проведя рассуждения с последовательностью целых чисел, как в доказательстве предложения 2, приходим к выводу, что в слоях K_σ , K_τ нет 3-троек, а могут существовать только 2-пары и 3-пары.

Из формулы кривизны для карты M следует, что

$$\sum_{D \subset K_\sigma \setminus (D_A \cup D_B)} \left(\frac{5}{2} - i(D) \right) \geq 1,$$

$$\sum_{D \subset K_\tau \setminus (D_A \cup D_B)} \left(\frac{5}{2} - i(D) \right) \geq 1.$$

Как и в п. 1, доказываются неравенства

$$n_2^\sigma \geq n_3^\sigma + 2, \quad n_2^\tau \geq n_3^\tau + 2.$$

Если хотя бы одно из двух последних неравенств строгое, то в соответствующем слое есть полоса, что невозможно. Значит,

$$n_2^\sigma = n_3^\sigma + 2, \quad n_2^\tau = n_3^\tau + 2.$$

Если $n_{\geq 4}^\sigma > 0$ ($n_{\geq 4}^\tau > 0$), то в слое K_σ (K_τ) существует связная подкарта, в которой выполняется неравенство $n_2^\sigma > n_3^\sigma + 2$ (соответственно $n_2^\tau > n_3^\tau + 2$). Снова в такой подкарте должна быть полоса.

Итак, верны следующие равенства:

$$n_2^\sigma = n_3^\sigma + 2,$$

$$n_2^\tau = n_3^\tau + 2,$$

$$n_{\geq 4}^\sigma = n_{\geq 4}^\tau = 0.$$

Кроме того,

$$\sum_{D \subset K_\sigma \setminus (D_A \cup D_B)} \left(\frac{5}{2} - i(D) \right) = 1,$$

$$\sum_{D \subset K_\tau \setminus (D_A \cup D_B)} \left(\frac{5}{2} - i(D) \right) = 1, \quad (3)$$

так как при выполнении строгого неравенства в соответствующем слое должно выполняться неравенство

$$n_2^\sigma > n_3^\sigma + 2, \quad n_2^\tau > n_3^\tau + 2,$$

что невозможно.

Рассмотрим соотношение между числами 2-пар и 3-пар в слоях карты.

Если в слое K_σ (K_τ) существует единственная 2-пара, то при наличии в том же слое 3-пары между ними количества 2- и 3-областей совпадают, а в двух оставшихся подкартах того же слоя число 2-областей по-прежнему превосходит число 3-областей ровно на две, и поэтому в одной из двух указанных подкарт слоя есть еще одна 2-пара, что невозможно. Значит, при наличии единственной 2-пары в слое число 3-пар в том же слое равно нулю.

Пусть в одном из слоев есть ровно k 2-пар. Значит, в $K_\sigma \setminus (D_A \cup D_B)$ (соответственно, в $K_\tau \setminus (D_A \cup D_B)$) существует связная подкарта из $2n + 2$ областей, в которой n 3-областей и $n + 2$ 2-областей.

Рассмотрим подкарты $L_1, \dots, L_{k+1}$ в $K_\sigma \setminus (D_A \cup D_B)$, не содержащие 2-пар и зануерованные от D_A к D_B . Если некоторая L_i не содержит 3-пар, то в $K_\sigma \setminus (D_A \cup D_B)$ есть полоса. Значит, между любыми двумя 2-парами в слоях K_σ, K_τ есть 3-пара. Если каждая подкарта L_i содержит единственную 3-пару, то выполняются равенства (3). В противном случае равенства (3) не выполняются, что противоречит сделанным выводам о справедливости (3). Таким образом, последнее утверждение 4 леммы доказано.

Лемма 4 доказана.

Докажем лемму о длине граничных слоев дисковой карты.

Лемма 5. Пусть в граничных слоях K_σ, K_τ дисковой $(6, 3)$ -карты M нет полос и дэновских областей. Тогда в карте M число областей с ребрами на σ не превышает числа областей с ребрами на τ , умноженного на 5, и наоборот.

Доказательство. Рассмотрим карту M^* , дуальную для карты M . Она является связной односвязной картой, но не обязана быть дисковой, поскольку слои K_σ и K_τ карты M могут иметь общие области, кроме D_A, D_B . При этом карта M^* , не являясь дисковой, может быть лишь объединением дисковых карт $M_1^*, \dots, M_s^*$, соединенных простыми путями $p_1, \dots, p_{s-1}$. Если каждую подкарту M_i заменить одной вершиной V_i , то в полученной карте M из вершин V_i и простых путей p_j нет вершин степени, большей двух. Это является очевидным следствием приведенных в лемме 3 рассуждений.

Если карта M^* не является дисковой, то только в том случае, когда карта $M \setminus K_\sigma$ является объединением дисковых подкарт. При этом карта M^* является связной картой, состоящей из k дисковых компонент, к которым применимы приведенные ниже рассуждения. Сначала будем предполагать, что карта M^* дисковая.

Рассмотрим внутренние вершины областей слоя K_σ . Каждой из них сопоставим область из K_{σ^*} . Внутренней вершине 2-области соответствует 4-область, внутренней вершине 2-пары соответствует 3-область, а внутренней вершине, общей для обеих областей 3-пары, соответствует 5-область в K_{σ^*} .

Из строения слоя K_σ следует, что слой K_{σ^*} устроен следующим образом. В нем есть только 3-, 4-, 5-области, причем 3-областей на одну больше, чем 5-областей, они чередуются между собой, а между областями этих двух типов могут присутствовать 4-области. Все сказанное верно и для слоя K_{τ^*} . Как уже говорилось, карта M^* является $(3, 6)$ -картой. Для $(3, 6)$ -карт, граничные слои которых имеют описанное выше строение, верно равенство (см. [3])

$$|K_{\sigma^*}| = |K_{\tau^*}|.$$

Значит, в карте M количества внутренних вершин в слоях K_σ, K_τ равны. Поскольку количество внутренних вершин слоя K_σ карты M на две меньше числа областей в K_σ с ребрами на σ (то же верно и для K_τ), то в слоях карты M количества областей с ребрами на границе карты равны.

Если карта M^* распадается на k дисковых компонент $M_1^*, \dots, M_k^*$, то граничные слои этих компонент имеют указанное выше строение в терминах 3-, 4-, 5-областей.

Остается отметить, что внутренние вершины простых путей $\gamma_1^*, \dots, \gamma_k^*$, соединяющих в карте M^* компоненты $M_1^*, \dots, M_k^*$, соответствуют областям карты M , имеющим вершины в граничных циклах σ, τ . Из отсутствия полос в слоях K_σ, K_τ карты M следует, что

число областей с ребрами на σ не превышает числа областей с ребрами на τ , умноженного на 5, и наоборот. Действительно, если ребра на σ и τ считать внутренними ребрами областей, соответствующих вершинам путей $\gamma_1, \dots, \gamma_k$, то выполнение свойств 3, 4 леммы 4 для этих областей не следует из отсутствия полос и дэновских областей в K_σ, K_τ . Причиной этому может послужить наличие областей прямоугольного вида, содержащих ребра как на σ , так и на τ .

Наибольшее возможное значение коэффициента $\alpha = 5$ в неравенстве, связывающем количества областей с ребрами на σ и с ребрами на τ , получаем для последовательности из пяти областей, одна из которых прямоугольного вида, то есть содержит ребра на σ и на τ , а четыре оставшиеся области объединены в пары по разные стороны от прямоугольной области, пересекаются с σ только по вершине, а с τ имеют общие ребра, либо наоборот, но для всех четырех областей одновременно.

4. Кольцевые карты

Как уже говорилось, доказательство теоремы 3 будет проведено для трех типов кольцевых диаграмм: простых, n -слойных и C - n -слойных.

Кольцевая карта M с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$ называется простой, если число $|M|$ областей в M больше нуля, и $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$.

Приведем следствие об отсутствии островов и полуостровов для кольцевых карт.

Следствие 3. *Если в граничных слоях кольцевой карты нет полос и дэновских областей, то в ней нет островов и полуостровов.*

Доказательство повторяет рассуждения, приведенные в доказательстве леммы 3.

Докажем лемму о простых кольцевых картах.

Лемма 6. *Пусть M — простая кольцевая $(6, 3)$ -карта с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$, не содержащая полос и дэновских областей. Тогда число областей в M с ребрами на σ не более чем в пять раз превышает число областей в M с ребрами на τ , и наоборот.*

Доказательство. В силу леммы 4 о строении граничных слоев простого диска, утверждение леммы 5 о длине граничных слоев дисковой $(6, 3)$ -карты верно для σ - и τ -слоев дисковых компонент $M_1, \dots, M_k$ карты M , соединенных в M простыми путями $\gamma_1, \dots, \gamma_k$. Значит, верно и утверждение леммы 6.

Кольцевая карта M называется вырожденной, если $|M| = 0$.

Обозначим через M_1 карту, полученную из кольцевой непростой карты M удалением граничного слоя. Если полученная карта M_1 тоже не является простой, то, удалив из нее граничный слой, получим карту M_2 . Если карта M_{n-1} уже построена, то карту, полученную из M_{n-1} удалением граничного слоя, обозначим M_n . Если карта M_n является простой, то исходная карта M называется C - n -слойной. Если же M_n — вырожденная карта, то M называется n -слойной.

Замечание 2. Построение карт M_n всегда возможно, благодаря отсутствию на каждом шаге в карте M_{n-1} островов и полуостровов. Доказательство этого утверждения повторяет рассуждения, приведенные в лемме 3 и части 1 доказательства леммы 9 ниже.

Докажем лемму о строении граничных слоев кольцевой n -слойной карты.

Лемма 7. Пусть M есть кольцевая n -слойная $(6, 3)$ -карта при $n > 1$ с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$ и граничными слоями K_σ, K_τ , не содержащими полос и дэновских областей. Тогда либо в граничных слоях карты M есть только отдельные 2-области и 3-области, причем они чередуются между собой, либо в граничных слоях M есть 2- и 3-пары, которые чередуются между собой, а между ними могут встречаться отдельные 2- и 3-области.

Доказательство. Будем использовать следующее неравенство для кольцевых $(6, 3)$ -карт (см. [5]):

$$\sum_M^* \left(\frac{5}{2} - i(D) \right) \geq 0. \quad (4)$$

Это неравенство не нарушается для карты, граничные слои которой содержат только 2- и 3-области и чередующиеся 2- и 3-пары, то есть имеют строение, указанное в лемме 76. Остается доказать, что при нарушении указанного строения данное неравенство не выполняется. Очевидно, верны следующие три утверждения.

- (1) Вклад в сумму (4) всех чередующихся отдельных областей слоя K_σ , заключенных между двумя соседними 2-парами, равен $-1/2$.
- (2) Вклад в сумму (4) всех чередующихся отдельных областей, заключенных между соседними 3-парами, равен $1/2$.
- (3) Вклад в сумму (4) всех чередующихся отдельных областей, заключенных между соседними 2-парой и 3-парой, равен нулю.

Предположим, что граничные слои карты M могут содержать только отдельные 2- и 3-области и 2- и 3-пары. Если в слое K_σ число 2-пар превышает число 3-пар, то в K_σ есть полоса, что запрещено условием леммы 7. Если число 2-пар равно числу 3-пар, но они не чередуются между собой, то в K_σ есть полоса.

Пусть 3-пар в K_σ на одну больше, чем 2-пар. Тогда в K_σ есть две 3-пары, между которыми в K_σ есть только отдельные 2- и 3-области. Предполагая, что 2-пары чередуются с 3-парами, чтобы не образовалась полоса, приходим к выводу, что вклад слоя K_σ в сумму (4) с учетом п. 1, 2, 3 и учетом вклада лишней 3-пары, равен $-1/2$. Очевидно, неравенство (4) не выполняется и при условии, что количество 3-пар превышает количество 2-пар более, чем на одну.

Если же слой K_σ содержит d -тройки при $d \geq 2$ и отдельные d -области при $d \geq 3$, то для компенсации их отрицательного вклада в сумму (4) необходимо наличие 2-пар, не разделенных 3-парами, что противоречит условию леммы 7. Таким образом, нулевая сумма (4) при суммировании по всем областям слоя K_σ возможна лишь при выполнении для этого слоя требования леммы 7. То же условие должно выполняться и для слоя K_τ . Значит, неравенство (4) выполняется для кольцевой карты M тогда и только тогда, когда оно выполняется для каждого из граничных слоев карты M . А последнее, как мы видели, приводит к указанному в лемме 7 строению слоев.

Определение 14. Пусть M — однослойная карта с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$. Будем называть подкарту L карты M псевдополосой, если все ребра цикла σ считать внутренними, а все ребра цикла τ — граничными (или наоборот), и для областей карты L выполнены условия из определения полос. Аналогично определяются псевдодэновские области.

Лемма 8. Пусть M есть 1-слойная кольцевая карта, граничные слои которой не содержат псевдополос и псевдодэновских областей, $\partial M = \sigma \cup \tau$. Тогда число N_σ областей в M с ребрами на σ и число N_τ областей в M с ребрами на τ удовлетворяют неравенствам

$$N_\sigma \leq 3N_\tau, \quad N_\tau \leq 3N_\sigma.$$

Доказательство. Пусть $\partial M = \sigma \cup \tau$. Области в M могут быть трех типов: с одной вершиной на σ и ребрами на τ , с одной вершиной на τ и ребрами на σ , с ребрами на σ и на τ .

Области первого типа назовем s -треугольными, второго типа — t -треугольными, и третьего типа — прямоугольными.

В соответствии с введенными обозначениями будем говорить об отдельных s -областях, t -областях, s -парах и t -парах.

Заметим, что из отсутствия в карте M псевдополос и псевдодэновских областей следует отсутствие в M подкарты следующего типа: началом и концом последовательности входящих в нее областей являются $(s - 2)$ -пары (или $(t - 2)$ -пары), а между ними — отдельные t - и s -треугольные области, чередующиеся между собой.

По той же причине в M нет $(t - 2)$ - и $(s - 2)$ -троек. Значит, между двумя $(s - 2)$ -парами в M есть $(t - 2)$ -пара и наоборот. Иными словами, число $(s - 2)$ -пар в M равно числу $(t - 2)$ -пар. Также ясно, что число отдельных s -треугольных областей между соседними $(s - 2)$ -парой и $(t - 2)$ -парой равно числу отдельных t -треугольных областей между этими парами. Значит, в предположении, что в M нет прямоугольных областей, утверждение леммы 8 верно.

Далее предполагаем, что в M есть прямоугольные области. Если в M нет $(s - 2)$ -пар и $(t - 2)$ -пар, то чередующиеся между собой отдельные t -треугольные и s -треугольные области, заполняют участки карты M между прямоугольными областями. При этом максимальное значение отношения числа областей с ребрами на σ к числу областей с ребрами на τ равно двум, а минимальное равно $1/2$.

Остается рассмотреть случай, когда карта M содержит и прямоугольные области, и $(s - 2)$ -пары или $(t - 2)$ -пары. Как и в предыдущем случае, разобьем карту M прямоугольными областями на связные подкарты. Каждая из таких подкарт содержит одну прямоугольную область.

Если такая подкарта кроме прямоугольной области содержит единственную треугольную область, то отношение числа областей с ребрами на σ к числу областей с ребрами на τ в такой подкарте равно 2 или $1/2$.

Если вместо единственной треугольной области подкарта содержит единственную 2-пару, то рассматриваемое отношение равно 3 или $1/3$.

При наличии в подкарте как 2-областей, так и отдельных треугольных областей рассматриваемое отношение остается в пределах от $1/3$ до 3.

Если во всех подкартах, определенных выше, рассматриваемое отношение заключено между 3 и $1/3$, то и для всей карты M эти неравенства выполнены.

Замечание 3. Если слова $u \sim v$ являются циклически $\bar{R}$ -, R -несократимыми, то диаграмма сопряженности M не содержит полос и дэновских областей при $n > 1$ и не содержит псевдополос и псевдодэновских областей при $n = 1$. Значит, для такой кольцевой диаграммы выполняются условия предыдущей леммы и следующей леммы о длинах граничных циклов кольцевой n -слойной карты.

Лемма 9. Пусть M есть n -слойная $(6, 3)$ -карта, $n > 1$, с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$ и граничными слоями K_σ , K_τ , которые не содержат полос и дэновских областей. Тогда

число областей в K_σ , имеющих ребра в цикле σ , не более чем в 9 раз превышает число областей в K_τ , имеющих ребра в цикле τ , и наоборот.

Доказательство. Во-первых, покажем, что граничные слои карт, полученных из M удалением любого числа граничных слоев, не содержат полос и дэновских областей.

Действительно, если

$$M_1 = M \setminus K_\sigma, \quad \partial M_1 = \tau \cup \sigma_1,$$

и граничный слой K_{σ_1} этой карты содержит полосу Π , то для выполнения условия $T(6)$ слой K_σ должен содержать две 2-пары областей, имеющих общие вершины с двумя 2-парами из полосы Π . При этом между указанными 2-парами в слое K_σ должна быть 3-пара (по условию леммы). Тогда вершина, общая для областей такой 3-пары и принадлежащая циклу σ_1 , должна быть инцидентна трем ребрам с концами на разных границах слоя K_{σ_1} . Эти три ребра определяют в слое K_{σ_1} 3-пару, расположенную между 2-парами полосы Π , что противоречит определению полосы.

Предположим наличие дэновской области D , например, в слое K_{σ_1} . Тогда из условия $C(3)$ следует, что в цикле σ_1 область D имеет два ребра. Степень общей для них вершины должна быть не меньше 6. Значит, она инцидентна четырем ребрам с концами в вершинах цикла σ . Эти ребра образуют в слое K_σ полосу из трех областей, что противоречит уже доказанному.

Во-вторых, если число n слоев карты M больше двух, то внутренние слои карты M (то есть слои, не совпадающие с граничными слоями K_σ , K_τ) не содержат прямоугольных областей.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим подкарту M_s карты M , полученную из M последовательным удалением граничных слоев $K_\sigma, K_{\sigma_1}, \dots, K_{\sigma_{s-1}}$ таким образом, что внутренний слой карты M стал граничным слоем K_{σ_s} карты M_s . Предположим, что в K_{σ_s} есть прямоугольная область D . Это значит, что она имеет ребра на обеих границах слоя. Кроме того, она является 3-областью в карте M_s . Но ту же область можно рассмотреть и как 3-область в карте M'_t , полученной из M удалением слоев $K_\tau, K_{\tau_1}, \dots, K_{\tau_{t-1}}$. Поскольку в обеих картах M_s, M'_t граничные слои не содержат полос и дэновских областей, к ним применима лемма 7. Рассмотрим области D_L, D_R из K_{σ_s} , имеющие с D общие ребра. Возможны только три случая, и все они приводят к противоречию с леммой 7.

- (1) В карте M_s , D_L, D_R есть 2-области. Тогда в карте M'_t D_L, D, D_R есть 3-области, не разделенные 2-областями.
- (2) В карте M'_t D_L, D, D_R есть 3-области, не разделенные 2-областями.
- (3) В карте M_s D_L есть 2-область, а D_R есть 3-область. Тогда в карте M_s D, D_R есть 3-пара. Рассмотрим ближайшие к этой 3-паре d -пары в слое K_{σ_s} . Все возможные варианты приводят к противоречию с леммой 7: 3-пары должны быть разделены 2-парой, что при наличии прямоугольной области D оказывается невозможно. Надо только выбирать одну из двух карт M_s, M'_t .

В третьих, если при $n > 2$ рассмотреть внутренний слой K с граничными циклами σ_i, σ_{i+1} в карте M , то число областей в K , имеющих ребра в σ_i , равно числу областей в K , имеющих ребра в σ_{i+1} , поскольку в K нет прямоугольных областей.

Граничные слои карты M K_σ, K_τ могут содержать прямоугольные области. Поэтому число областей с ребрами на границах этих слоев может отличаться не более чем в три раза для каждого из этих слоев. Тогда для всей карты M этот коэффициент равен девяти.

Очевидно, при $n = 1$, $n = 2$ коэффициент 9 также подходит. Лемма 9 доказана.

Докажем лемму о кольцевых C - n -слойных картах.

Лемма 10. *Не существует C - n -слойных карт, граничные слои которых не содержат полос и псевдополос, дэновских областей и псевдодэновских областей, $\partial M = \sigma \cup \tau$.*

Доказательство. Предположим, что существует C - n -слойная карта M , в граничных слоях которой нет полос и дэновских областей.

По определению, карта M является объединением n -слойной и простой карт N и P :

$$\partial N = \sigma \cup \sigma_n, \quad \partial P = \sigma_n \cup \tau, \quad \sigma = \sigma_0.$$

В карте N всего n слоев: $K_\sigma = K_{\sigma_0}, \dots, K_{\sigma_{n-1}}$.

Если в карте P есть полоса, все граничные ребра которой содержатся в цикле σ_n , то полоса есть и в слое $K_{\sigma_{n-1}}$ карты $P \cup K_{\sigma_{n-1}}$ и т. д., и в слое K_σ карты M есть полоса, что противоречит условию леммы 10 (доказательство повторяет рассуждение части 1 доказательства леммы 9). Значит, граничные слои дисковых компонент простой карты P не содержат полос.

Аналогично доказывается, что из наличия дэновской области в карте P вытекает ее наличие в слое K_σ карты M , что опять же невозможно. Итак, карта P не содержит полос и дэновских областей.

Рассмотрим карту N . По предположению, в ее K_σ -слое нет полос и дэновских областей. Рассмотрим слой $K_{\sigma_{n-1}}$. Представим карту P в виде объединения дисковых компонент P_i , соединенных простыми путями p_i , $i = 1, \dots, t$, для некоторого t . Из сделанного предположения следует, что в слое $K_{\sigma_{n-1}}$ нет полос и дэновских областей, для которых пересечение их границ с циклом σ_{n-1} целиком содержится в одном из путей p_i . Из доказанных свойств карты P следует, что в слое σ_{n-1} нет полос и дэновских областей, для которых пересечение их границ с циклом σ_{n-1} целиком содержится в граничном цикле одной из дисковых компонент P_i .

Представим цикл σ_{n-1} в виде

$$\sigma_{n-1} = p_1 s_1 p_2 s_2 \dots p_t s_t, \quad s_i = \partial P_i \cap \sigma_{n-1}, \quad i = 1, \dots, t.$$

При этом

$$A_i = p_i \cap s_i, \quad B_i = s_i \cap p_{i+1}$$

есть пара вершин, общих для двух участков границы дисковой карты P_i . Пусть D_{A_i} , D_{B_i} есть области внутренней степени 2 в компоненте P_i (лемма 4). Рассмотрим ребро $\partial D_{A_i} \cap s_i$ с вершинами A_i , C_i . В карте M вершина C_i должна иметь степень не менее шести, причем только три ребра, инцидентные этой вершине, содержатся в P_i . Значит, другие три ребра определяют в подкарте $P_i \cup K_{\sigma_{n-1}}$ 2-пару из областей с общей вершиной C_i .

Из леммы 4 следует, что ближайшей к вершине C_i в подкарте $P_i \cup K_{\sigma_{n-1}}$ вдоль пути s_i является вершина E_i с тремя, но не с пятью инцидентными ей ребрами, содержащимися в P_i . Действительно, по лемме 4, 2-пары и 3-пары чередуются в граничном слое карты P_i , причем ближайшей к области D_{A_i} является 2-пара. Она и определяет вершину E_i . Вершине E_i в слое $K_{\sigma_{n-1}}$ подкарты $P_i \cup K_{\sigma_{n-1}}$ соответствует 2-пара областей. Вместе с указанной выше 2-парой при вершине C_i они определяют полосу в $P_i \cup K_{\sigma_{n-1}}$. Теперь не составляет труда показать, что полоса есть и в K_σ -слое карты M , что противоречит сделанному в начале доказательства предположению. Тем самым лемма 10 доказана.

5. Доказательство теоремы 1

Как уже пояснено в разделе 2, достаточно ограничить длины граничных меток кольцевой диаграммы сопряженности слов v , w^n , которые являются $\bar{R}$, R -несократимыми. Такая диаграмма является картой, не содержащей полос, псевдополос, дэновских и псевдодэновских областей. Значит, она может быть либо n -слойной, либо простой. В обоих случаях оценки для длин граничных меток диаграммы следуют из оценок числа областей с ребрами на одном из граничных циклов диаграммы через число областей с ребрами на другом граничном цикле. В качестве коэффициента можно взять наибольший, равный 9 (см. леммы 6, 8, 9).

Итак, из сопряженности $\bar{R}$, R -несократимых слов v , w^n следует, что

$$n \leq |w^n| \leq 9|v||r_0|,$$

где r_0 — самое длинное из определяющих соотношений в копредставлении $G = (X; R)$.

Список литературы

1. Безверхний Н. В., Разрешимость проблемы вхождения в циклическую подгруппу в группах с условием $C(6)$. *Фундаментальная и прикладная математика* (1999) **5**, №1, 39–46.
2. Паршикова Е. В., Проблема слабой степенной сопряженности в группах с условием $C(4)-T(4)$. В сб.: *Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп*. Тульский гос. пед. инст., Тула, 2001, с. 179–185.
3. Безверхний Н. В., Нормальные формы для элементов бесконечного порядка в группах с условиями $C(3)-T(6)$. *Изв. ТулГУ, Сер. Естественные науки* (2010) 6–25.
4. Gersten S. M., Short H. B., Small cancellation theory and automatic groups. *Invent. Math.* (1990) **102**, 305–334.
5. Линдон Р., Шупп П., *Комбинаторная теория групп*. Мир, Москва, 1980.
6. Безверхний В. Н., О нормализаторах элементов в группах. В сб.: *Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп*. Тульский гос. пед. инст., Тула, 1994, с. 4–58.

Статья поступила 9.09.2010.