Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Д. Шваб, Интервалы Ловера и функция Мёбиуса категории Мёбиуса, *Дискрет. матем.*, 2012, том 24, выпуск 4, 47–55

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1209>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 08:10:46

Интервалы Ловера и функция Мёбиуса категории Мёбиуса

© 2012 г. Э. Д. Шваб

Интервалы Ловера категорий Мёбиуса суть конечные однонаправленные категории. В статье изучается простая связь между функцией Мёбиуса категории Мёбиуса и функциями Мёбиуса ее интервалов Ловера. При этом учитывается, что большой класс категорий Мёбиуса возникает как остовы категорий деления (которые являются сократимыми справа с расслоенным копроизведением). Вообще говоря, вычисление функции Мёбиуса для категории Мёбиуса трудоемко. В нашем случае оно становится рутинной операцией на конечных решетках. В качестве иллюстрации, результаты этой статьи использованы для вычисления функции Мёбиуса собственной категории Мёбиуса.

1. Введение

Теория Рота функций Мёбиуса составляет важную часть комбинаторики. Обращения Мёбиуса находят большое число применений в различных областях математики. Функция Мёбиуса μ_P упорядоченного множества $(P, \leq)$ полностью определяет обратное исчисление Мёбиуса на P . Методы вычисления функции Мёбиуса на некоторых частично-упорядоченных множествах входят в базовую часть этого исчисления. Категории Мёбиуса в смысле Леруа [4] (см. также [1]) были введены для введения обращений Мёбиуса для категорий. Это обобщает теорию Рота функций Мёбиуса для частично-упорядоченных множеств $(P, \leq)$. Это обобщение для категорий может быть использовано в различных областях:

- (а) решение задач перечисления [6];
- (б) теория Эйлеровых характеристик категории [3];
- (в) теория комбинаторных обратных моноидов [8];
- (г) теория алгебр Хопфа и алгебр инцидентий.

Как и в случае теории Рота частично-упорядоченных множеств, в применениях инверсий Мёбиуса в категориях необходимо знать значения функции Мёбиуса на множестве всех морфизмов. В настоящей статье мы приводим ряд понятий и свойств, включая интервалы Ловера, которые облегчают эти вычисления.

2. Категории Мёбиуса

Пусть C есть малая категория и $f: X \rightarrow Y$ есть морфизм в C . Если $f = gh$ в C , мы говорим, что g и h являются множителями f и gh есть факторизация f . Обозначим через $\langle f \rangle$ множество всех факторизаций f . Назовем малую категорию C декомпозиционно-конечной, если множество $\langle f \rangle$ конечно для любого морфизма f малой категории C . Комплекснозначная функция ξ , определенная на множестве $\text{Mor } C$ всех морфизмов C называется функцией инцидентности C . Множество $A(C)$ всех функций инцидентности декомпозиционно-конечной категории C с обычной структурой векторного пространства и умножением, заданном конволюцией

$$(\xi * \eta)(f) = \sum_{gh \in \langle f \rangle} \xi(g)\eta(h)$$

является C -алгеброй, называемой алгеброй инцидентности C . Функция инцидентности δ , определяемая следующим образом:

$$\delta(f) = \begin{cases} 1, & \text{если } f \text{ есть тождественный морфизм,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

есть единичный элемент в $A(C)$. Категория Мёбиуса есть декомпозиционно-конечная категория C , в которой функция инцидентности $\xi \in A(C)$ имеет конволюционное обращение тогда и только тогда, когда $\xi(f) \neq 0$ для любого тождественного морфизма f . Функция Мёбиуса μ категории Мёбиуса C есть конволюционное обращение дзета-функции ζ , определенной так, что $\zeta(f) = 1$ для любой $f \in \text{Mor } C$. Тогда формула обращения Мёбиуса есть не что иное как следующее утверждение:

$$\xi = \eta * \zeta \iff \eta = \xi * \mu.$$

Декомпозиционно-конечные однонаправленные категории образуют важный класс категорий Мёбиуса. Говорим, что категория C однонаправленна, если выполняются следующие условия:

- (i) из того, что $\text{Hom}_C(X, Y) \neq 0$ и $\text{Hom}_C(Y, X) \neq 0$ следует, что $X = Y$;
- (ii) $\text{Hom}_C(X, Y)$ есть синглетон для любого объекта X ,

где $\text{Hom}_C(X, Y)$ — множество всех морфизмов в C из X в Y . Заметим, что конечная категория есть категория Мёбиуса тогда и только тогда, когда она однонаправленна. В [1, 2, 4] приведена очень полезная характеристика категорий Мёбиуса. В [2] характеристики категорий Мёбиуса даны в терминах интервалов. Определение интервала категории было введено Ловером в 1986 г. (см. замечание в [2]). Мы будем называть эти интервалы интервалами Ловера.

3. Интервалы Ловера и функция Мёбиуса

Пусть $f: X \rightarrow Y$ есть морфизм в категории C . Интервал Ловера $I(f)$ есть категория, определяемая следующим образом:

$$- \text{Ob } I(f) = \langle f \rangle,$$

$$- \text{Hom}_{I(f)}(f_1 f_0, g_1 g_0) = \{h \in \text{Mor } C \mid hf_0 = g_0 \text{ и } g_1 h = f_1\}$$

– композиция в $I(f)$ такая же, как и в C .

Теорема 1 ([2]). Если C — категория Мёбиуса, то интервал $I(f)$ конечен и мёбиусов для любого морфизма f из C . Более того, C мёбиусова тогда и только тогда, когда все интервалы Ловера в C конечны и однонаправлены.

Теорема 2. Если C есть сократимая справа (слева) категория Мёбиуса, то $I(f)$ есть конечное ограниченное частично-упорядоченное множество (то есть, это частично-упорядоченное множество имеет наименьший и наибольший элементы, которые мы обозначим через 0 и 1 соответственно).

Доказательство. Так как все морфизмы категории C являются эпиморфизмами, для любых двух объектов $f_1 f_0, g_1 g_0$ из $I(f)$ множество морфизмов $\text{Hom}_{I(f)}(f_1 f_0, g_1 g_0)$ представляет собой одноэлементное или пустое множество. Следовательно, $I(f)$ есть частично-упорядоченное множество: $((f_0, f_1) \leq (g_0, g_1))$, если $\text{Hom}_{I(f)}(f_1 f_0, g_1 g_0) \neq \emptyset$ — одноэлементное множество. Объект $f 1_X$ есть наименьший элемент множества $I(f)$, а $1_Y f$ есть наибольший элемент.

Теперь мы несколько изменим направление исследований и перейдем к изучению функций Мёбиуса категорий Мёбиуса. Заметим, что если C есть категория Мёбиуса, то для любого тождественного морфизма 1_X множество $\langle 1_X \rangle$ одноэлементно. Если μ есть функция Мёбиуса от C , то

$$\mu(1_X) = \zeta(1_X)\mu(1_X) = (\zeta * \mu)(1_X) = \delta(1_X) = 1.$$

Если $f: X \rightarrow Y$ есть нетождественный неразложимый морфизм, то есть

$$\langle f \rangle = \{f 1_X, 1_Y f\},$$

то

$$\begin{aligned} \mu(f) &= \zeta(1_Y)\mu(f) = \zeta(1_Y)\mu(f) + 1 - 1 \\ &= \zeta(1_Y)\mu(f) + \zeta f \mu(1_X) - 1 \\ &= (\zeta * \mu)(f) - 1 = \delta(f) - 1 \\ &= -1. \end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть μ есть функция Мёбиуса категории Мёбиуса C , и пусть $\mu_{I(f)}$ есть функция Мёбиуса интервала Ловера $I(f)$. Тогда

$$\mu(f) = \mu_{I(f)}(f)$$

для любого морфизма $f: X \rightarrow Y$ в C . (Очевидно, что f есть также морфизм в $I(f)$ из $f 1_X$ в $1_Y f$.)

Доказательство. Пусть ξ — функция инцидентности категории Мёбиуса C , обозначим $\bar{\xi}$ функцию инцидентности $I(f)$, определяемую следующим образом:

$$\bar{\xi}(h) = \xi(h) \quad \text{для любого морфизма } h \text{ из } I(f).$$

Теперь пусть h — морфизм из $I(f)$. Если $h = h_1 h_0$ — факторизация h в $I(f)$, то это есть также факторизация h в C . Обратно, предположим, что $h = h_1 h_0$ — факторизация $h \in \text{Hom}_{I(f)}(f_1 f_0, g_1 g_0)$ в C . Отсюда следует, что

$$(g_1 h_1)(h_0 f_0) = g_1 h f_0 = f_1 f_0 = f,$$

а также, что $h_0 \in \text{Hom}_{I(f)}(f_1 f_0, (g_1 h_1)(h_0 f_0))$, $h_1 \in \text{Hom}_{I(f)}((g_1 h_1)(h_0 f_0), g_1 g_0)$, поэтому $h = h_1 h_0$ есть факторизация h в $I(f)$. Таким образом, $h_1 h_2$ есть факторизация h в $I(f)$ тогда и только тогда, когда она является факторизацией h в C . Поэтому для любых двух функций инцидентности ξ и η категории C справедливы равенства

$$\begin{aligned} (\bar{\xi} * \bar{\eta})(h) &= \sum_{h_1 h_0 = h} \bar{\xi}(h_1) \cdot \bar{\eta}(h_0) \\ &= \sum_{h_1 h_0 = h} \xi(h_1) \cdot \eta(h_0) = (\xi * \eta)(h). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\bar{\zeta} * \bar{\mu} = \bar{\mu} * \bar{\zeta} = \delta.$$

Очевидно, что $\bar{\zeta}$ есть дзета-функция от $I(f)$ и поэтому $\bar{\mu}$ есть функция Мёбиуса $I(f)$.

Теперь для любого морфизма $f: X \rightarrow Y$ в C f есть морфизм в $I(f)$ из $f 1_X$ в $1_Y f$. Но если $I(f)$ есть ограниченное частично-упорядоченное множество, то $f 1_X$ есть наименьший элемент в $I(f)$ (обозначаемый 0) и $1_Y f$ есть наибольший элемент (обозначаемый 1). Отсюда вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть μ есть функция Мёбиуса сократимой справа (слева) категории Мёбиуса C и $\mu_{I(f)}(0, 1)$ есть функция Мёбиуса ограниченного частично-упорядоченного множества $I(f)$. Тогда

$$\mu(f) = \mu_{I(f)}(0, 1)$$

для любого морфизма f в C .

Так как Эйлерова характеристика $\chi(P)$ ограниченного конечного частично-упорядоченного множества P есть $\mu_P(0, 1)$, приходим к следующему утверждению.

Следствие 2. Пусть μ есть функция Мёбиуса сократимой справа (слева) категории Мёбиуса C . Тогда

$$\mu(f) = l_0 - l_1 + l_2 - l_3 + \dots$$

для любого нетождественного морфизма f в C , где l_i есть число цепочек

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_i = 1$$

в $I(f)$ длины i между 0 и 1 (считаем $l_0 = 0$).

Замечание 1. Ряд примеров показывает, что некоторые категории Мёбиуса возникают как остовы категорий деления комбинаторных обратных моноидов (см. [9, 10]). Все они являются сократимыми справа категориями Мёбиуса. Таким образом, для категорий Мёбиуса комбинаторных обратных моноидов применимы приведенные выше следствия. Более того, все эти категории являются категориями с расслоенным копроизведением (категория деления является сократимой справа категорией с расслоенным копроизведением и квази-инициальным объектом).

Таким образом, верно следующее утверждение.

Теорема 4. Если C есть сократимая справа категория Мёбиуса с расслоенным копроизведением, то любой интервал Ловера в C есть конечная решетка.

Доказательство. Чтобы доказать это утверждение, достаточно показать, что для любого интервала Ловера $I(f)$ и любых двух объектов $f_0, f_1, g_0, g_1 \in \text{Ob } I(f)$ найдется наименьшая верхняя грань $f_1 f_0 \vee g_1 g_0$. Если $[f_0, g_0, p, q]$ есть расслоенное копроизведение в C коугла (f_0, d_0) , то существует единственный морфизм u в C такой, что $up = f_1$ и $uq = g_1$.

Следовательно, $u(pf_0) = u(qg_0) \in \text{Ob } I(f)$ и $f_0 f_1, g_0 g_1 \leq u(pf_0) = u(qg_0)$ в $I(f)$. Теперь, если $vw \in \text{Ob } I(f)$ таковы, что $f_0 f_1, g_0 g_1 \leq vw$, то есть $rf_0 = w$, $vr = f_1$, $sg_0 = w$ и $vs = g_1$ для некоторых морфизмов r и s в C , то $rf_0 = sg_0$. Отсюда следует, что существует единственный морфизм t в C такой, что $tp = r$ и $tq = s$.

Поэтому равенства

$$t(pf_0) = (tp)f_0 = rf_0 = w, \quad vtq = vs = g_1 = uq$$

влекут равенство

$$vt = u,$$

и поэтому

$$u(pf_0) = u(qg_0) \leq vw$$

в $I(f)$. Следовательно, наименьшая верхняя грань для $f_1 f_0, g_1 g_0 \in \text{Ob } I(f)$ есть $u(hf_0) = u(qf_0)$.

4. Пример

Приведем простой пример, иллюстрирующий использование полученных результатов для нахождения функций Мёбиуса категории Мёбиуса. Наибольший интерес в этом примере представляет сам факт, состоящий в том, что в нем представлена собственная категория Мёбиуса (то есть, эта категория — не моноид и она не однонаправленная) и все ее интервалы Ловера являются конечными вполне упорядоченными множествами.

Пусть $Z_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{m-1}\}$ — множество классов вычетов по модулю m , $m \geq 2$, и $\mathbf{Z}_+$ — множество неотрицательных целых чисел. Рассмотрим категорию C_m , определенную следующим образом:

$$\text{Ob } C_m = Z_m;$$

$$\text{Hom}_{C_m}(\bar{a}, \bar{b}) = \{(x, \bar{a}) \in Z_m \mid x \geq a, x \equiv b \pmod{m}\};$$

если $(x, \bar{a}) \in \text{Hom}_{C_m}(a, b)$ и $(y, \bar{b}) \in \text{Hom}_{C_m}(\bar{b}, \bar{c})$, то композиция $(y, \bar{b}) \cdot (x, \bar{a})$ задается равенством

$$(y, \bar{b}) \cdot (x, \bar{a}) = (y - b + x, \bar{a}).$$

Ясно, что

$$y - b + x \geq a.$$

Так как

$$y \equiv c \pmod{m}, \quad x \equiv b \pmod{m},$$

справедливо сравнение

$$y - b + x \equiv c - b + b \pmod{m},$$

то есть

$$y - b + x \equiv c \pmod{m}.$$

Морфизм $(a, \bar{a})$ есть тождественный морфизм из $\bar{a}$ в $\bar{a}$. Очевидно, что категория C_m сократима справа и слева. Теперь, если $(a + k, \bar{a})$, где $k \geq 0$, есть морфизм из $\bar{a}$ в $\bar{c}$ и

$$(a + k, \bar{a}) = (y, \bar{b}) \cdot (a + i, \bar{a})$$

есть факторизация $(a + k, \bar{a})$, то

$$\begin{aligned} i &\geq 0, & a + i &\equiv b \pmod{m}, \\ y &\geq b, & y &\equiv c \pmod{m}, \end{aligned}$$

и

$$y - b + a + i = a + k,$$

то есть

$$y = b + k - i.$$

Отсюда следует, что для любого i , $0 \leq i \leq k$, морфизм $(a + k, \bar{a})$ имеет единственную факторизацию (так как C_m сократима) вида

$$(a + k, \bar{a}) = (b + k - i, \bar{b}) \cdot (a + i, \bar{a}),$$

где

$$0 \leq b \leq m - 1, \quad b \equiv a + i \pmod{m}.$$

Отсюда следует, что множество объектов в интервале Ловера $I(a + k, \bar{a})$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{Ob } I(a + k, \bar{a}) = \{ & (b_0 + k, \bar{b}_0) \cdot (a, \bar{a}), (b_1 + k - 1, \bar{b}_1) \cdot (a + 1, \bar{a}), \\ & \dots, (b_i + k - i, \bar{b}_i) \cdot (a + i, \bar{a}), \dots, (b_k, \bar{b}_k) \cdot (a + k, \bar{a}), \end{aligned}$$

где

$$0 \leq b_i \leq m - 1, \quad b_i \equiv a + i \pmod{m}, \quad 0 \leq i \leq k.$$

Пусть теперь $(z, \bar{b}_i)$ есть морфизм в $I(a + k, \bar{a})$ из $(b_i + k - i, \bar{b}_i) \cdot (a + i, \bar{a})\}$ в $(b_j + k - j, \bar{b}_j) \cdot (a + j, \bar{a})$.

Таким образом, $(z, \bar{b}_i)$ есть морфизм в C_m из $\bar{b}_i$ в $\bar{b}_j$, и поэтому

- (1) $z \geq b_i$,
- (2) $z \equiv b_j \pmod{m}$,
- (3) $(z, \bar{b}_i) \cdot (a + i, \bar{a}) = (a + j, \bar{a})$ и $(b_j + k - j, \bar{b}_j) \cdot (z, \bar{b}_i) = (b_i + k - i, \bar{b}_i)$.

Из (3) следует, что

$$z = j - i + b_i.$$

Так как

$$a + i \equiv b_i \pmod{m}, \quad a + j \equiv b_j \pmod{m},$$

верно равенство

$$j - i + b_i = b_j,$$

то есть справедливо (2), но (1) справедливо только если $j \geq i$. Таким образом, $\text{Hom}_{I(a+k, \bar{a})}((b_i + k - i, \bar{b}_i) \cdot (a + i, \bar{a}), (b_j + k - j, \bar{b}_j) \cdot (a + j, \bar{a}))$ непусто, то есть это есть синглетон, поскольку C_m сократимо, если и только если $i \leq j$ ($0 \leq i, j \leq k$). Следовательно,

- (i) все интервалы Ловера в C_m конечны и однонаправленны; таким образом, C_m есть категория Мёбиуса;
- (ii) каждый интервал Ловера $I(a + k, \bar{a})$ категории C_m есть цепочка:

$$\begin{array}{ccc}
 (b_k, \bar{b}_k) \cdot (a + k, \bar{a}) & & k \\
 | & & | \\
 \vdots & & \vdots \\
 | & & | \\
 (b_i + k - i, \bar{b}_i) \cdot (a + i, \bar{a}) & & i \\
 | & & | \\
 \vdots & & \vdots \\
 | & & | \\
 (b_0 + k, \bar{b}_0) \cdot (a, \bar{a}) & & 0
 \end{array}$$

Таким образом, функция Мёбиуса μ категории Мёбиуса C_m задается следующим образом:

$$\mu(x, \bar{a}) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = a, \\ -1, & \text{если } x = a + 1, \\ 0, & \text{если } x \geq a + 2 \end{cases}$$

для любого морфизма $(x, \bar{a})$ из C_m .

Список литературы

1. Content M., Lemay F., Leroux P., Catégories de Möbius et fonctorialités: un cadre général pour l'inversion de Möbius. *J. Comb. Theory* (1980) **A28**, №2, 169–190.
2. Lawvere F. W., Menni M., The Hopf algebra of Möbius intervals. *Theory and Appl. of Categories* (2010) **24**, №10, 221–265.

3. Leinster T., The Euler characteristic of a category. *Doc. Math.* (2008) **13**, 21–49.
4. Leroux P., Les categories de Möbius. *Cahiers Topologie Geom. Differentielle* (1975) **16**, 280–282.
5. Leroux P., The isomorphism problem for incidence algebras of Möbius categories. *Ill. J. Math.* (1982) **26**, 52–61.
6. Leroux P., Reduced matrices and q -log-concavity properties of q -Stirling numbers. *J. Comb. Theory* (1990) **A54**, 64–84.
7. Rota G.-C., On the foundations of combinatorial theory. Theory of Möbius functions. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie* (1964) **2**, 340–368.
8. Schwab E. D., Möbius categories as reduced standard division categories of combinatorial inverse monoids. *Semigroup Forum* (2004) **69**, 30–40.
9. Schwab E. D., The Möbius category of some combinatorial inverse semigroups. *Semigroup Forum* (2004) **69**, 41–50.
10. Schwab E. D., On incidence algebras of combinatorial inverse monoids. *Comm. Algebra* (2010) **38**, 1779–1789.
11. Stanley R. P., *Enumerative combinatorics, I*. Wadsworth & Brooks, Monterey, Calif., 1986.

Статья поступила 20.08.2011.

Переработанный вариант поступил 10.11.2012.