Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Лифшиц, Разбиения k -связного графа на части,
Дискрет. матем., 2005, том 17, выпуск 3, 112–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm121>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 18:16:51

Разбиения k -связного графа на части

© 2005 г. Ю. М. Лифшиц

В статье изучается разбиение графа набором разделяющих множеств. Найдена точная верхняя оценка числа получающихся частей. Исследована структура набора в случае достижения этой оценки. Кроме того, результат Д. В. Карпова о числе частей в разбиении передоказан при более слабых предположениях о графе. В статье также доказана теорема о пограничных частях, дающая верхнюю оценку числа частей разбиения, граничащих с данной вершиной.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Исследования в основных областях современной математики» и программы Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ, грант НШ-2203.2003.1.

1. Введение

При изучении связности графа встает естественный вопрос, как выделить в k -связном графе подграфы большей связности и какую систему они образуют. В связном графе максимальное по включению подмножество вершин, индуцирующее двусвязный подграф, называется блоком. Структура блоков исследована достаточно полно (см., например, [1, 2]). В работах [3, 4] были предприняты попытки обобщить основные результаты этой теории на графы большей связности. Ряд работ был посвящен трехсвязным блокам в двусвязных графах [5, 6, 7]. В [8], а затем и [9] вводятся новые методы разбиения k -связного графа на $(k+1)$ -связные блоки. В [10] появляется понятие части разбиения графа по набору разделяющих множеств. Это понятие тесно связано с построением блоков в k -связном графе. В частности, любой блок k -связного графа можно представить как часть разбиения этого графа всеми k -разделяющими множествами. Кроме того, в [10] при довольно сильных ограничениях на разделяющий набор и сам граф был получен следующий результат: набор из n разделяющих множеств делит граф не более чем на $2n$ частей.

Статья построена следующим образом. Сначала мы введем основные понятия теории k -связных графов и приведем их простейшие свойства, которые понадобятся при доказательстве основных результатов. Затем мы докажем теорему о пограничных частях, которая будет основным инструментом для получения оценок числа частей в разбиении. После этого будет получена следующая теорема о полном разбиении. Пусть в некотором k -связном графе есть набор k -разделяющих множеств $\{A_1, \dots, A_n\}$. Для каждого $1 \leq i \leq n$ обозначим через a_i число частей, на которые множество A_i делит граф. Тогда весь набор делит граф не более чем на

$$\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n [a_i > 2] + [\forall i \ a_i > 2]$$

невырожденных частей. В этой формуле [утверждение] — это нотация Айверсона (см. [11, 12]), то есть результат этого выражения равен 1, если утверждение в квадратных скобках верно, и равен 0 в противном случае. Кроме того, будет показано, что результат Д. В. Карпова из [10] о $2n$ частях является частным случаем этой теоремы. В следующем разделе будет описана структура разделяющего набора в случае полного разбиения, то есть в случае, когда число частей в разбиении графа достигает полученной нами верхней оценки. В последнем разделе мы докажем, что число невырожденных частей в разбиении графа n разделяющими множествами не превосходит $2n$ при более слабых ограничениях на граф, чем в [10].

2. Основные понятия

Определение 1. Назовем простой (без петель и кратных ребер) граф k -связным, если при удалении любой $k - 1$ вершины (и всех ребер, выходящих из этих вершин) граф остается связным.

Определение 2. Назовем подмножество вершин A графа разделяющим, если при удалении этих вершин граф перестает быть связным. Само удаление назовем разрезом графа по A (или A -разрезом). Соответственно, назовем подмножество вершин графа m -разделяющим, если оно разделяющее и состоит из m вершин.

В этой статье речь будет идти только о k -разделяющих множествах в k -связном графе.

Определение 3. Будем говорить, что разделяющее множество A разделяет набор вершин X , если при A -разрезе найдутся две неудаленные вершины X , попавшие в разные компоненты связности. Будем говорить, что A отделяет вершину $x \notin A$ от множества P , если при A -разрезе найдется неудаленная вершина из P , попавшая не в ту компоненту связности, в которой оказалась x .

Теперь определим понятие части и укажем его основное свойство.

Определение 4. Пусть $\mathcal{U}$ — набор разделяющих множеств графа G . Множество P из нескольких вершин графа назовем частью $\mathcal{U}$ -разбиения, если никакие две вершины из P нельзя разделить никаким множеством из набора $\mathcal{U}$, но любая другая вершина графа может быть отделена от множества P разрезом по одному из множеств $\mathcal{U}$.

В дальнейшем слово разбиение всегда будет относиться к набору разделяющих множеств, а разрез — к одному разделяющему множеству.

Пусть набор $\mathcal{U}$ состоит только из одного разделяющего множества A , и пусть при A -разрезе граф распадается на компоненты связности $F_1, \dots, F_l$. Тогда согласно определению частями $\mathcal{U}$ -разбиения (A -разреза) будут множества $A \cup F_1, \dots, A \cup F_l$.

Необходимо отметить, что если рассмотреть часть как отдельный граф (проведя между вершинами части те ребра, которые были в исходном графе), то он может оказаться несвязным.

Пример 1. Рассмотрим простой цикл $tuvxyz$, являющийся двухсвязным графом, представленный на рис. 1. Тогда $A = \{u, z\}$ и $B = \{v, y\}$ — его 2-разделяющие множества. В $\{A, B\}$ -разбиении три части: $\{t, u, z\}$, $\{u, v, y, z\}$ и $\{v, x, y\}$.

Рис. 1.

Предложение 1. Если Q — часть $\mathcal{A}$ -разбиения, то ее можно представить в виде

$$Q = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} P_A,$$

где P_A — одна из частей A -разреза графа.

Возьмем по одной части разреза по каждому из множеств $\mathcal{A}$. Все такие выборки будем называть $\mathcal{A}$ -комбинациями или просто комбинациями. Тогда, другими словами, предложение 1 говорит, что любая часть $\mathcal{A}$ -разбиения является пересечением частей какой-то комбинации. Доказательство предложения 1 несложно и приведено в [10] (см. теорему 1 в [10]). Таким образом, общее число частей в $\mathcal{A}$ -разбиении не превосходит произведения чисел частей в разрезах по каждому разделяющему множеству из $\mathcal{A}$.

Теперь введем понятия границы и внутренности части, оперируя с которыми мы сможем получить основные результаты этой статьи.

Определение 5. Границей части $\mathcal{A}$ -разбиения P назовем множество тех вершин P , которые лежат хотя бы в одном из множеств $\mathcal{A}$, а размером границы — их число. Соответственно, внутренностью части назовем множество остальных вершины P .

Определение 6. Часть $\mathcal{A}$ -разбиения назовем вырожденной, если ее внутренность пуста.

Вырожденная часть разбиения не обязательно является пустым множеством. В следующем предложении дается основное свойство границы.

Предложение 2. Если внутренность части не пуста, то ее граница является разделяющим множеством (не обязательно ровно из k вершин), отделяющим эту внутренность от остальных вершин графа.

Это также нетрудно проверить (см. замечание к определению 4 в [10]). Таким образом, для любого набора $\mathcal{A}$ разделяющих множеств в k -связном графе граница любой невырожденной части $\mathcal{A}$ -разбиения состоит хотя бы из k вершин.

Теперь приведем последнее утверждение (нетрудное доказательство опустим), которое нам потребуется.

Предложение 3. Пусть

$$Q = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} P_A,$$

где P_A — одна из частей A -разреза графа. Тогда если Q содержит хотя бы одну вершину, не лежащую ни в одном из множеств $\mathfrak{A}$, то Q — часть $\mathfrak{A}$ -разбиения, причем невырожденная.

Другими словами, если пересечение частей какой-то комбинации содержит хотя бы одну вершину не из множеств $\mathfrak{A}$, то оно является частью разбиения, причем невырожденной.

3. Теорема о пограничных частях

Рассмотрим произвольную вершину u нашего графа. Для каждого разделяющего множества из $\mathfrak{A}$, содержащего u , возьмем число частей, на которое оно режет граф. Сумму взятых чисел назовем весом вершины u относительно $\mathfrak{A}$.

Теорема 1. Число невырожденных частей $\mathfrak{A}$ -разбиения, с которыми граничит (то есть входит в границу) произвольная вершина графа, не превосходит веса этой вершины относительно набора $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$, и A_i режет граф на a_i частей, $1 \leq i \leq n$. Пусть вершина x принадлежит множествам $A_1, \dots, A_m$ и не принадлежит остальным. Тогда нам нужно доказать, что эта вершина является граничной не более чем для $\sum_{i=1}^m a_i$ невырожденных частей $\mathfrak{A}$ -разбиения. Иными словами вес вершины u равен $\sum_{i=1}^n a_i [u \in A_i]$.

Таким образом, в утверждении теоремы неявно присутствуют два параметра, m и n . Будем проводить доказательство индукцией по m сразу при всех n .

Рассмотрим базу индукции при $m = 1$. Пусть множество A из набора $\mathfrak{A}$ делит граф на a частей. Вершина x принадлежит A и не принадлежит остальным множествам $\mathfrak{A}$. Будем рассматривать части $\mathfrak{A}$ -разбиения в виде, представленном в предложении 1. Заметим, что вершина x принадлежит всем a частям A -разреза, а для разрезов по каждому из остальных разделяющих множеств набора $\mathfrak{A}$ вершина x принадлежит только какой-то одной части. Таким образом, x принадлежит пересечению только a комбинаций. Следовательно, x принадлежит (а значит и является граничной) не более чем a частям.

Рассмотрим индуктивный переход $(m - 1) \rightarrow m$. По построению $n \geq m$. Разберем сначала случай $n = m$, то есть случай, когда x принадлежит всем множествам $\mathfrak{A}$. Будем доказывать, что во всем $\mathfrak{A}$ -разбиении не более, чем $a = \sum_{i=1}^n a_i$ невырожденных частей, от противного. Предположим, что этих частей $a + b$, где $b > 0$. Обозначим через C объединение всех множеств $\mathfrak{A}$ и через D их пересечение. Пусть $d = |D|$. Оценим сумму размеров границ невырожденных частей $\mathfrak{A}$ -разбиения (обозначим это число через T) двумя способами.

По индукционному предположению для каждой вершины из $C \setminus D$ число частей, в границу которых она входит, не превосходит ее веса. Каждая вершина из D граничит не больше чем с $a + b$ невырожденными частями. Вес каждой вершины из D равен a . Таким образом, сумма размеров границ невырожденных частей $\mathfrak{A}$ -разбиения превышает общий вес всех вершин не более чем на db . Сумма весов всех вершин равна

$$k \sum_{i=1}^n a_i = ka,$$

так как каждое множество A_i вносит в суммарный вес вершин C вклад, равный ka_i . Итак, $T \leq ka + db$.

С другой стороны, как уже было отмечено в предложении 2, граница каждой невырожденной части состоит не менее чем из k вершин. Следовательно, $T \geq bk + ak$, откуда $d \geq k$, что противоречит определению d . Таким образом, всего невырожденных частей $\mathcal{A}$ -разбиения не больше a , следовательно и x граничит не более чем с a частями.

Разберем теперь случай $n > m$. Применяя теорему к уже доказанному случаю $n = m$, получим, что найдется не более $a = \sum_{i=1}^m a_i$ невырожденных частей $\mathcal{B}$ -разбиения, $\mathcal{B} = \{A_1, \dots, A_m\}$. Отсюда, по предложению 3, число $\mathcal{B}$ -комбинаций, пересечение которых содержит хотя бы одну вершину, не лежащую ни в одном из множеств $\mathcal{A}$, не более a . Как и в рассуждениях при доказательстве базы индукции, вершина x принадлежит только какой-то одной части разреза по каждому из разделяющих множеств набора $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$. Следовательно, уже $\mathcal{A}$ -комбинаций, пересечение частей которых будет представлять невырожденную часть $\mathcal{A}$ -разбиения, содержащую x , будет не больше a . Таким образом, x входит в границу не более чем a невырожденных частей.

4. Основная теорема

Для дальнейших рассуждений нам необходимо подробно изучить разбиение графа двумя разделяющими множествами. Сейчас мы введем набор понятий и обозначений (клеточный язык), которые будут использованы в доказательстве почти всех последующих утверждений.

Пусть A и B — k -разделяющие множества, делящие граф соответственно на a и b частей. Обозначим части A -разреза через $P_1, \dots, P_a$, части B -разреза через $Q_1, \dots, Q_b$. Это значит, что при удалении множества A из графа он разделится на компоненты связности $P_1 \setminus A, \dots, P_a \setminus A$.

Опишем таблицу $(a + 1) \times (b + 1)$. Ее столбцы будут соответствовать множествам $A, P_1 \setminus A, \dots, P_a \setminus A$, строки — множествам $B, Q_1 \setminus B, \dots, Q_b \setminus B$. В каждую клетку поместим вершины графа из пересечения множеств, соответствующих строке и столбцу этой клетки. Клетку будем называть пустой, если в ней не лежит ни одной вершины. В левой верхней клетке (будем называть ее угловой) будут лежать вершины множества $D = A \cap B$. Клетки левого (нулевого) столбца и верхней (нулевой) строки будем называть крайними, остальные — внутренними. Будем говорить, что внутренняя клетка граничит с самой верхней клеткой своего столбца, с самой левой клеткой своей строки и с угловой клеткой. Число вершин в клетках зададим матрицей $\{g_{ij}\}$, где $0 \leq j \leq a, 0 \leq i \leq b$.

В этих обозначениях предложение 1 можно сформулировать следующим образом: любая невырожденная часть $\{A, B\}$ -разбиения есть объединение вершин какой-то непустой внутренней клетки и граничащих с ней крайних клеток. По предложению 3, каждое такое объединение является невырожденной частью, причем ее границей будут в точности вершины из крайних клеток, ведь это те вершины этой части, которые лежат в A или B . Внутренностью этой части будут вершины данной внутренней клетки. Согласно предложению 2, общее число вершин в клетках, граничащих с данной непустой внутренней клеткой, должно быть не меньше k . Это можно также сформулировать следующим образом:

$$1 \leq j \leq a, \quad 1 \leq i \leq b, \quad g_{ij} \neq 0 \implies g_{00} + g_{0j} + g_{i0} \geq k.$$

Определение 7. Пусть A и B — k -разделяющие множества. Назовем часть B -разреза Q дальней для A , если существует не более одной части A -разреза P такой, что $P \cap Q$ содержит хотя бы одну вершину вне $A \cup B$. В противном случае будем называть Q ближней.

Переведем это определение на клеточный язык: часть Q_i дальняя, если в строке $Q_i \setminus B$ не более одной непустой внутренней клетки, то есть среди чисел $g_{i1}, \dots, g_{ia}$ не более одного ненулевого.

Лемма 1. Пусть A и B — k -разделяющие множества, делящие граф соответственно на a и b частей, $a \geq 3$. Тогда среди частей B -разреза есть не более одной ближней для A .

Доказательство. Будем доказывать эту лемму на клеточном языке, используя метод от противного. Пусть Q_1 и Q_2 — ближние части. Это значит, что в первой и второй строках нашей таблицы есть хотя бы по две непустых внутренних клетки. Отметим по непустой внутренней клетке в этих строках так, чтобы отмеченные клетки лежали в разных столбцах. Не умаляя общности можно считать, что это клетки $(1, 1)$ и $(2, 2)$. Введем обозначения для крайних клеток, которые граничат с выбранными. Пусть

$$\begin{aligned} A_1 &= A \cap (Q_1 \setminus B), & A_2 &= A \cap (Q_2 \setminus B), \\ B_1 &= B \cap (P_1 \setminus A), & B_2 &= B \cap (P_2 \setminus A), \end{aligned}$$

а также пусть $D = A \cap B$.

Используя предложение 2 в клеточной формулировке, получим, что

$$g_{00} + g_{01} + g_{10} \geq k, \quad g_{00} + g_{02} + g_{20} \geq k.$$

С другой стороны A и B — k -разделяющие множества, откуда

$$g_{00} + g_{10} + g_{20} \leq k, \quad g_{00} + g_{01} + g_{02} \leq k.$$

Следовательно,

$$g_{01} = g_{20}, \quad g_{10} = g_{02}, \quad g_{00} + g_{01} + g_{02} = g_{00} + g_{10} + g_{20} = k. \quad (1)$$

Вспомним теперь о том, что $a \geq 3$. Рассмотрим P_3 , еще одну часть A -разреза. Тогда $P_3 \setminus A$ — вершины одной из компонент связности, остающейся после удаления A . Следовательно $P_3 \setminus A$ (ребра проводим как в исходном графе) — связный граф. Более того, из любой вершины A есть ребро, ведущее в $P_3 \setminus A$, иначе A не было бы минимальным по числу вершин разделяющим множеством. Из равенств (1) следует, что все вершины B лежат в $P_1 \cup P_2$, следовательно, их нет в $P_3 \setminus A$. Отсюда получаем, что $P_3 \setminus A$ лежит в одной компоненте связности после удаления B , более того, в этой же компоненте лежат все вершины $A \setminus (A \cap B)$. Последнее утверждение верно, поскольку из каждой вершины $A \setminus (A \cap B)$ выходит ребро, ведущее в $P_3 \setminus A$. По определению A_1 состоит из вершин A , попавших в первую компоненту B -разреза, а A_2 — из вершин, попавших во вторую. Следовательно, либо A_1 , либо A_2 пусто. Откуда, $g_{10} = 0$ или $g_{20} = 0$, не умаляя общности можно считать, что верно второе. Тогда из (1) следует, что

$$g_{20} = g_{01} = 0, \quad g_{10} = g_{02}, \quad g_{00} + g_{10} = g_{00} + g_{02} = k. \quad (2)$$

Таким образом, все вершины B распределены между D и B_2 . Теперь посмотрим на вторую строчку (то есть $Q_2 \setminus B$) в свете только что полученной формулы (2). Кроме $(2, 2)$ в ней должна быть еще одна непустая внутренняя клетка. Посмотрим на граничащие с ней крайние клетки. Самая левая в строке клетка $A_2 = A \cap (Q_2 \setminus B)$ пустая. Самая верхняя в столбце, это не D и не B_2 , следовательно, тоже пустая. Поэтому граница невырожденной части, соответствующей рассматриваемой внутренней клетке, состоит только из D . Но $|D| < k$, и мы приходим к противоречию с предложением 2 в клеточной форме.

Замечание 1. Почти такими же рассуждениями можно показать, что в условиях только что доказанной леммы среди частей A -разреза тоже не более одной ближней для B .

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ — набор k -разделяющих множеств k -связного графа. Пусть a_i , $1 \leq i \leq n$, — число частей, на которые множество A_i режет граф. Тогда весь набор разбивает граф не более чем на

$$\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n [a_i > 2] + [\forall i \ a_i > 2] \quad (3)$$

невырожденных частей.

Доказательство. Будем доказывать теорему индукцией по числу тех i , для которых $a_i > 2$, иначе говоря, индукцией по $\sum_{i=1}^n [a_i > 2]$.

В качестве базы рассмотрим два случая. В первом случае $n = 1, a_1 > 2$. Тогда существует a_1 невырожденных частей A_1 -разреза и это ровно тот результат, который дает формула (3).

Во втором случае $a_1 = \dots = a_n = 2$. Пусть C — объединение множеств $\mathfrak{A}$. Согласно теореме о пограничных частях число частей, с которыми граничит данная вершина C , не превосходит веса этой вершины. Суммарный вес вершин C равен $k \sum_{i=1}^n a_i$. Размер границы каждой невырожденной части не меньше k . Следовательно, число невырожденных частей не больше $\sum_{i=1}^n a_i = 2n$, формула (3) доказана.

Рассмотрим индукционный переход. Пусть $\mathfrak{A}$ не описывается ни одним из двух только что разобранных случаев. Тогда $n \geq 2$ и существует i такое, что $a_i > 2$. Не умаляя общности, можно считать, что $a_n > 2$. Применим для $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \setminus \{A_n\}$ индукционное предположение. Заметим, что формула (3) дает для $\mathfrak{A}$ результат на $a_n - 1$ больший, чем для $\mathfrak{A}'$. Докажем, что число невырожденных частей в $\mathfrak{A}$ -разбиении увеличилось не более чем на $a_n - 1$ по сравнению с $\mathfrak{A}'$.

По предложению 1 каждая невырожденная часть $\mathfrak{A}'$ -разбиения ($\mathfrak{A}$ -разбиения) есть пересечение какой-то $\mathfrak{A}'$ -комбинации ($\mathfrak{A}$ -комбинации). Если $\mathfrak{A}$ -комбинация получается из данной $\mathfrak{A}'$ -комбинации добавлением какой-то части A_n -разреза, будем говорить, что первая выросла из второй. Посмотрим, из чего выросли комбинации, соответствующие невырожденным частям $\mathfrak{A}$ -разбиения.

Если $\mathfrak{A}'$ -комбинация не соответствует никакой невырожденной части $\mathfrak{A}'$ -разбиения, то ее пересечение (по предложению 3) содержит только вершины из множеств $\mathfrak{A}'$. Следовательно, пересечение частей любой комбинации, которая вырастет из данной, может дать только вырожденную часть $\mathfrak{A}$ -разбиения.

Рассмотрим случай, когда $\mathfrak{A}'$ -комбинация соответствует какой-то невырожденной части $\mathfrak{A}'$ -разбиения и содержит хотя бы одну дальнюю часть для A_n . Тогда, по определению дальней части, к этой комбинации можно добавить не более одной части A_n -разреза так, чтобы пересечение полученной $\mathfrak{A}$ -комбинации не лежало целиком в объединении множеств $\mathfrak{A}$. Следовательно, из нашей комбинации вырастет не более одной $\mathfrak{A}$ -комбинации, соответствующей невырожденной части $\mathfrak{A}$ -разбиения.

Наконец, по лемме 1 у каждого разделяющего множества из набора $\mathfrak{A}'$ имеется не более одной ближней части для A_n . Следовательно, существует не более одной ближней $\mathfrak{A}'$ -комбинации, соответствующей невырожденной части $\mathfrak{A}'$ -разбиения и не содержащей ни одной дальней части. Из такой части может вырасти не более a_n $\mathfrak{A}$ -комбинаций, соответствующих невырожденным частям $\mathfrak{A}$ -разбиения.

Таким образом, число $\mathfrak{A}$ -комбинаций, соответствующих невырожденным частям $\mathfrak{A}$ -разбиения, превосходит количество невырожденных частей $\mathfrak{A}'$ -разбиения не более чем на $a_n - 1$.

Замечание 2. Если $k > 1$, то для любого набора $a_1, \dots, a_n$ существуют граф и соответствующий этим числам набор $\mathfrak{A}$ разделяющих множеств, для которых число невырожденных частей в разбиении в точности равно (3). Если $k = 1$, то можно доказать более сильную оценку: в разбиении связного графа 1-разделяющими множествами будет не более $1 - n + \sum_{i=1}^n a_i$ невырожденных частей. Отличие от основного случая объясняется тем, что если резрез по каждой-либо из двух вершин состоит из двух частей, то разбиение по этой паре не может содержать более трех частей.

Определение 8. Назовем $\mathfrak{A}$ -разбиение полным, если оно делит граф на число частей, вычисляемое по формуле (3).

Замечание 3. Из рассуждений в доказательстве теоремы 2 следует, что если $\mathfrak{A}$ -разбиение полное, $a_n > 2$ и $n > 1$, то разбиение $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \setminus A_n$ тоже должно быть полным.

Как было доказано в [10] (см. теорему 6 в [10]), если на граф и набор наложены специальные условия (граф должен быть слабо нерасщепимым и каждый представитель набора $\mathfrak{A}$ из n множеств должен быть зависим с каким-то разделяющим множеством графа), то в $\mathfrak{A}$ -разбиении найдется не более $2n$ невырожденных частей. Этот результат является частным случаем только что доказанной теоремы 2, так как в силу леммы 6 из [10] при наложенных на граф и набор $\mathfrak{A}$ условиях каждое множество $\mathfrak{A}$ режет граф на две части.

5. Полные разбиения

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{A}$ — полное разбиение, $\mathfrak{A}' = \{A_1, \dots, A_k\}$ — все его разделяющие множества, делящие граф на две части (то есть $a_1 = \dots = a_k = 2$). Тогда $\mathfrak{A}'$ -разбиение тоже полное, то есть в нем $2k$ частей.

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по $n - k$, где $n = |\mathfrak{A}|$. При $n = k$ утверждение очевидно. Проведем шаг индукции. Сначала применим замечание к теореме 2 (то есть выкинем A_n из $\mathfrak{A}$), затем используем индукционное предположение.

Определение 9. Назовем пару разделяющих множеств A, B независимой, если при B -разрезе все неудаленные вершины A оказались в одной компоненте связности. В противном случае будем называть ее зависимой с B .

В работах [8, 9] показано, что отношение независимости симметрично относительно множеств A и B . Далее мы будем просто писать, что A и B независимы (зависимы).

Теорема 4. Пусть набор $\mathfrak{A}$ дает полное разбиение, и пусть одно из множеств этого набора A режет граф на $a > 2$ частей. Тогда A независимо со всеми остальными множествами $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Возьмем произвольное множество B из $\mathfrak{A}$, отличное от A . Будем изучать разбиение графа набором $\{A, B\}$. Пусть $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \setminus A$. Мы будем пользоваться стандартными обозначениями клеточного языка.

Убедимся, что хотя бы одна из b частей B -разреза является ближней к A . Если бы все части были дальними, то из каждой $\mathcal{U}'$ -комбинации (соответствующей невырожденной части) выросло бы не более одной невырожденной части $\mathcal{U}$, что противоречит полноте $\mathcal{U}$ -разбиения. Не умаляя общности можно считать, что Q_1 ближняя. Тогда каждая внутренняя клетка в первой строке (соответствующей $Q_1 \setminus B$) невырождена. Действительно, в противном случае из ближней $\mathcal{U}'$ -комбинации вырастет не более $a-1$ невырожденной части $\mathcal{U}$ -разбиения. Если же ближней $\mathcal{U}'$ -комбинации нет, то в $\mathcal{U}$ -разбиении невырожденных частей будет не больше чем в $\mathcal{U}'$ -разбиении. В любом случае, приходим к противоречию с условием полноты.

Докажем еще один необходимый факт, состоящий в том, что в клеточной таблице есть хотя бы одна непустая внутренняя клетка вне первой строки. Рассмотрим $\mathcal{U}'' = \mathcal{U} \setminus B$. Если бы сформулированный факт не был верен, то из каждой части $\mathcal{U}''$ -разбиения выросло бы не более одной невырожденной части $\mathcal{U}$ -разбиения (во все $\mathcal{U}''$ -комбинации пришлось бы добавлять только Q_1 , чтобы получить невырожденную часть). Мы вновь получили противоречие с условием полноты, так как формула (3) показывает, что в $\mathcal{U}''$ -разбиении должно быть хотя бы на одну часть меньше. Не умаляя общности, будем считать, что найденная непустая внутренняя клетка есть клетка (2, 1).

Теперь рассмотрим, по каким крайним клеткам разошлись вершины A и B . Воспользуемся предложением 2 в клеточной форме:

$$g_{00} + g_{10} + g_{01} \geq k, \quad g_{00} + g_{10} + g_{02} \geq k, \quad g_{00} + g_{10} + g_{03} \geq k, \quad g_{00} + g_{20} + g_{01} \geq k.$$

Исходя из размеров A и B , получаем, что $g_{00} + g_{10} + g_{20} \leq k$ и $g_{00} + g_{01} + g_{02} + g_{03} \leq k$. Из этих двух серий неравенств сразу находим, что $g_{00} + g_{10} = k$, следовательно, все вершины A лежат в части B -разреза Q_1 , то есть A и B независимы.

6. Оценка числа частей в разрезе графа одним множеством

Теперь обратимся к вопросу, как оценить число частей в разрезе k -связного графа одним разделяющим множеством.

Теорема 5. Пусть A и B — зависимые разделяющие множества k -связного графа, $p \geq 2$, и степени всех вершин из множеств A и B не меньше $k(p+2)/(p+1)$. Тогда каждое из них делит граф не более чем на p частей.

Доказательство. Докажем теорему от противного. Предположим, что число частей в A -разрезе не меньше $p+1$. Будем вести рассуждения на клеточном языке. Докажем методом от противного, что в таблице для A и B не может быть двух непустых внутренних клеток, лежащих одновременно и в разных столбцах, и в разных строках. Предположим, что такие клетки нашлись. Не умаляя общности, можно считать, что это клетки (1, 1) и (2, 2). Тогда по предложению 2 в клеточной форме

$$g_{00} + g_{01} + g_{10} \geq k, \quad g_{00} + g_{02} + g_{20} \geq k. \quad (4)$$

Исходя из размеров A и B , получаем, что

$$g_{00} + g_{10} + g_{20} \leq k, \quad g_{00} + g_{01} + g_{02} \leq k. \quad (5)$$

Мы предположили, что A делит граф на $p + 1$ часть, значит, не меньше чем на три части. Рассмотрим третью часть P_3 . Из неравенств (4) и (5) следует, что $g_{03} = 0$, следовательно, в третьем столбце есть непустая внутренняя клетка $(j, 3)$. Тогда по предложению 2 в клеточной форме $g_{00} + g_{j0} \geq k$, откуда немедленно следует, что все вершины A лежат в Q_j . Получается противоречие с зависимостью A и B . Итак, все вершины графа, кроме $A \cup B$, лежат или в какой-то одной строчке, или в каком-то столбце. Разберем оба случая.

Если все вершины какой-то i -й строчки лежат в крайней клетке $(i, 0)$, то

$$g_{i0} > k/(p + 1). \quad (6)$$

Действительно, вершины этой клетки могут быть соединены только с другими вершинами этой клетки и с вершинами B . Если бы выписанное неравенство не выполнялось, вершины этой клетки имели бы степени не выше $k + k/(p + 1) - 1$, что противоречит условию. Аналогично, верен соответствующий факт для столбцов.

Итак, рассмотрим случай, когда все непустые внутренние клетки лежат в одной строке, скажем, в первой. Сюда же отнесем случай, когда непустых клеток нет вовсе. Согласно (6), верно неравенство $g_{20} > k/(p + 1)$, откуда $g_{00} + g_{10} < k - k/(p + 1)$. Тогда если в j -м столбце есть непустые внутренние клетки, то это может быть только клетка $(1, j)$, и по предложению 2 выполнено неравенство $g_{0j} > k/(p + 1)$. Если же их нет, то неравенство $g_{0j} > k/(p + 1)$ выполнено согласно (6). Суммируя эти неравенства по всем клеткам нулевой строки, приходим к противоречию с тем, что в множестве B только k вершин.

Теперь рассмотрим случай, когда все непустые внутренние клетки (и их не меньше одной) лежат в первом столбце. Согласно (6), верно неравенство $g_{0i} > k/(p + 1)$ при всех $i > 1$. Следовательно, $g_{01} + g_{00} < k/(p + 1)$. Не умаляя общности, будем считать, что в первом столбце непустой оказалась клетка $(1, 1)$. По предложению 2 в клеточной форме $g_{10} > k - k/(p + 1)$. Если клетка $(2, 1)$ пуста, то согласно неравенству (6) выполнено неравенство $g_{20} > k/(p + 1)$. Если она непуста, то, как и в случае с клеткой $(1, 1)$, получаем, что $g_{20} > k - k/(p + 1)$. В любом случае, приходим к тому, что размер A больше k . Получаем противоречие.

Следствие 1. Пусть степени всех вершин графа не меньше, чем $k(p + 2)/(p + 1)$, и каждый представитель набора $\mathcal{A}$ из n множеств зависит с каким-то разделяющим множеством графа. Тогда в $\mathcal{A}$ -разбиении будет не более $2n$ невырожденных частей при $p = 2$ и не более $pn - n + 1$ невырожденных частей в случае $p > 2$.

Доказательство. По теореме 5 каждое множество набора $\mathcal{A}$ режет граф не более чем на p частей. Отсюда и по теореме 2 получается необходимая оценка.

Замечание 4. Из результатов работы [10] вытекает частный случай этого следствия при $p = 2$, но при более грубой нижней оценке на степени вершин $3k/2$ против доказанной в этой статье $4k/3$.

Замечание 5. Если не делать предположения о зависимости, то можно предложить следующую тривиальную оценку: число частей в A -разрезе не превосходит максимальной степени вершин A , а значит, и максимума степеней в графе.

Автор признателен рецензенту за полезные замечания.

Список литературы

1. Харари Ф., *Теория графов*. Мир, Москва, 1973.
2. Оре О., *Теория графов*. Наука, Москва, 1968.
3. Matula D. W., k -Blocks and ultrablocks in graphs. *J. Comb Theory, Ser. B* (1978) **24**, 1–13.
4. Harary F., Kodama Y., On the genus of an n -connected graph. *Fund. Math.* (1964) **54**, 7–13.
5. MacLane S., A structural characterization of planar graph. *Duke Math. J.* (1937) **3**, 460–472.
6. Tutt W. T., *Connectivity in graphs*. Univ. Toronto Press, Toronto, 1966.
7. Hopcroft J. E., Tarjan R. E., Dividing a graph into triconnected components. *SIAM J. Comput.* (1973) **2**, 135–158.
8. Hohberg W., The decomposition of graphs into k -connected components. *Discrete Math.* (1992) **109**, 133–145.
9. Карпов Д. В., Пастор А. В., О структуре k -связного графа. *Записки научных семинаров ПОМИ* (2000) **266**, 76–106.
10. Карпов Д. В., Блоки в k -связном графе. *Записки научных семинаров ПОМИ* (2002) **293**, 59–93.
11. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О., *Конкретная математика*. Мир, Москва, 1998.
12. Iverson K. E., *A programming language*. Wiley, New York, 1962.

Статья поступила 17.07.2003.

Переработанный вариант поступил 07.06.2004.