Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Бувеч, М. А. Подколзина, Об алгоритмической разрешимости задачи об A -полноте для систем ограниченно-детерминированных функций, содержащих все одноместные S -о.-д. функции, *Дискрет. матем.*, 2012, том 24, выпуск 4, 56–69

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1210>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 15:57:06

Об алгоритмической разрешимости задачи об A -полноте для систем ограниченно-детерминированных функций, содержащих все одноместные S -о.-д. функции

© 2012 г. В. А. Бувич, М. А. Подколзина

Известно, что в общем случае задача об A -полноте конечных систем ограниченно-детерминированных функций алгоритмически неразрешима. Вместе с тем, критерий A -полноты может быть сформулирован в терминах A -предполных классов, а множество A -предполных классов описывается эффективно. В настоящей работе рассматриваются системы о.-д. функций, содержащие все о.-д. функции, зависящие от одной переменной и показано, что существует алгоритм для распознавания A -полноты таких систем.

1. Основные понятия и результаты

Пусть E_2^∞ — множество всех бесконечных последовательностей, составленных из нулей и единиц. Через P обозначим множество о.-д. функций, входные и выходные символы которых принимают значения из E_2^∞ . Будем считать, что на множестве P задана операция суперпозиции. Пусть $\mathfrak{M} \subseteq P$. Замыкание множества $\mathfrak{M}$ относительно этой операции обозначим $[\mathfrak{M}]$.

Пусть $t \geq 1$. Через E_2^t обозначим множество всех слов длины t , составленных из нулей и единиц. Элементы множества E_2^t будем представлять в виде $a = (a(1) \dots a(t))$.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P$. Отображение $\underbrace{E_2^\infty \times \dots \times E_2^\infty}_n$ в E_2^∞ , осуществляемое

о.-д. функцией $f(x_1, \dots, x_n)$, для всякого $t \geq 1$ однозначно определяет некоторое отображение множества $\underbrace{E_2^t \times \dots \times E_2^t}_n$ в E_2^t . Поэтому можно рассматривать область определения о.-д. функции $f(x_1, \dots, x_n)$ полагая, что эта о.-д. функция определена на множестве $\underbrace{E_2^\infty \times \dots \times E_2^\infty}_n \cup \left(\bigcup_{t \geq 1} \underbrace{(E_2^t \times \dots \times E_2^t)}_n \right)$.

Определение 1. Пусть $\tau \geq 1$, $\mathfrak{M} \subseteq P$. Множество $\mathfrak{M}$ называется τ -полным, если для любой о.-д. функции $f(x_1, \dots, x_n)$ из P в $[\mathfrak{M}]$ существует о.-д. функция $g(x_1, \dots, x_n)$ такая, что $f(a_1, \dots, a_n) = g(a_1, \dots, a_n)$ для всякого набора $(a_1, \dots, a_n)$ элементов из E_2^τ .

Определение 2. Пусть $\mathfrak{M} \subseteq P$. Множество $\mathfrak{M}$ называется A -полным, если для любого $\tau \geq 1$ множество $\mathfrak{M}$ является τ -полным.

Известно [1], что не существует алгоритма для распознавания A -полноты конечных множеств о.-д. функций.

Пусть $SP(1)$ — множество всех о.-д. функций, зависящих от одной переменной и не выпускающих ни одного значения из множества E_2^∞ . Это означает, что в любом состоянии автомата, вычисляющего о.-д. функцию $f(x)$ из $SP(1)$ реализуется функция алгебры логики, совпадающая либо с x , либо с $\bar{x}$.

Пусть S — множество всех таких систем $\mathfrak{M}$ из P , что $SP(1) \subset \mathfrak{M}$ и множество $\mathfrak{M} \subset SP(1)$ конечно. Целью настоящей работы является доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. Существует алгоритм для распознавания A -полноты систем о.-д. функций, принадлежащих множеству S .

Определение 3. Пусть $\tau \geq 1$. Замкнутое множество $\mathfrak{N} \subset P$ называется τ -предполным классом в P , если $\mathfrak{N}$ не является τ -полным, но для любой о.-д. функции $f \notin \mathfrak{N}$ множество $\mathfrak{N} \cup \{f\}$ будет τ -полно.

Справедливы следующие утверждения [3].

Предложение 1. Пусть $\tau \geq 1$. Множество о.-д. функций $\mathfrak{M} \subset P$ является A -полным тогда и только тогда, когда для любого $\tau \geq 1$ $\mathfrak{M}$ не принадлежит целиком ни одному из τ -предполных классов, причем для всякого $\tau \geq 1$ число τ -предполных классов конечно.

Предложение 2. Пусть $\mathfrak{M} \in S$. Множество о.-д. функций $\mathfrak{M}$ является A -полным тогда и только тогда, когда для любого $\tau \geq 1$ $\mathfrak{M}$ не принадлежит целиком ни одному из τ -предполных классов, содержащих множество $SP(1)$.

В [2] с использованием аппарата сохранения отношений для любого $\tau \geq 1$ описана совокупность всех τ -предполных классов в P . Нами будет получено аналогичное описание и для τ -предполных классов, содержащих множество $SP(1)$.

Пусть $h \geq 1$, $T = (t_1, \dots, t_h)$ — произвольный набор положительных целых чисел. Пусть

$$E_2^T = E_2^{t_1} \times \dots \times E_2^{t_h}.$$

Определение 4. Произвольное непустое подмножество $R \subseteq E_2^T$ называется отношением, заданным на E_2^T , а число h — арностью этого отношения.

Определение 5. О.-д. функция $f(x_1, \dots, x_n)$ сохраняет отношение R , если для любой совокупности $(a_1^1, \dots, a_h^1), \dots, (a_1^n, \dots, a_h^n)$ элементов из R набор слов $(f(a_1^1, \dots, a_h^1), \dots, f(a_1^n, \dots, a_h^n))$ также принадлежит R . Множество $\mathfrak{M} \subseteq P$ сохраняет отношение R , если каждая о.-д. функция из $\mathfrak{M}$ сохраняет это отношение.

Множество всех о.-д. функций, сохраняющих некоторое отношение R , обозначим через $U(R)$. Отношения R и R' назовем эквивалентными, если

$$U(R) = U(R').$$

Для описания семейств отношений, классы сохранения которых совпадают с τ -предполными, необходимо ввести ряд понятий и определений.

Пусть

$$E_2^* = \bigcup_{\tau \geq 1} E_2^\tau.$$

Пусть $h \geq 1$, $T = (t_1, \dots, t_h)$. На множестве E_2^T введем отношение предпорядка $\preceq$ (см. [2]). Для этого определим функцию π , отображающую множество $E_2^* \times E_2^*$ на $\{0, 1, 2, \dots\}$. Пусть $a' \in E_2^{t'}$, $a'' \in E_2^{t''}$, $t = \min\{t', t''\}$. Тогда

$$\pi(a', a'') = \begin{cases} 0, & a'(1) = a''(1), \dots, a'(t) = a''(t); \\ i, & a'(1) = a''(1), \dots, a'(t-i) = a''(t-i), \\ & a'(t-i+1) \neq a''(t-i+1), 1 \leq i \leq t-1; \\ t, & a'(1) \neq a''(1). \end{cases}$$

Определение 6. Пусть $A = (a_1, \dots, a_h)$ и $A' = (a'_1, \dots, a'_h)$ есть произвольные элементы из E_2^T ; считаем, что $A' \preceq A$ тогда и только тогда, когда для любых i, j , $1 \leq i, j \leq h$, выполняется неравенство $\pi(a'_i, a'_j) \leq \pi(a_i, a_j)$; считаем, что $A' < A$, если хотя бы для одной пары чисел i, j выполняется строгое неравенство $\pi(a'_i, a'_j) < \pi(a_i, a_j)$.

Считаем, что элементы A' и A'' совпадают по отношению предпорядка $\preceq$ тогда и только тогда, когда $A' \preceq A''$ и $A'' \preceq A'$.

Определение 7. Пусть $A \in E_2^T$, $A = (a_1, \dots, a_h)$. Множество всех элементов A' из E_2^T таких, что $A' \preceq A$ назовем π -подмножеством множества E_2^T , или просто π -множеством; при этом считаем, что A порождает это π -множество. Будем обозначать π -множества символом Δ .

Пусть $h \geq 2$; для некоторых i, j , $1 \leq i, j \leq h$, пусть $\pi(a_i, a_j) \neq 0$, и пусть π -множество Δ , порожденное элементом A , разбивается на два подмножества, а именно: $\Delta^{(M)}$ есть множество всех максимальных по предпорядку $\preceq$ элементов из Δ , и $\Delta^{(m)}$ есть множество всех остальных элементов. Если либо $h = 1$, либо $\pi(a_i, a_j) = 0$ для любых i, j , $1 \leq i, j \leq h$, то $\Delta^{(m)} \neq \emptyset$, $\Delta^{(M)} = \Delta$.

Нетрудно видеть, что для задания π -множества Δ можно использовать любой элемент из $\Delta^{(M)}$ и для любых i, j , $1 \leq i, j \leq h$, значение $\pi(a_i, a_j)$ не зависит от выбора элемента $a_1, \dots, a_h$ из $\Delta^{(M)}$. Поэтому число $\pi(a_i, a_j)$ будем обозначать через $\pi_\Delta(i, j)$.

Определение 8. Пусть $\Delta \subseteq E_k^T$ и $T = (t_1, \dots, t_h)$. Число h называется арностью π -множества Δ ; π -множество Δ называется приведенным, если либо $h = 1$, либо $h \geq 2$ и для любых i, j , $1 \leq i, j \leq h$, $i \neq j$, верно, что $\pi_\Delta(i, j) \neq 0$.

Определение 9. Пусть $t_1 > 1$, $t_2 > 1$, $t_2 \leq t_1$, $h_1 \geq 2$, $h_2 \geq 2$, $T = (\underbrace{t_1, \dots, t_1}_{h_1}, \underbrace{t_2, \dots, t_2}_{h_2})$,

Δ — приведенное π -подмножество E_2^T ; назовем π -множество Δ квазисимметричным, если

(1) равенство

$$\pi_\Delta(i_1, j_1) = \pi_\Delta(i_2, j_2)$$

справедливо для любых i_1, i_2 , $1 \leq i_1, i_2 \leq h_1$, j_1, j_2 , $h_1 + 1 \leq j_1, j_2 \leq h_1 + h_2$;

(2) найдутся $P_1 \subseteq \{t_2 - \pi_\Delta(1, h_1 + 1) + 2, \dots, t_1\}$, $P_2 \subseteq \{t_2 - \pi_\Delta(1, h_1 + 1) + 2, \dots, t_2\}$, обладающие следующими свойствами:

(а) $t_1 \in P_1, t_2 \in P_2$;

(б) для любых $i_1, 1 \leq i_1 \leq h_1, l_1 \in P_1, i_2, h_1 + 1 \leq i_2 \leq h_1 + h_2, l_2 \in P_2$ найдутся такие $j_1, 1 \leq j_1 \leq h_1, j_2, h_1 + 1 \leq j_2 \leq h_1 + h_2$, что выполняются равенства

$$\pi_{\Delta}(i_1, j_1) = t_1 - l_1 + 1, \quad \pi_{\Delta}(i_2, j_2) = t_2 - l_2 + 1;$$

(в) верно, что

$$\pi_{\Delta}(i'_1, j'_1) \neq t_1 - l'_1 + 1, \quad \pi_{\Delta}(i'_2, j'_2) \neq t_2 - l'_2 + 1$$

для любых $i'_1, j'_1, 1 \leq i'_1, j'_1 \leq h_1, i'_2, j'_2, h_1 + 1 \leq i'_2, j'_2 \leq h_1 + h_2, l'_1 \notin P_1, l'_2 \notin P_2$;

(г) если $t_1 = t_2$, то

$$h_1 = h_2, \quad P_1 = P_2.$$

Заметим, что

$$h_1 = 2^{|P_1|}, \quad h_2 = 2^{|P_2|},$$

где $|P_1|, |P_2|$ — мощности множеств P_1 и P_2 соответственно.

Пусть $\tau \geq 1$. Определим три семейства отношений — семейства $SC(\tau)$, $L(\tau)$ и $N(\tau)$.

Семейство отношений $SC(\tau)$. Пусть $t_1 > 1, t_2 > 1, t_2 \leq t_1 \leq \tau$. Считаем, что отношение R принадлежит подсемейству $\widetilde{SC}(t_1, t_2)$ семейства отношений $SC(\tau)$ тогда и только тогда, когда для некоторого набора $T = (\underbrace{t_1, \dots, t_1}_{h_1}, \underbrace{t_2, \dots, t_2}_{h_2})$, где $h_1 \geq 2, h_2 \geq 2$,

существует квазисимметричное π -множество Δ , принадлежащее E_2^T , такое, что $R = \Delta^{(m)}$.

Семейство отношений $SC(\tau)$ есть объединение семейств отношений $\widetilde{SC}(t_1, t_2)$, взятое по всем t_1, t_2 таким, что $t_1 > 1, t_2 > 1, t_2 \leq t_1 \leq \tau$.

Пусть $t \geq 1, T = (t, t, t, t)$. Через K^t обозначим подмножество E_2^T , состоящее из всех элементов (a_1, a_2, a_3, a_4) таких, что $\pi(a_i, a_j) \leq 1$ для любых $i, j, 1 \leq i, j \leq 4$.

Семейство отношений $L(\tau)$. Пусть $\tau \geq 1$. Считаем, что отношение R принадлежит семейству отношений $L(\tau)$ тогда и только тогда, когда отношение R является подмножеством множества K^t и состоит из таких и только таких элементов (a_1, a_2, a_3, a_4) , что

$$a_1(t) + a_2(t) = a_3(t) + a_4(t) \pmod{2}$$

для некоторого $t \leq \tau$.

Пусть $t \geq 1, T = (t, t), \Delta_t \subseteq E_2^T$, где Δ_t есть π -множество такое, что

$$\pi_{\Delta_t}(1, 2) = 1.$$

Семейство отношений $N(\tau)$. Пусть $\tau \geq 1$. Считаем, что отношение R принадлежит семейству отношений $N(\tau)$ тогда и только тогда, когда для некоторого $t \leq \tau$ отношение R совпадает с $\Delta_t^{(M)}$.

Теорема 2. Пусть $\tau \geq 1, \mathfrak{M} \in S$. Множество о.-д. функций $\mathfrak{M}$ является τ -полным тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ не сохраняет ни одного отношения, принадлежащего объединению семейств $SC(\tau)$, $L(\tau)$ и $N(\tau)$.

2. Доказательство теоремы 2

В [2] для любых $k \geq 2$, $\tau \geq 1$ с использованием аппарата сохранения отношений дано описание всех τ -предполных классов в множестве автоматных отображений (о.-д. функций). При $k = 2$ совокупность отношений, классы сохранения которых совпадают с τ -предполными, распадается на пять семейств — семейства $L(\tau)$, $N(\tau)$, $M(\tau)$, $V(\tau)$ и $T(\tau)$. Определим семейства отношений $M(\tau)$, $V(\tau)$ и $T(\tau)$.

Семейство отношений $M(\tau)$. Пусть $\tau \geq 1$. Считаем, что отношение R принадлежит семейству отношений $M(\tau)$ тогда и только тогда, когда для некоторого $t \leq \tau$ имеет место следующее: $R \subset \Delta_t$; $\Delta_t^{(m)} \subset R$; если $(a_1, a_2) \in \Delta_t^{(M)}$, то либо $(a_1, a_2) \in R$, но $(a_2, a_1) \notin R$, либо $(a_1, a_2) \notin R$, но $(a_2, a_1) \in R$.

Пусть $t \geq 2$, $T = (t, t)$, $\tilde{\Delta}_t$ есть π -подмножество E_2^T такое, что

$$\pi_{\tilde{\Delta}_t}(1, 2) = 2.$$

Семейство отношений $V(\tau)$. Пусть $\tau \geq 2$. Считаем, что отношение R принадлежит семейству отношений $V(\tau)$ тогда и только тогда, когда $R \subset \tilde{\Delta}_t$ для некоторого t , $2 \leq t \leq \tau$, и имеет место следующее:

- (а) для любого $a_1 \in E_2^t$ существует $a_2 \in E_2^t$ такое, что набор (a_1, a_2) принадлежит множеству $R \cap \tilde{\Delta}_t^{(M)}$;
- (б) если (a_1, a_2) принадлежит R , то (a_2, a_1) также принадлежит R ;
- (в) набор (a_1, a_2) из $\tilde{\Delta}_t^{(m)}$ принадлежит R тогда и только тогда, когда $a_1(t) = a_2(t)$;
- (г) пусть (a_1, a_2) принадлежит множеству $R \cap \tilde{\Delta}_t^{(M)}$, a'_1, a'_2 из E_2^t таковы, что $\pi(a_1, a'_1) = 1$, $\pi(a_2, a'_2) = 1$; тогда набор (a'_1, a'_2) также принадлежит множеству $R \cap \tilde{\Delta}_t^{(M)}$, но каждый из наборов (a_1, a'_2) , (a'_1, a_2) этому множеству не принадлежит.

Определение 10. Пусть $h \geq 1$ и Δ есть произвольное π -множество арности h . Подстановку γ чисел $1, \dots, h$ назовем Δ -подстановкой, если для любого элемента $(a_1, \dots, a_h)$ из Δ набор $(a_{\gamma(1)}, \dots, a_{\gamma(h)})$ также принадлежит Δ .

Семейство отношений $T(\tau)$. Пусть $\tau \geq 2$. Считаем, что отношение R принадлежит семейству отношений $T(\tau)$ тогда и только тогда, когда $R \subset \Delta$ для некоторых $h \geq 1$, $T = (t_1, \dots, t_h)$, и приведенного π -множества Δ таких, что $\max\{t_1, \dots, t_h\} \leq \tau$, $\Delta \subseteq E^T$, и имеет место следующее:

- (1) $\Delta^{(m)} \subseteq R$;
- (2) пусть $n \geq 2$, $a_1^1, \dots, a_h^1, \dots, (a_1^n, \dots, a_h^n)$ есть последовательность элементов из $\Delta \setminus R$ и пусть существуют числа $i_1, j_2, \dots, i_{n-1}, j_n$ из $\{1, \dots, h\}$ такие, что для любого l , $1 \leq l \leq n-1$, верны равенства $t_{i_l} = t_{j_{l+1}}$ и $\pi(a_{i_l}^l, a_{j_{l+1}}^{l+1}) = 1$; тогда существует такая Δ -подстановка γ , что для любых i, j , $1 \leq i, j \leq h$, $i \neq j$, верно следующее:
 - (а) $\pi(a_i^1, a_{\gamma(i)}^n) \neq 1$;
 - (б) $\pi(a_i^1, a_{\gamma(i)}^n) \neq \pi_{\Delta}(i, j)$;
- (3) пусть $h = 2$; тогда множество $R \cap \Delta^{(M)}$ непусто.

Заметим, что семейство отношений $SC(\tau)$ является подсемейством семейства отношений $T(\tau)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3 ([2, 3]). Пусть $\tau \geq 1$. Тогда верно, что замкнутое подмножество $\mathfrak{N}$ множества P является τ -предполным классом в P тогда и только тогда, когда существует $R \in L(\tau) \cup N(\tau) \cup M(\tau) \cup V(\tau) \cup T(\tau)$ такое, что

$$\mathfrak{N} = U(R).$$

Лемма 1. Пусть $\tau \geq 1$, $R \in M(\tau)$. Тогда $SP(1) \not\subseteq U(R)$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть для некоторого t , $1 \leq t \leq \tau$, верно, что $R \subset \Delta_t$. Пусть $SP(1) \subseteq U(R)$. Пусть (a_1, a_2) — произвольный набор из $\Delta_t^{(M)}$, принадлежащий R . Очевидно, в $SP(1)$ существует такая о.-д. функция $f(x)$, что $f(a_1) = a_2$, $f(a_2) = a_1$. Но тогда и набор (a_2, a_2) должен принадлежать R , что противоречит определению семейства отношений $M(\tau)$.

Лемма 2. Пусть $\tau \geq 2$, $R \in V(\tau)$. Тогда $SP(1) \not\subseteq U(R)$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть для некоторого t , $2 \leq t \leq \tau$, верно, что $R \subset \tilde{\Delta}_t$. Пусть $SP(1) \subseteq U(R)$. Пусть (a_1, a_2) — произвольный набор из $\tilde{\Delta}_t^{(M)}$, принадлежащий R и элемент a_3 из E_2^t таков, что $\pi(a_2, a_3) = 1$. Нетрудно видеть, что в $SP(1)$ существует такая о.-д. функция $f(x)$, что $f(a_1) = a_1$, $f(a_2) = a_3$. Это означает, что набор (a_1, a_3) должен принадлежать $U(R)$. Однако это противоречит определению семейства отношений $V(\tau)$.

Лемма 3. Пусть $\tau \geq 1$, $R \in T(\tau)$. Пусть $U(R) \neq P$, $SP(1) \subseteq U(R)$. Тогда R принадлежит подсемейству $SC(\tau)$ семейства отношений $T(\tau)$.

Доказательство. Пусть $h \geq 1$, $T = (t_1, \dots, t_h)$ — такой набор положительных целых чисел, что $\max\{t_1, \dots, t_h\} \leq \tau$. Пусть Δ — произвольное π -подмножество E_2^T , $R \subset \Delta$, и $SP(1) \subseteq U(R)$. Рассмотрим возможные случаи.

1. Пусть $R \cap \Delta^{(M)} \neq \emptyset$. Тогда, очевидно, R должно совпадать с Δ . Однако, тогда $U(R) = P$, чего не может быть по условию леммы. Таким образом, $\Delta \setminus R = \Delta^{(M)}$ и, кроме того, $h > 2$ (см. п. 3 в определении семейства отношений $T(\tau)$).

2. Пусть набор $(a_1, \dots, a_h)$ принадлежит $\Delta^{(M)}$, то есть принадлежит $\Delta \setminus R$, и существует i , $1 \leq i \leq h$, такое, что $\pi(a_i, a_j) \geq 2$ для всех j , $1 \leq j \leq h$, $j \neq i$. Пусть a' из $E_2^{t_i}$ таково, что $\pi(a, a') = 1$. Нетрудно видеть тогда, что набор $(a_1, \dots, a_{i-1}, a'_i, a_{i+1}, \dots, a_h)$ также принадлежит $\Delta \setminus R$ и не существует такой Δ -подстановки γ , что $\pi(a_i, a'_{\gamma(i)}) \neq 1$ (см. п. 2а в определении семейства отношений $T(\tau)$). Отсюда следует, что для любого i_1 , $1 \leq i_1 \leq h$, должно существовать j_1 , $1 \leq j_1 \leq h$, $j_1 \neq i_1$, такое, что $\pi(i_1, j_1) = 1$; таким образом, h четно и $h = 4$.

3. Пусть $h = 4$. Очевидно, что тогда $R \subseteq SC(\tau)$.

4. Пусть $h \geq 6$. Пусть существуют $i, j, l, 1 \leq i, j, l \leq h, i \neq j, i \neq l, j \neq l$, такие, что $\pi_\Delta(i, j) = \pi_\Delta(i, l), \pi_\Delta(j, l) < \pi_\Delta(i, j)$, и не существует такой Δ -подстановки, что $\gamma(i) = i, \gamma(j) = l, \gamma(l) = j$. Покажем, что тогда $SP(1) \not\subseteq U(R)$. Как было установлено, $R \cap \Delta^{(M)} = \emptyset$ (см. п. 1)). Поэтому в $\Delta^{(M)}$ и, следовательно, в $\Delta \setminus R$ существуют наборы $(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots, a_{l-1}, a_l, a_{l+1}, \dots, a_h), (a_1, \dots, a_{i-1}, a'_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a'_j, a_{j+1}, \dots, a_{l-1}, a'_l, a_{l+1}, \dots, a_h)$, для которых выполняются равенства $\pi(a_i, a'_i) = 1, a'_j(t_j - \pi_\Delta(j, l) + 1) = a_l(t_j - \pi_\Delta(j, l) + 1), a'_l(t_j - \pi_\Delta(j, l) + 1) = a_j(t_j - \pi_\Delta(j, l) + 1)$. Но тогда для любой Δ -подстановки $\tilde{\gamma}$ такой, что $\pi(a_i, a'_{\tilde{\gamma}(i)}) = 1$ мы получаем, что $\pi(a_j, a'_{\tilde{\gamma}(j)}) = \pi_\Delta(j, l), \pi(a_l, a'_{\tilde{\gamma}(l)}) = \pi_\Delta(j, l)$, что противоречит п. 2б в определении семейства отношений $T(\tau)$. Таким образом, если $h \geq 6$, то для любых $i, j, l, 1 \leq i, j, l \leq h, i \neq j, i \neq l, j \neq l$ таких, что $\pi_\Delta(i, j) = \pi_\Delta(i, l)$ и $\pi_\Delta(j, l) < \pi_\Delta(i, j)$ должна существовать Δ -подстановка γ такая, что $\gamma(i) = i, \gamma(j) = l, \gamma(l) = j$. Но тогда, с учетом п. 2, нетрудно видеть, что π -множество Δ является квазисимметричным, $R = \Delta^{(m)}$ и, следовательно, R принадлежит семейству отношений $SC(\tau)$.

Справедливость теоремы 2 следует из лемм 1, 2 и 3.

Из теоремы 2 и предложения 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть $\mathfrak{M} \in S$. Множество о.-д. функций $\mathfrak{M}$ является A -полным тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ не сохраняет ни одного отношения, принадлежащего объединению семейств $SC(\tau), L(\tau)$ и $N(\tau)$ для любого $\tau \geq 1$.

3. Доказательство теоремы 1

Для доказательства теоремы 1 введем ряд необходимых понятий и докажем три леммы.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) = y$ есть о.-д. функция из P , задаваемая системой канонических уравнений (см. [5])

$$\begin{aligned} q(1) &= q_0, \\ q(t+1) &= \varphi(x_1(t), \dots, x_n(t), q(t)), \\ y(t) &= \psi(x_1(t), \dots, x_n(t), q(t)), \end{aligned} \quad (1)$$

где $q(t) \in Q, Q = \{q_0, q_1, \dots, q_{p-1}\}$ есть множество состояний о.-д. функции f, q_0 есть ее начальное состояние.

Обычным образом (см. [3]), исходя из (1), запишем рекуррентное соотношение

$$q(t) = \varphi^{t-1}(x_1(1), \dots, x_1(t-1), \dots, x_n(1), \dots, x_n(t-1)), \quad t \geq 2.$$

Пусть $(a_1, \dots, a_n)$ есть произвольный набор слов из E_2^{t-1} ; представим его в виде $a_1 = (a_1(1), \dots, a_1(t-1)), \dots, a_n = (a_n(1), \dots, a_n(t-1))$.

Пусть

$$\varphi^{t-1}(a_1(1), \dots, a_1(t-1), \dots, a_n(1), \dots, a_n(t-1), q_0) = q_i, \quad 0 \leq q \leq p-1. \quad (2)$$

Вместо (2) будем использовать запись $\varphi(a_1, \dots, a_n, q_0) = q_i$ и считать, что состояние q_i является $(t-1)$ -достижимым из начального состояния о.-д. функции f (или просто $(t-1)$ -достижимым). Кроме того, будем считать, что начальное состояние q_0 о.-д. функции f является 0-достижимым.

Лемма 4. Пусть $\mathfrak{M} = \{f_1, \dots, f_m\}$ есть система о.-д. функций со множествами состояний $Q_1, \dots, Q_m$, соответственно, причем $|Q_1| = p_1, \dots, |Q_m| = p_m$. Пусть

$$\tilde{\tau} > \prod_{i=1}^m 2^{p^i},$$

и пусть $\mathfrak{M}$ не сохраняет ни одного отношения, принадлежащего семейству отношений $L(\tilde{\tau})$. Тогда $\mathfrak{M}$ не сохраняет никакого отношения из объединения $\bigcup_{\tau=1}^{\infty} L_2(\tau)$.

Доказательство. Очевидно, система $\mathfrak{M}$ не сохраняет ни одного отношения из семейства $L(\tau')$, если $\tau' < \tilde{\tau}$. Предположим, что существует такое τ_1 , $\tau_1 > \tilde{\tau}$, что $\mathfrak{M} \subseteq U(R)$, $R \in L(\tau_1)$. Из определения семейства отношений $L(\tau_1)$ следует, что тогда существует такое t , $\tilde{\tau} < t \leq \tau_1$, что для всякого j , $1 \leq j \leq m$, в любом $(t-1)$ -достижимом состоянии о.-д. функции f_j реализуется линейная функция алгебры логики. Будем считать, что t есть минимальное из всех чисел, обладающих данным свойством. Очевидно, что $t \geq 2$. Через $Q_1(t-1), \dots, Q_m(t-1)$ обозначим подмножества множеств $Q_1, \dots, Q_m$, состоящие из всех состояний, $(t-1)$ -достижимых из начальных состояний о.-д. функций $f_1, \dots, f_m$ соответственно. В силу неравенства $t > \tilde{\tau}$, существуют такие t_1 и t_2 , $2 \leq t_1 < t_2 < t$, что $Q_1(t_1-1) = Q_1(t_2-1), \dots, Q_m(t_1-1) = Q_m(t_2-1)$. Пусть $\tilde{t} = t - t_2 + t_1$. Нетрудно видеть, что для всякого j , $1 \leq j \leq m$, в любом состоянии из множества $Q_j(\tilde{t}-1)$ реализуется линейная функция алгебры логики. Это означает, что $\mathfrak{M} \subseteq U(R)$, $R \in L(\tilde{t})$. Однако $\tilde{t} < t$, что противоречит выбору числа t . Из полученного противоречия следует справедливость леммы 4.

Лемма 5. Пусть $\mathfrak{M} = \{f_1, \dots, f_m\}$ есть система о.-д. функций с множествами состояний $Q_1, \dots, Q_m$, соответственно, причем $|Q_1| = p_1, \dots, |Q_m| = p_m$. Пусть

$$\tilde{\tau} > \prod_{i=1}^m 2^{p^i},$$

и пусть $\mathfrak{M}$ не сохраняет ни одного отношения, принадлежащего семейству отношений $N(\tilde{\tau})$. Тогда $\mathfrak{M}$ не сохраняет никакого отношения из объединения $\bigcup_{\tau=1}^{\infty} N(\tau)$.

Доказательство леммы 5 совершенно аналогично доказательству леммы 4.

Пусть Δ — квазисимметрическое π -подмножество E_2^T , где $T = (t_1, \dots, t_1, t_2, \dots, t_2)$, $h_1 \geq 2, h_2 \geq 2, t_2 \leq t_1$, определяемое путем задания множеств P_1, P_2 .

Пусть

$$t_3 = t_2 - \pi_{\Delta}(1, h_1 + 1) + 1.$$

Пусть $t \in \{2, \dots, t_1\}$,

$$P_{1t} = P_1 \cap \{t_3 + 1, \dots, t - 1\},$$

$$P_{2t} = P_2 \cap \{t_3 + 1, \dots, t - 1\}.$$

Пусть

$$h_t = \begin{cases} 2^{|P_{1t}|} + 2^{|P_{2t}|}, & t > t_3 + 1, \\ 2, & t = t_3 + 1, \\ 1, & t < t_3 + 1; \end{cases}$$

если либо $P_{1t} \neq \emptyset$, либо $P_{2t} \neq \emptyset$, то будем считать, что, соответственно, либо $2^{|P_{1t}|} = 1$, либо $2^{|P_{2t}|} = 1$.

Пусть $T_t = \underbrace{(t-1, \dots, t-1)}_{h_t}$. Через Δ_t обозначим π -подмножество множества E_2^{T-t} ,

определяемое путем задания множества P_{1t} и множества P_{2t} , если $P_{2t} \neq \emptyset$ (заметим, что π -множество Δ_t , вообще говоря, не является квазисимметричным, однако, оно может быть задано согласно п. (а), (б) и (в) в определении квазисимметричных π -множеств. Очевидно, $P_{1t} \neq \emptyset$. Если же множество P_{2t} пусто, то положим

$$\pi_{\Delta_t, 0}(1, h_t) = t - t_3 - 1.$$

Пусть

$$\begin{aligned} P_1^t &= P_1 \cap \{t, \dots, t_1\}, \\ P_2^t &= P_2 \cap \{t, \dots, t_2\}, \quad t \leq t_2. \end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned} h_1^t &= 2^{|P_1^t|}, \\ h_2^t &= 2^{|P_2^t|}, \quad t \leq t_2. \end{aligned}$$

Пусть

$$T_1^t = \underbrace{(t_1 - t + 1, \dots, t_1 - t + 1)}_{h_1^t}, \quad T_2^t = \underbrace{(t_2 - t + 1, \dots, t_2 - t + 1)}_{h_2^t}.$$

Через Δ_1^t , Δ_2^t обозначим π -подмножества множеств $E_2^{T_1^t}$ и $E_2^{T_2^t}$, определенные путем задания множеств P_1^t и P_2^t соответственно.

Пусть

$$h_1^1 = 2^{|P_{1t}|}, \quad h_2^2 = 2^{|P_{2t}|}.$$

В дальнейшем, не ограничивая общности, будем считать, что $t < t_2 + 1$. Пусть $A \in \Delta$, $A = (a_1, \dots, a_h)$. Через A_t обозначим набор $(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{h_1^t}, \tilde{a}_{h_1^t+1}, \dots, \tilde{a}_{h_t})$, принадлежащий π -множеству Δ_t и составленный из префиксов слов $a_{h_1^t}^t, a_{2h_1^t}^t, \dots, a_{h_1^t h_1^t}^t, a_{h_1^t+h_2^t}^t, a_{h_1^t+2h_2^t}^t, \dots, a_{h_1^t+h_2^t h_2^t}^t$ соответственно.

Пусть $k \in \{1, \dots, h_1^1\}$, $l \in \{1, \dots, h_2^1\}$. Обозначим $A_1^{k,t}$, $A_2^{l,t}$ наборы $(\hat{a}_{1k}, \dots, \hat{a}_{h_1^t k})$ и $(\hat{a}_{1l}, \dots, \hat{a}_{h_2^t l})$, принадлежащие π -множествам Δ_1^t и Δ_2^t и составленные из суффиксов слов $a_{(k-1)h_1^t+1}, \dots, a_{(k-1)h_1^t+h_1^t}$ длины $t_1 - t + 1$ и суффиксов слов $a_{h_1^t+(l-1)h_2^t+1}, \dots, a_{h_1^t+(l-1)h_2^t+h_2^t}$ длины $t_2 - t + 1$ соответственно.

Очевидно, что для любого $t \leq t_2 \leq t_1$ по набору A из Δ набор A_t и последовательность наборов

$$A_1^{1,t}, \dots, A_1^{h_1^1,t}, A_2^{1,t}, \dots, A_2^{h_2^2,t} \quad (3)$$

определяются однозначно. Верно и обратное: если заданы набор A_t и последовательность наборов (3), то по ним легко восстановить порождающий их набор A .

Лемма 6. Пусть

$$\mathfrak{M} = \{f_1(x_1, \dots, x_{n_1}), \dots, f_m(x_1, \dots, x_{n_m})\}$$

есть система о.-д. функций с множествами состояний $Q_1, \dots, Q_m$ соответственно, причем $|Q_1| = p_1, \dots, |Q_m| = p_m$. Пусть

$$\tilde{\tau} > 3 \left(\prod_{i=1}^m 2^{m^i} \prod_{j=1}^m (n_j + 1)^{2p_j} + 1 \right)$$

и система $\mathfrak{M}$ не сохраняет ни одного отношения, принадлежащего семействам $SC(\tilde{\tau})$, $L(\tilde{\tau})$ и $N(\tilde{\tau})$. Тогда $\mathfrak{M}$ не сохраняет ни одного отношения из объединения $\bigcup_{\tau=1}^{\infty} SC(\tau)$.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что система $\mathfrak{M}$ состоит из одной о.-д. функции $f(x_1, \dots, x_n)$. Пусть Q — множество состояний этой о.-д. функции, а $\varphi(x_1(t), \dots, x_n(t), q(t))$ — ее функция переходов. Пусть $|Q| = p$. Предположим противное: пусть $\tau > \tilde{\tau}$, и о.-д. функция f сохраняет некоторое отношение R , принадлежащее подсемейству $\tilde{SC}(t_1 t_2)$ семейства отношений $SC(\tau)$, причем $t_1 > \tilde{\tau}$. Будем считать, что t_1 есть минимальное из чисел, обладающих указанным свойством. Рассмотрим квазисимметрическое π -множество Δ , для которого

$$R = \Delta^{(m)}.$$

Пусть Δ является π -подмножеством множества E_2^T , где

$$T = (\underbrace{t_1, \dots, t_1}_{h_1}, \underbrace{t_2, \dots, t_2}_{h_2}), \quad h_1 \geq 2, \quad h_2 \geq 2, \quad t_3 = t_2 - \pi_{\Delta}(1, h_1 + 1) + 1, \quad h = H_1 + h_2.$$

Пусть $\mathfrak{R} = (A_1, \dots, A_n)$ есть произвольный набор, составленный из элементов π -множества Δ . Пусть $t \in \{1, \dots, \tilde{\tau}\}$. Через $B^t(\Delta)$ обозначим множество всех наборов $\mathfrak{R}$, для которых $f(A_1, \dots, A_{nt}) \in \Delta_t^{(M)}$. Заметим, что для любого t , $2 \leq t \leq \tilde{\tau}$, множество $B^t(\Delta)$ непусто, так как в противном случае о.-д. функция f сохраняла бы некоторое отношение из объединения семейств $SC(\tilde{\tau})$, $L(\tilde{\tau})$ и $N(\tilde{\tau})$, чего не может быть по условию леммы.

Пусть $A_1 = (a_1^1, \dots, a_h^1), \dots, A_n = (a_1^n, \dots, a_h^n)$. Для любого i , $1 \leq i \leq n$, рассмотрим элемент A_{it} , принадлежащий π -множеству Δ_t . Пусть

$$A_{it} = \begin{cases} \tilde{a}_1^i, & t \leq t_3, \\ (\tilde{a}_1^i, \dots, \tilde{a}_{h_t^i}^i, \tilde{a}_{h_t^i+1}^i, \dots, \tilde{a}_{h_t^i+h_t^i}^i), & t_3 < t \leq t_2, \\ (\tilde{a}_1^i, \dots, \tilde{a}_{h_t^i}^i, a_{h_t^i+1}^i, \dots, a_h^i, & t_2 < t \leq t_1; \end{cases}$$

при $t \leq t_3$ будем считать, что $h_t^1 = 1$, $h_t^2 = 0$.

Рассмотрим последовательность

$$\varphi(\tilde{a}_1^1, \dots, \tilde{a}_1^n, q_0), \varphi(\tilde{a}_2^1, \dots, \tilde{a}_2^n, q_0), \dots, \varphi(\tilde{a}_{h_t^1}^1, \dots, \tilde{a}_{h_t^1}^n, q_0), \quad (4)$$

а при $t_3 < t \leq t_2$ рассмотрим также последовательность

$$\varphi(a_{h_t^1+1}^1, \dots, a_{h_t^1+1}^n, q_0), \varphi(a_{h_t^1+2}^1, \dots, a_{h_t^1+2}^n, q_0), \dots, \varphi(a_h^1, \dots, a_h^n, q_0). \quad (5)$$

Поставим в соответствие о.-д. функции $f(x_1, \dots, x_n)$, числу $t \in \{2, \dots, t_1\}$ и набору $\mathfrak{R}$ из $B^t(\Delta)$ набор

$$D_f(\mathfrak{R}, t) = (K, S_1^1, \dots, S_p^1, S_1^2, \dots, S_p^2),$$

где $K \subset \{1, \dots, n\}$, S_r^1, S_r^2 принадлежат множеству $\{0, 1, \dots, n\}$, $1 \leq r \leq p$, определенный следующим образом:

- (а) $m \in K$ тогда и только тогда, когда $A_{mt} \in \Delta_t^{(M)}$;
 (б) пусть в последовательности (4) состояние q_{r-1} , $1 \leq r \leq p$, встречается σ_r^1 раз, $\sigma_r^1 \geq 0$; тогда

$$S_r^1 = \min\{\sigma_r^1, n\};$$

- (в) пусть либо $t \leq t_3$, либо $t_2 < t \leq t_1$; тогда

$$S_r^2 = 0, \quad 1 \leq r \leq p.$$

- (г) пусть $t_3 < t \leq t_2$; пусть в последовательности (5) состояние q_{r-1} , $1 \leq r \leq p$, встречается σ_r^2 раз, $\sigma_r^2 \geq 0$; тогда

$$S_r^2 = \min\{\sigma_r^2, n\}.$$

Через $D_f(t)$ обозначим объединение множеств $D_f(\mathfrak{R}, t)$, взятое по всем наборам $\mathfrak{R}$, принадлежащим множеству $B^t(\Delta)$. Заметим, что мощность множества $D_f(t)$ не превосходит

$$C = 2^n(n+1)^{2p} + 1.$$

С учетом неравенства $t_1 > \tilde{\tau}$ и условий леммы, возникают три случая:

- (1) $t_2 - t_3 + 1 > C$, $t_3 + 1 < C$, $t_1 - t_2 < C$;
 (2) $t_2 - t_3 < C$, $t_3 + 1 > C$, $t_1 - t_2 < C$;
 (3) $t_2 - t_3 < C$, $t_3 + 1 < C$, $t_1 - t_2 > C$.

Рассмотрим первый случай. Как было отмечено выше, мощность множества $D_f(t)$ не превосходит C . Поэтому существуют такие t_4, t_5 , что $t_4 \geq t_3 + 2$, $t_4 < t_5 \leq t_2$ и $D_f(t_4)$ совпадает с $D_f(t_5)$. Очевидно, при этом можно считать, что $t_1 - t_5 + t_4 < \tilde{\tau}$.

Пусть

$$\begin{aligned} \tilde{t}_1 &= t_1 - t_5 + t_4, & \tilde{t}_2 &= t_2 - t_5 + t_4, & \tilde{t}_3 &= t_3, \\ \tilde{h}_1 &= h_{t_4}^1 h_1^{t_5}, & \tilde{h}_2 &= h_{t_4}^2 h_2^{t_5}, & \tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 &= \tilde{h}. \end{aligned}$$

Рассмотрим π -множество $\tilde{\Delta}$, которое определим следующим образом:

- (1) π -множество $\tilde{\Delta}$ является π -подмножеством $e_2^{\tilde{T}}$, где $\tilde{T} = (\underbrace{\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_1}_{\tilde{h}_1}, \underbrace{\tilde{t}_2, \dots, \tilde{t}_2}_{\tilde{h}_2})$;
 (2) π -множество $\tilde{\Delta}_{t_4}$ совпадает с π -множеством Δ_{t_4} ;
 (3) π -множества $\tilde{\Delta}_1^{t_4}$, $\tilde{\Delta}_2^{t_4}$ совпадают, соответственно, с π -множествами $\Delta_1^{t_5}$ и $\Delta_2^{t_5}$.

Нетрудно видеть, что π -множество $\tilde{\Delta}$ является квазисимметричным.
Пусть

$$\tilde{R} = \tilde{\Delta}^{(m)}.$$

В силу неравенства $t_1 - t_5 + t_4 < \tilde{t}$ и условий леммы, $f(x_1, \dots, x_n)$ не принадлежит $U(\tilde{R})$. Это означает, что существует набор $\tilde{\mathfrak{R}} = (\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)$, составленный из элементов множества $\tilde{\Delta}^{(m)}$, такой, что $f(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n) = \tilde{A}$, где $\tilde{A} \in \tilde{\Delta}^{(M)}$. Очевидно, $f(\tilde{A}_{1t_4}, \dots, \tilde{A}_{nt_4}) = \tilde{A}_{t_4}$. Из того, что $\tilde{A} \in \tilde{\Delta}^{(M)}$ следует, что $\tilde{A}_{t_4} \in \Delta_{t_4}^{(M)}$.

В силу того, что

$$D_f(t_4) = D_f(t_5),$$

существует такой набор $\mathfrak{R} = (A_1, \dots, A_n)$, составленный из элементов π -множества Δ и принадлежащий множеству $B^{t_5}(\Delta)$, что

$$D_f(\tilde{\mathfrak{R}}, t_4) = D(\mathfrak{R}, t_5). \quad (6)$$

Пусть

$$D_f(\tilde{\mathfrak{R}}, t_4) = D_f(\mathfrak{R}, t_5) = (K, S_1^1, \dots, S_p^1, S_1^2, \dots, S_p^2).$$

Заметим, что в силу неравенства $t_5 \leq t_2$ верно, что $(S_1^2, \dots, S_p^2) \neq \underbrace{(0, \dots, 0)}_p$.

Покажем, что исходя из равенства (6), по наборам $\tilde{\mathfrak{R}}$ и $\mathfrak{R}$ можно построить такой набор $\hat{\mathfrak{R}} = (\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_n)$ элементов множества Δ , что $\hat{A}_1 \in \Delta^{(m)}, \dots, \hat{A}_n \in \Delta^{(m)}$, но $f(\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_n) \in \Delta^{(M)}$.

Пусть $h_4 = h_{t_4}$, $h_5 = h_{t_5}$. Пусть

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{1t_4} &= (\tilde{a}_1^{14}, \dots, \tilde{a}_{h_4}^{14}), \dots, \tilde{A}_{nt_4} = (\tilde{a}_1^{n4}, \dots, \tilde{a}_{h_4}^{n4}), \\ \tilde{A}_{1t_5} &= (\tilde{a}_1^{15}, \dots, \tilde{a}_{h_5}^{15}), \dots, \tilde{A}_{nt_5} = (\tilde{a}_1^{n5}, \dots, \tilde{a}_{h_5}^{n5}). \end{aligned}$$

Рассмотрим два случая: $K = \emptyset$ и $K \neq \emptyset$.

Пусть вначале $K = \emptyset$. Это означает, что для всякого i , $1 \leq i \leq n$, $\tilde{A}_{it_4} \in \tilde{\Delta}_{t_4}^{(m)}$, $\tilde{A}_{it_5} \in \tilde{\Delta}_{t_5}^{(m)}$. В силу (6), для любого l , $1 \leq l \leq h_5$, существует $\tilde{l}$, $1 \leq \tilde{l} \leq h_4$, такое, что

$$\varphi(\tilde{a}_l^{15}, \dots, \tilde{a}_l^{n5}, q_0) = \varphi(\tilde{a}_{\tilde{l}}^{14}, \dots, \tilde{a}_{\tilde{l}}^{n4}, q_0);$$

при этом $\tilde{l} \leq h_{t_4}^1$ в том и только в том случае, когда $l \leq h_5^1$.

Очевидно, что для любого i , $1 \leq i \leq n$, в Δ существует элемент $\hat{A}_i$ такой, что $\hat{A}_{it_5} = A_{it_5}$ и для любого l , $1 \leq l \leq h_5$, выполняется равенство $\hat{A}_i^{lt_5} = \tilde{A}_i^{\tilde{l}t_4}$, где $\hat{A}_i^{lt_5} \in \Delta_{t_5}^{t_5}$, $\tilde{A}_i^{\tilde{l}t_4} \in \tilde{\Delta}_1^{t_4}$, если $l \leq h_{t_5}^1$, и $\tilde{l} \leq h_{t_4}^1$, $\hat{A}_i^{lt_5} \in \Delta_2^{t_5}$, $\tilde{A}_i^{\tilde{l}t_4} \in \tilde{\Delta}_2^{t_4}$, если $l > h_{t_5}^1$ и $\tilde{l} > h_{t_4}^1$ (заметим, что π -множество $\Delta_1^{t_5}$ совпадает с π -множеством $\tilde{\Delta}_1^{t_4}$, а π -множество $\Delta_2^{t_5}$ совпадает с π -множеством $\tilde{\Delta}_2^{t_4}$). Пусть

$$f(A_1, \dots, A_n) = A, \quad f(\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_n) = \hat{A}.$$

Так как K – пустое множество, справедливо включение $A_{1t_5} \in \Delta_{t_5}^{(m)}, \dots, A_{nt_5} \in \Delta_{t_5}^{(m)}$. Поэтому $\hat{A}_{1t_5} \in \Delta_{t_5}^{(m)}, \dots, \hat{A}_{nt_5} \in \Delta_{t_5}^{(m)}$ и $\hat{A}_1 \in R, \dots, \hat{A}_n \in R$. Вместе с тем, набор $\mathfrak{R}$

принадлежит множеству $B_f^{t_5}(\Delta)$ и $\hat{A}_{t_5} = A_{t_5}$. Поэтому $\hat{A}_{t_5} \in \Delta_{t_5}^{(M)}$. Из определения $\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_n$ следует, что

$$\hat{A}^{lt_5} = \tilde{A}^{\tilde{l}t_4}, \quad 1 \leq l \leq h_5, \quad 1 \leq \tilde{l} \leq h_4.$$

Однако $\tilde{A} \in \tilde{\Delta}^{(M)}$. Это означает, что $\tilde{A}^{\tilde{l}t_4}$ является максимальным элементом либо π -множества $\tilde{\Delta}_1^{t_4}$, либо π -множества $\tilde{\Delta}_2^{t_4}$, а $\tilde{A}^{lt_5}$ является максимальным элементом соответственно либо π -множества $\Delta_1^{t_5}$, либо π -множества $\Delta_2^{t_5}$. Нетрудно видеть, что тогда $\hat{A} \in \Delta^{(M)}$, $\hat{A} \notin R$ и о.д. функция $f(x_1, \dots, x_n)$ не сохраняет отношение R .

Пусть теперь $K \neq \emptyset$. Пусть

$$K = \{r_1, \dots, r_k\}, \quad k \leq n.$$

Тогда $\tilde{A}_{r_1 t_4} \in \tilde{\Delta}_{t_4}^{(M)}, \dots, \tilde{A}_{r_k t_4} \in \tilde{\Delta}_{t_4}^{(M)}, A_{r_1 t_5} \in \tilde{\Delta}_{t_5}^{(M)}, \dots, \tilde{A}_{r_k t_5} \in \tilde{\Delta}_{t_5}^{(M)}$. Набор $\mathfrak{R} = (\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)$ выбран так, что $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n$ принадлежат $\Delta^{(m)}$. Поэтому для любого j , $1 \leq j \leq k$, существует $\tilde{l}_j$, $1 \leq \tilde{l}_j \leq h_4$, такое, что $\tilde{A}_{r_j}^{\tilde{l}_j t_4}$ является минимальным элементом либо π -множества $\tilde{\Delta}_1^{t_4}$, либо π -множества $\tilde{\Delta}_2^{t_4}$.

Исходя из равенства (6), выберем в $\{1, \dots, h_5\}$ числа $l_1, \dots, l_k$ так, чтобы равенство

$$\varphi(\tilde{a}_{\tilde{l}_j}^{14}, \dots, \tilde{a}_{\tilde{l}_j}^{n4}, q_0) = \varphi(\tilde{a}_{l_j}^{15}, \dots, \tilde{a}_{l_j}^{n5}, q_0)$$

выполнялось для любого j , $1 \leq j \leq k$. Пусть $l \in \{1, \dots, h_5\} \setminus \{l_1, \dots, l_k\}$. Числу l поставим в соответствие число $\tilde{l}$, $1 \leq \tilde{l} \leq h_4$, такое, что

$$\varphi(\tilde{a}_l^{15}, \dots, \tilde{a}_l^{n5}, q_0) = \varphi(\tilde{a}_{\tilde{l}}^{14}, \dots, \tilde{a}_{\tilde{l}}^{n4}).$$

Нетрудно видеть, что для любого i , $1 \leq i \leq n$, в Δ найдется такой элемент $\hat{A}_i$, что $\hat{A}_{i+5} = A_{i+5}$, $\hat{A}_i^{l_1 t_5} = \tilde{A}_i^{\tilde{l}_1 t_4}, \dots, \hat{A}_i^{l_k t_5} = \tilde{A}_i^{\tilde{l}_k t_4}$, и для всякого $l \in \{1, h_5\} \setminus \{l_1, \dots, l_k\}$ имеет место равенство $\hat{A}_i^{l t_5} = \tilde{A}_i^{\tilde{l} t_4}$. Очевидно, $\hat{A}_1 \in \Delta^{(m)}, \dots, \hat{A}_n \in \Delta^{(m)}$ и, следовательно, $\hat{A}_1 \in R, \dots, \hat{A}_n \in R$.

Вместе с тем, так же как и при рассмотрении случая выше, легко показать, что $f(\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_n) \in \Delta^{(M)}$, то есть $f(\hat{A}_1, \dots, \hat{A}_n) \notin R$.

Итак, в обоих случаях приходим к противоречию: о.д. функция $f(x_1, \dots, x_n)$ не принадлежит множеству $U(R)$. Из полученного противоречия следует справедливость леммы 6, если $t_2 - t_3 + 1 > C$, $t_3 + 1 < C$, $t_1 - t_2 < C$. Справедливость утверждения леммы 6 в оставшихся случаях доказывается аналогично. Кроме того, утверждение леммы 6 остается справедливым и тогда, когда система $\mathfrak{M}$ содержит более одной о.д. функции.

Доказательство теоремы 1. Утверждение теоремы 1 немедленно следует из лемм 4, 5 и 6. Пусть $\mathfrak{M} \in S$. Тогда можно указать такое τ , зависящее от параметров системы $\mathfrak{M}$, что имеет место следующее: система $\mathfrak{M}$ является A -полной тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ не сохраняет ни одного отношения, принадлежащего семействам $L(\tau)$, $N(\tau)$ и $SC(\tau)$. Заметим при этом, что число отношений, принадлежащих объединению семейств $L(\tau)$, $N(\tau)$ и SC , конечно (τ конечно, множество $\mathfrak{M} \setminus SP(1)$ конечно), а потому существует алгоритм, позволяющий по любому $R \in L(\tau) \cup N(\tau) \cup SC(\tau)$ установить, сохраняет ли множество $\mathfrak{M}$ это отношение.

Список литературы

1. Бувеч В. А., Об алгоритмической неразрешимости распознавания A -полноты для ограниченно-детерминированных функций. *Математические заметки* (1972) **11**, 687–697.
2. Бувеч В. А., О τ -полноте в классах автоматных отображений. *Доклады АН СССР* (1980) **252**, №5, 221–224.
3. Бувеч В. А., Критерий A -полноты для автоматов в терминах A -предполных классов. В сб.: *Discrete Mathematics*, 7. Banach Cent. Publ., Polish Acad. Sci., Inst. Math., PWN, Warsaw, 1982, с. 53–63.
4. Бувеч В. А., Подколзина М. А., Критерий полноты S -множеств детерминированных функций. *Математические вопросы кибернетики* (2007) **16**, 191–238.
5. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С., *Введение в теорию автоматов*. Наука, Москва, 1985.
6. Подколзина М. А., О полноте и A -полноте S -множеств детерминированных функций, содержащих все одноместные детерминированные S -функции. *Дискретная математика* (2009) **21**, №2, 75–88.
7. Бувеч В. А., Клиндухова Т. Э., О существовании алгоритма для распознавания A -полноты систем, содержащих все одноместные ограниченно-детерминированные функции. *Математические вопросы кибернетики* (1999) **8**, 289–297.
8. Бувеч В. А., *Условия A -полноты для конечных автоматов*, 1–2. Изд-во Московского ун-та, Москва, 1986–1987.

Статья поступила 22.12.2011.