Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. С. Дергач, Об однозначности алфавитного декодирования, *Дискрет. матем.*, 2012, том 24, выпуск 4, 70–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1211>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 10:27:27

Об однозначности алфавитного декодирования

© 2012 г. П. С. Дергач

Целью этой работы является установление алгоритмической разрешимости проблемы однозначности алфавитного декодирования регулярных текстов.

1. Введение

А. А. Марковым было показано, что проблема однозначности алфавитного декодирования всех текстов над заданным конечным алфавитом A сводится к декодированию конечного числа слов над алфавитом A длины, не большей некоторой вычислимой величины, зависящей от длины схемы кодирования, мощности алфавита A и других параметров [1]. В предлагаемой работе исследован случай, когда кодируемое множество слов является любым регулярным множеством. Показывается, что результат Маркова может быть обобщен на случай алфавитного декодирования любого регулярного множества слов над алфавитом A .

2. Основные понятия и результаты

Абстрактным конечным автоматом называется набор $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$, где A, Q, B — конечные множества, φ — функция, определенная на множестве $Q \times A$ и принимающая значения из Q , ψ — функция, определенная на множестве $Q \times A$ и принимающая значения из B . Множества A, Q, B называются, соответственно, входным алфавитом, алфавитом состояний и выходным алфавитом автомата V . Функция φ называется функцией переходов, а функция ψ — функцией выходов автомата V . Входными словами автомата $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$, называем произвольные конечные последовательности символов алфавита A . Для удобства рассматриваем при этом также пустое слово, не имеющее ни одного символа и обозначаемое Λ . Выходными словами алфавита V называем конечные последовательности символов алфавита B , словами состояний — конечные последовательности символов алфавита Q (в обоих случаях допускается и пустое слово Λ). Для каждого состояния автомата V можно рассмотреть набор $(A, Q, B, \varphi, \psi, q)$, определяющий автомат V с выделенным начальным состоянием q . Такие наборы $(A, Q, B, \varphi, \psi, q)$ называются инициальными абстрактными конечными автоматами; для них используется обозначение V_q .

Введем ряд понятий, связанных со словами. Пусть S — некоторое конечное множество. Если $\gamma = c(1) \dots c(n)$ — конечная последовательность символов $c(1), \dots, c(n)$ алфавита S , то говорим, что γ есть слово в алфавите S . Число n называем длиной слова γ и обозначаем через $|\gamma|$. Длина пустого слова равна 0. Если γ и δ — слова, причем $\gamma = \delta\delta'$

для некоторого слова δ' , то говорим, что δ — начало слова γ , δ' — конец слова γ . Множество всех слов в алфавите C обозначаем C^* . Начало слова γ , имеющее длину l , обозначаем $]l(\gamma)$; окончание слова γ , имеющее длину l , обозначаем через $]l(\gamma)$. Введем обозначения

$$\gamma l, m =]_{m-l}([m(\gamma)), \quad |\gamma| \geq m > l \geq 1.$$

Функции переходов и выходов автомата $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$ доопределим на множестве $Q \times A^*$ (сохраним за ними те же обозначения). Именно, полагаем по определению

$$\varphi(q, \Lambda) = q, \quad \varphi(q, \alpha a) = \varphi(\varphi(q, \alpha), a),$$

где $q \in Q$, $\alpha \in A^*$, $a \in A$. Аналогично, полагаем

$$\psi(q, \Lambda) = \Lambda, \quad \psi(q, \alpha a) = \psi(\varphi(q, \alpha), a).$$

Пусть $V_q = (A, Q, B, \varphi, \psi, q)$ — инициальный абстрактный конечный автомат, $B' \subseteq B$. Множество

$$M = \{\alpha \mid \alpha \in A^*, \psi(q, \alpha) \in B'\}$$

называем представимым в абстрактном конечном автомате V_q с помощью подмножества B' выходных символов. Говорим также, что автомат V_q представляет M посредством B' . Пусть $M \subseteq A^* \setminus \{\Lambda\}$. Если существует конечный автомат V_q , представляющий событие M посредством некоторого подмножества $B' \subseteq B$, то событие M называем представимым.

Недетерминированным конечным автоматом называется набор $V = (A, Q, B, \gamma)$, где A, Q, B — конечные множества, γ — функция, определенная на множестве $Q \times A$ и принимающая в качестве своих значений подмножества множества $Q \times B$. Если для каждой пары (q, a) , где $q \in Q$ и $a \in A$ значение $\gamma(q, a)$ есть одноэлементное множество (q', b) , то можно определить функции φ, ψ :

$$\varphi(q, a) = q', \quad \psi(q, a) = b.$$

При этом возникает некоторый абстрактный конечный автомат $V = (A, Q, B, \varphi, \psi)$. В указанном смысле абстрактный конечный автомат можно рассматривать как частный случай недетерминированного конечного автомата. Понятие инициального недетерминированного конечного автомата, аналогичное понятию инициального абстрактного конечного автомата, возникает, если выделено некоторое подмножество $Q' \subseteq Q$ начальных состояний автомата. Пусть Q' — такое выделенное подмножество и $\alpha = a(1) \dots a(s)$ — слово в алфавите A . Определим класс $\tilde{\gamma}(Q', \alpha)$ последовательностей $(q(1), b(1)), \dots, (q(s), b(s))$. Каждая последовательность этого класса удовлетворяет следующим условиям:

- (1) $q(1) \in Q'$;
- (2) $(q(i+1), b(i)) \in \gamma(q(i), a(i)), i = 1, \dots, s$ (в случае $i = s$ рассматривается значение $q(s+1)$, не включаемое в последовательность $\tilde{\gamma}(Q', \alpha)$).

Недетерминированный инициальный автомат $V = (A, Q, B, \gamma, Q')$ можно рассматривать как модель устройства, применяемого для распознавания входных последовательностей. Аналогично случаю обычного конечного автомата, при этом выделяется подмножество B' множества B выходных символов. Множество входных слов M , распознаваемых автоматом, состоит из тех и только тех слов $\alpha \in A^*$, для которых в $\tilde{\gamma}(Q', \alpha)$ существует

последовательность $(q(1), b(1)), \dots, (q(s), b(s))$, удовлетворяющая условию $b(s) \in B'$. Говорим также, что множество M представимо в недетерминированном конечном автомате V с помощью подмножества B' выходных символов.

Введем понятие обобщенного источника. Обобщенным источником в алфавите A назовем конечный ориентированный граф G , у которого выделены начальная и финальная вершины $v, w, v \neq w$, причем каждому ребру приписано пустое слово Λ либо символ алфавита A . Допускается наличие в графе петель и кратных ребер. Путем в обобщенном источнике G будем называть последовательность

$$\pi = (v_1, \rho_1, v_2, \rho_2, \dots, \rho_n, v_{n+1}),$$

где $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$ — вершины графа G , ρ_i — ребро графа G , ведущее от вершины v_i к вершине v_{i+1} , $i = 1, \dots, n, n \geq 1$. Пути π сопоставляем слово $[\pi] = a_1 \dots a_n$, где a_i — символ алфавита A либо пустое слово Λ , приписанное ребру ρ_i , $i = 1, \dots, n$. Говорим, что путь π ведет от вершины v_1 к вершине v_{n+1} . Пусть $\alpha \in A^* \setminus \{\Lambda\}$, u — вершина обобщенного источника G ; множество всех вершин u' обобщенного источника G , для которых существует путь π , ведущий от u к u' и такой, что $[\pi] = \alpha$, обозначим $\theta(u, \alpha)$. Каждый обобщенный источник G с начальной вершиной v и финальной вершиной w определяет событие

$$|G| = \{\alpha \mid \alpha \in A^* \setminus \{\Lambda\}, w \in \theta(v, \alpha)\}.$$

Пусть $A = \{a_1, \dots, a_r\}$ — произвольный конечный непустой алфавит. Пусть P_1, P_2 — непустые множества слов в алфавите A . Здесь и далее для удобства пустое слово за элемент множества A^* не считается. Определим следующие операции над P_1 и P_2 .

Произведение $P_1 \cdot P_2$ множеств P_1 и P_2 есть множество всех слов вида $\alpha_1 \alpha_2$, где $\alpha_1 \in P_1, \alpha_2 \in P_2$.

Итерация $(P_1)^*$ множества P_1 есть множество всех слов вида $\alpha_1 \dots \alpha_k$, где $\alpha_1 \in P_1, \dots, \alpha_k \in P_1, k \geq 1$.

Введем понятие регулярного множества в алфавите A . Множество $P \subseteq A^*$, называем регулярным в алфавите A , если его можно получить из множеств вида $\{a\}$, $a \in A$, применением конечного числа операций $\cup, \cdot, ()^*$. Строгое определение регулярных множеств таково:

- (1) $\{a\}$, где a — произвольная буква алфавита A , есть регулярное множество в алфавите A ;
- (2) если P_1, P_2 — регулярные множества в алфавите A , то $P_1 \cup P_2, P_1 \cdot P_2, (P_1)^*$ есть регулярные множества в алфавите A ;
- (3) регулярность произвольного множества в алфавите A устанавливается в соответствии с (1)–(2) за конечное число шагов.

Введем понятие регулярного выражения в алфавите A . Регулярное выражение в алфавите A представляет собой слово в алфавите $A \cup \{\vee, \cdot, (,), *\}$, определяемое следующим образом:

- (1) буквы алфавита A — регулярные выражения в алфавите A ;
- (2) если α, β — регулярные выражения в алфавите A , то $(\alpha \vee \beta), (\alpha \cdot \beta), (\alpha)^*$ — регулярные выражения в алфавите A ;

- (3) регулярность произвольного выражения в алфавите A устанавливается в соответствии с (1)–(2) за конечное число шагов.

Сопоставим индуктивно каждому регулярному выражению $\mathfrak{P}$ в алфавите A регулярное множество $|\mathfrak{P}|$ в алфавите A следующим образом:

- (1) множество $\{a\}$, если $\mathfrak{P} = a$, $a \in A$;
- (2) множество $|\mathfrak{P}_1| \cup |\mathfrak{P}_2|$, если $\mathfrak{P} = (\mathfrak{P}_1 \vee \mathfrak{P}_2)$;
- (3) множество $|\mathfrak{P}_1| \cdot |\mathfrak{P}_2|$, если $\mathfrak{P} = (\mathfrak{P}_1 \cdot \mathfrak{P}_2)$;
- (4) множество $(|\mathfrak{P}_1|)^*$, если $\mathfrak{P} = (\mathfrak{P}_1)^*$.

Зафиксируем два конечных непустых алфавита A и B .

Пусть дано некоторое отображение $f: A \rightarrow B^*$:

$$f(a_1) = \beta_1,$$

$$f(a_2) = \beta_2,$$

$$\dots$$

$$f(a_r) = \beta_r.$$

Это соотношение называется схемой кодирования. Доопределим отображение f до отображения $\tilde{f}: A^* \rightarrow B^*$ следующим образом:

$$\tilde{f}(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n}) = \beta_{i_1} \beta_{i_2} \dots \beta_{i_n}.$$

Это отображение $\tilde{f}$ будем называть алфавитным кодированием.

Пусть есть некоторое регулярное множество P в алфавите A и некоторое алфавитное кодирование f . Пусть $\beta \in \tilde{f}(P)$. Тогда $\alpha \in P$ называется расшифровкой β при алфавитном кодировании $\tilde{f}$ на регулярном множестве P или расшифровкой β , если $f(\alpha) = \beta$. Таких расшифровок может быть несколько. Если для любых различных $\alpha_1, \alpha_2 \in P$ верно, что $\tilde{f}(\alpha_1) \neq \tilde{f}(\alpha_2)$, то говорим, что декодирование однозначно на P по f .

Теорема 1. *Существует алгоритм, по произвольной паре $(\tilde{f}, \mathfrak{P})$, где $\tilde{f}$ — алфавитное кодирование из алфавита A в алфавит B , а $\mathfrak{P}$ — регулярное выражение в алфавите A , определяющий, однозначно ли декодирование на $|\mathfrak{P}|$ по $\tilde{f}$.*

3. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Если R есть регулярное множество в алфавите A , представимое регулярным выражением $\mathfrak{P}$ в алфавите A с k операциями $\cdot, \vee$, то существует такой обобщенный источник G в алфавите A , что $R = |G|$, причем в G имеется не более, чем $4k + 2$ вершин.*

Доказательство. Будем доказывать утверждение индукцией по числу операций в $\mathfrak{P}$. Если $R = \{a\}$, где $a \in A$, то искомым обобщенный источник G указан на рис. 1. Здесь через v обозначена начальная вершина источника G , w — финальная вершина источника G . Здесь $k = 0$, и в G две вершины. Для этого случая утверждение доказано.

Пусть

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 \vee \mathfrak{P}_2,$$

Рис. 1.

Рис. 2.

в $\mathfrak{P}_1$ содержится k_1 операций $\cdot, \vee$, в $\mathfrak{P}_2$ содержится k_2 операций $\cdot, \vee$, и G_1, G_2 есть обобщенные источники в алфавите A , такие, что

$$|\mathfrak{P}_1| = |G_1|, \quad |\mathfrak{P}_2| = |G_2|.$$

По предположению индукции можно считать, что в G_1 содержится не более, чем $4k_1 + 2$ вершин, а в G_2 содержится не более $4k_2 + 2$ вершин. Можно считать, что множества вершин графов G_1, G_2 не пересекаются. Объединим графы G_1, G_2 и введем две новые вершины v, w . От v проведем ребра с отметкой Λ к начальным вершинам обобщенных источников G_1, G_2 ; к w проведем ребра с отметкой Λ от финальных вершин этих обобщенных источников. Получим обобщенный источник G с начальной вершиной v и финальной вершиной w , для которого

$$|G| = |\mathfrak{P}_1| \vee |\mathfrak{P}_2|$$

(см. рис. 2). В обобщенном источнике G имеется не более

$$(4k_1 + 2) + (4k_2 + 2) + 2 = 4(k_1 + k_2 + 1) + 2$$

вершин, а в $\mathfrak{P}$ имеется не более $k_1 + k_2 + 1$ операций $\cdot, \vee$.

Пусть

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 \cdot \mathfrak{P}_2,$$

в $\mathfrak{P}_1$ имеется k_1 операций $\cdot, \vee$, в $\mathfrak{P}_2$ имеется k_2 операций $\cdot, \vee$, и пусть G_1, G_2 — обобщенные источники в алфавите A такие, что

$$|\mathfrak{P}_1| = |G_1|, \quad |\mathfrak{P}_2| = |G_2|.$$

По предположению индукции можно считать, что в G_1 содержится не более, чем $4k_1 + 2$ вершин, а в G_2 — не более $4k_2 + 2$ вершин. Можно считать, что множества вершин графов

Рис. 3.

Рис. 4.

G_1 , G_2 не пересекаются. Проведем от финальной вершины обобщенного источника G_1 ребро с отметкой Λ к начальной вершине обобщенного источника G_2 . Получим обобщенный источник G , начальной вершиной которого служит начальная вершина v графа G_1 , а финальной — финальная вершина w графа G_2 (см. рис. 3). При этом

$$|G| = |\mathfrak{P}_1| \cdot |\mathfrak{P}_2|.$$

В обобщенном источнике G имеется не более

$$(4k_1 + 2) + (4k_2 + 2) + 2 = 4(k_1 + k_2 + 1) + 2$$

вершин, а в $\mathfrak{P}$ — не более $k_1 + k_2 + 1$ операций $\cdot, \vee$.

Пусть

$$\mathfrak{P} = (\mathfrak{P}_1)^*,$$

в $\mathfrak{P}_1$ k_1 операций и G_1 — обобщенный источник такой, что

$$|\mathfrak{P}_1| = |G_1|.$$

По предположению индукции можно считать, что в G_1 содержится не более, чем $4k_1 + 2$ вершин. Проведем от финальной вершины w обобщенного источника G_1 ребро с отметкой Λ к начальной вершине v этого обобщенного источника. Получим обобщенный источник G с теми же начальной и финальной вершинами, что и G_1 , причем

$$|G| = |(\mathfrak{P}_1)^*|$$

(см. рис. 4). В обобщенном источнике G имеется не более $4k_1 + 2$ вершин, а в $\mathfrak{P}$ имеется не более k_1 операций $\cdot, \vee$.

Таким образом, утверждение индукции, а с ним и лемма 1, доказаны.

Лемма 2. Пусть G — обобщенный источник с k вершинами. Тогда событие $|G|$ представимо автоматом с входным алфавитом A , выходным алфавитом $\{0, 1\}$ и алфавитом состояний мощности 2^k .

Доказательство леммы приведено в [2].

Лемма 3. Любой недетерминированный конечный автомат V с q состояниями может быть преобразован в абстрактный конечный автомат V' с не более чем 2^q состояниями так, чтобы представляемые этими автоматами по $\{1\}$ множества совпадали.

Доказательство леммы приведено в [2].

Лемма 4. Пусть A — конечный алфавит; $\delta_1, \delta_2, \xi_1, \xi_2, \beta$ — слова (возможно, пустые) в алфавите A ; B_1, B_2 — регулярные множества в алфавите A и $\delta_1\beta\delta_2 \in B_1, \xi_1\beta\xi_2 \in B_2$, и пусть

$$V_1 = (A, Q_1, \{0, 1\}, \varphi_1, \psi_1, q_1),$$

$$V_2 = (A, Q_2, \{0, 1\}, \varphi_2, \psi_2, q_2)$$

— инициальные абстрактные конечные автоматы, представляющие по множеству $\{1\}$ множества B_1, B_2 соответственно; тогда существует слово β' в алфавите A , $|\beta'| \leq |Q_1||Q_2|$, такое, что $\delta_1\beta'\delta_2 \in B_1, \xi_1\beta'\xi_2 \in B_2$.

Доказательство. Допустим, что $|\beta| > |Q_1||Q_2|$. Рассмотрим множество T пар состояний автоматов V_1, V_2 такое, что

$$T = \{(\varphi_1(q_1, \delta_1[l](\beta)), \varphi_2(q_2, \xi_1[l](\beta))), 1 \leq l \leq |\beta|\}.$$

Так как

$$|T| < |Q_1||Q_2| + 1,$$

существуют $1 \leq l_1 < l_2 \leq |Q_1||Q_2| + 1$ такие, что

$$\varphi_1(q_1, \delta_1[l_1](\beta)) = \varphi_1(q_1, \delta_1[l_2](\beta)),$$

$$\varphi_2(q_2, \xi_1[l_1](\beta)) = \varphi_2(q_2, \xi_1[l_2](\beta)).$$

Пусть β_1 и β_2 удовлетворяют соотношениям

$$\beta_1 = [l_1](\beta), \beta = [l_2](\beta)\beta_2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \psi_1(q_1, \alpha_1\beta_1\beta_2\alpha_2) &= \psi_1(\varphi_1(q_1, \alpha_1\beta_1), \beta_2\alpha_2) \\ &= \psi_1(\varphi_1(q_1, \alpha_1[l_2](\beta)), \beta_2\alpha_2) \\ &= \psi_1(\varphi_1(q_1, \delta_1[l_2](\beta)\beta_2), \delta_2) \\ &= \psi_1(\varphi_1(q_1, \delta_1\beta), \delta_2) \\ &= \psi_1(q_1, \delta_1\beta\delta_2) = 1. \end{aligned}$$

Аналогично получаем, что

$$\psi_2(q_2, \xi_1\beta_1\beta_2\xi_2) = 1.$$

Таким образом, существует $\beta'' = \beta_1\beta_2$ такое, что $\delta_1\beta''\delta_2 \in B_1, \xi_1\beta''\xi_2 \in B_2$, и $|\beta''| < |\beta|$. Проведя конечное число раз процедуру сокращения β , получим β' длины, не большей $|Q_1||Q_2|$, такое, что $\delta_1\beta'\delta_2 \in B_1, \xi_1\beta'\xi_2 \in B_2$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Пусть α есть слово в алфавите A , и B есть регулярное множество в алфавите A , представимое с помощью инициального абстрактного конечного автомата $V_{q_0} = (A, Q, \{0, 1\}, \varphi, \psi, q_0)$ с помощью множества $\{1\}$, $\alpha \in B$, $1 \leq s < |\alpha|$; тогда существуют регулярные множества B_1 и B_2 в алфавите A , представимые с помощью инициальных абстрактных конечных автоматов с входным алфавитом A , выходным алфавитом $\{0, 1\}$ и алфавитом состояний $|Q|$ с помощью множества $\{1\}$ такие, что $B_1 \cdot B_2 \subseteq B$, $\alpha \in B_1 \cdot B_2$, $[_s(\alpha) \in B_1,]_{|\alpha|-s}(\alpha) \in B_2$.

Доказательство. По леммам 1 и 2, существует инициальный абстрактный конечный автомат $V = (A, Q, \{0, 1\}, \varphi, \psi, q_0)$, представляющий регулярное множество B с помощью множества $\{1\}$. Пусть $\varphi(q_0, [s(\alpha)]) = q_1$. Рассмотрим два инициальных абстрактных конечных автомата

$$V_1 = (A, Q, \{0, 1\}, \varphi, \psi_1, q_0), \quad V_2 = (A, Q, \{0, 1\}, \varphi, \psi, q_1),$$

где $\psi_1(q, a) = 1$ при $\varphi(q, a) = q_1$ и $\psi_1(q, a) = 0$ в противном случае. По теореме Клини (см. [2]), эти два автомата по множеству $\{1\}$ представляют регулярные множества B_1 и B_2 . Так как $\varphi(q_0, [s(\alpha)]) = q_1$, верно, что $\psi_1(q_0, [s(\alpha)]) = 1$, то есть $[s(\alpha)] \in B_1$. Далее, так как $\alpha \in B$,

$$\begin{aligned} 1 &= \psi(q_0, \alpha) = \psi(\varphi(q_0, [s(\alpha)]),]_{|\alpha|-s}(\alpha)) \\ &= \psi(q_1,]_{|\alpha|-s}(\alpha)) = \psi(q_1, \alpha) \in B_2. \end{aligned}$$

Значит, $\alpha \in B_1 \cdot B_2$.

Пусть $\alpha_1 \in B_1, \alpha_2 \in B_2$. Тогда

$$\varphi(q_0, \alpha_1) = q_1, \quad \psi(q_1, \alpha_2) = 1.$$

Значит,

$$\psi(q_0, \alpha_1 \alpha_2) = \psi(\varphi(q_0, \alpha_1), \alpha_2) = \psi(q_1, \alpha_2) = 1,$$

то есть, $\alpha_1 \alpha_2 \in B$. Поэтому $B_1 \cdot B_2 \subseteq B$. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. Пусть $\tilde{f}$ — алфавитное кодирование, P — регулярное множество в алфавите $A = \{a_1, \dots, a_r\}$, соответствующее регулярному выражению $\mathfrak{P}$ в алфавите A с k операциями $\cdot, \vee$, $\alpha_1, \alpha_2 \in P$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, и $\tilde{f}(\alpha_1) = \tilde{f}(\alpha_2)$. Тогда существуют такие $\alpha'_1, \alpha'_2 \in P$, $\alpha'_1 \neq \alpha'_2$, что $\tilde{f}(\alpha'_1) = \tilde{f}(\alpha'_2)$ и $|\alpha'_1|, |\alpha'_2| \leq R_f^2 2^{2^{4k+3}rR_f}$.

Доказательство. По лемме 1, в алфавите A существует обобщенный источник G такой, что $P = |G|$ и в нем не более $4k + 2$ вершин. По лемме 2, множество $|G|$ представимо абстрактным конечным автоматом с входным алфавитом A и алфавитом состояний мощности не более 2^{4k+2} . Пусть α — некоторое слово в алфавите A и $n \geq 2$. Пусть

$$\Delta = [|\alpha|/n].$$

Тогда

$$(\alpha)_{n,1} = [\Delta(\alpha), (\alpha)_{n,2} =]_{|\alpha|-\Delta}(\alpha).$$

Пусть $p = 2R_f$. Возможны два случая: во-первых,

$$|\tilde{f}((\alpha_1)_{p,1})| \leq |\tilde{f}((\alpha_2)_{p,1})|$$

и во-вторых,

$$|\tilde{f}((\alpha_1)_{p,1})| > |\tilde{f}((\alpha_2)_{p,1})|.$$

Разберем, например, первый случай. Второй случай разбирается аналогично. Заметим, что

$$|\tilde{f}((\alpha_1)_{p,1})| \leq R_f |(\alpha_1)_{p,1}| \leq |\alpha_1|/2 \leq |\tilde{f}(\alpha_1)|/2,$$

$$|\tilde{f}((\alpha_2)_{p,1})| \leq R_f |(\alpha_2)_{p,1}| \leq |\alpha_2|/2 \leq |\tilde{f}(\alpha_2)|/2,$$

Рис. 5.

при этом,

$$|\tilde{f}(\alpha_1)| = |\tilde{f}(\alpha_2)|.$$

Значит, части слова $\tilde{f}(\alpha_1) = \tilde{f}(\alpha_2)$, соответствующие словам $\tilde{f}((\alpha_1)_{p,1})$ и $\tilde{f}((\alpha_2)_{p,1})$, находятся в первой его половине. По лемме 5, в алфавите A существуют регулярные множества $A_{1,1}, A_{1,2}, A_{2,1}, A_{2,2}$ такие, что $(\alpha_1)_{p,i} \in A_{1,i}, (\alpha_2)_{p,i} \in A_{2,i}, i = 1, 2, A_{1,1} \times A_{1,2} \subseteq P, A_{2,1} \times A_{2,2} \subseteq P$, и эти множества представимы, соответственно, абстрактными конечными автоматами $V_{1,1}, V_{1,2}, V_{2,1}, V_{2,2}$ с входным алфавитом A , выходным алфавитом $\{0, 1\}$ и алфавитом состояний мощности не более 2^{4k+2} с помощью множества $\{1\}$. Заменяем в этих автоматах входной алфавит A на $\tilde{f}(A)$ и соответственно поправим функции перехода и выхода, заменив в них a_i на $\tilde{f}(a_i)$. Выходной алфавит, алфавит состояний и начальное состояние оставим теми же. Тогда регулярные множества $\tilde{f}(A_{1,1}), \tilde{f}(A_{1,2}), \tilde{f}(A_{2,1}), \tilde{f}(A_{2,2})$ представимы этими автоматами. Мощность их алфавитов состояний по-прежнему не превосходит 2^{4k+2} . Теперь заменим для каждой пары состояний q_l, q_m и каждого слова $\tilde{f}(a_i)$ имеющиеся в автоматах переходы из состояния q_l в состояние q_m по слову $\tilde{f}(a_i) = \beta_1 \dots \beta_s$ на последовательность состояний с побуквенными переходами $\beta_1, \dots, \beta_s$ так, как это изображено на рис. 5.

Таким образом, мы получаем недетерминированные конечные автоматы $\tilde{V}_{1,1}, \tilde{V}_{1,2}, \tilde{V}_{2,1}, \tilde{V}_{2,2}$, представляющие по $\{1\}$ множества $\tilde{f}(A_{1,1}), \tilde{f}(A_{1,2}), \tilde{f}(A_{2,1}), \tilde{f}(A_{2,2})$ соответственно. У этих автоматов входным алфавитом, в отличие от автоматов $V_{1,1}, V_{1,2}, V_{2,1}, V_{2,2}$, является множество B . Оценим сверху мощность S множества состояний автомата $V_{1,1}$:

$$S \leq 2^{4k+2} + 2^{4k+2}r(R_f - 1) \leq 2^{4k+2}rR_f - 1.$$

Такая же оценка верна и для мощности множеств состояний автоматов $\tilde{V}_{1,2}, \tilde{V}_{2,1}, \tilde{V}_{2,2}$. По лемме 3, существуют абстрактные конечные автоматы $\tilde{V}_{1,1}^B, \tilde{V}_{1,2}^B, \tilde{V}_{2,1}^B, \tilde{V}_{2,2}^B$, представляющие по $\{1\}$ множества $\tilde{f}(A_{1,1}), \tilde{f}(A_{1,2}), \tilde{f}(A_{2,1}), \tilde{f}(A_{2,2})$ соответственно. При этом у каждого из этих автоматов не более чем $2^{2^{4k+2}rR_f-1}$ состояний.

Теперь мы можем применить лемму 4 к паре регулярных множеств $\tilde{f}(A_{1,1}), \tilde{f}(A_{2,1})$ и к словам $\tilde{f}((\alpha_1)_{p,1}), \tilde{f}((\alpha_2)_{p,1})$, где

$$\beta = \tilde{f}((\alpha_1)_{p,1}), \quad \delta_1 = \delta_2 = \gamma_1 = \Lambda, \quad \gamma_2 = \tilde{f}(\alpha_2)_{|\tilde{f}((\alpha_1)_{p,1})|, |\tilde{f}((\alpha_2)_{p,1})|}.$$

Из неё следует, что существует слово $\beta' \in B^*$, $|\beta'| \leq 2^{2^{4k+3}rR_f-2}$, такое, что $\beta' \in \tilde{f}(A_{1,1}), \beta'\gamma_2 \in \tilde{f}(A_{2,1})$. Поэтому существуют слова $\alpha' \in A_{1,1}, \alpha'' \in A_{2,1}$ такие, что $\tilde{f}(\alpha') = \beta', \tilde{f}(\alpha'') = \beta'\gamma_2$.

$\tilde{f}(\alpha'') = \beta' \gamma_2$. Обозначим через λ_1 слово $\alpha'(\alpha_1)_{p,2} \in A_{1,1} \times A_{1,2} \subseteq P$ и через λ_2 слово $\alpha''(\alpha_2)_{p,2} \in A_{2,1} \times A_{2,2} \subseteq P$. Тогда

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\lambda_1) &= \tilde{f}(\alpha'(\alpha_1)_{p,2}) = \tilde{f}(\alpha') \tilde{f}((\alpha_1)_{p,2}) = \beta' \tilde{f}((\alpha_1)_{p,2}), \\ \tilde{f}(\lambda_2) &= \tilde{f}(\alpha''(\alpha_2)_{p,2}) = \tilde{f}(\alpha'') \tilde{f}((\alpha_2)_{p,2}) = \beta' \gamma_2 \tilde{f}((\alpha_2)_{p,2}).\end{aligned}$$

Итак,

$$\tilde{f}(\lambda_1) = \tilde{f}(\lambda_2).$$

Пусть различие в расшифровках α_1, α_2 слова $\tilde{f}(\alpha_1) = \tilde{f}(\alpha_2)$ есть в его второй половине. Тогда и у $\tilde{f}(\lambda_1) = \tilde{f}(\lambda_2)$ есть различные расшифровки $\tilde{f}(\lambda_1), \tilde{f}(\lambda_2)$, так как во второй половине слова расшифровки не изменились. Если же это не так, то различие в расшифровках α_1, α_2 слова $\tilde{f}(\alpha_1) = \tilde{f}(\alpha_2)$ есть в его первой половине. В этом случае такие же рассуждения применяются к записанному в обратном порядке слову $\tilde{f}(\alpha_1) = \tilde{f}(\alpha_2)$.

Итак, можно считать, что

$$|(\alpha_1)_{p,1}| \leq 2^{2^{4k+3}rR_f-2}.$$

Но

$$|(\alpha_1)_{p,1}| \geq |\alpha_1|/2R_f - 1.$$

Поэтому

$$|\alpha_1| \leq 2R_f(|(\alpha_1)_{p,1}| + 1) \leq R_f 2^{2^{4k+3}rR_f}.$$

Отсюда следует, что

$$|\alpha_2| \leq |\tilde{f}(\alpha_2)| = |\tilde{f}(\alpha_1)| \leq R_f |\alpha_1| \leq R_f^2 2^{2^{4k+3}rR_f}.$$

Утверждение леммы 6 доказано.

Следствие 1. Пусть $\tilde{f}$ — алфавитное кодирование, P — регулярное множество в алфавите $A = \{a_1, \dots, a_r\}$, представимое с помощью инициального абстрактного конечного автомата $V_{q_0} = (A, Q, \{0, 1\}, \varphi, \psi, q_0)$ с помощью множества $\{1\}$. Тогда существуют такие $\alpha'_1, \alpha'_2 \in P$, $\alpha'_1 \neq \alpha'_2$, что $\tilde{f}(\alpha'_1) = \tilde{f}(\alpha'_2)$ и $|\alpha'_1|, |\alpha'_2| \leq R_f^2 4^{rR_f|Q|}$.

Доказательство. Доказательство полностью повторяет доказательство леммы 6. Искомую оценку получаем из цепочки неравенств

$$\begin{aligned}2R_f((2^{|Q|+r(R_f-1)|Q|})^2 + 1)R_f &\leq 2R_f^2((2^{(rR_f|Q|-1)})^2 + 1) \\ &= 2R_f^2(4^{rR_f|Q|-1} + 1) \leq R_f^2 4^{rR_f|Q|}.\end{aligned}$$

Лемма 7. Существует алгоритм, определяющий по произвольной паре $(\tilde{f}, \mathfrak{P})$, где $\tilde{f}$ — алфавитное кодирование из алфавита A в алфавит B , а $\mathfrak{P}$ — регулярное выражение в алфавите A , существуют ли $\alpha_1, \alpha_2 \in |\mathfrak{P}|$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, такие, что выполняется равенство $\tilde{f}(\alpha_1) = \tilde{f}(\alpha_2)$.

Доказательство. Проверим конечным перебором слов из $|\mathfrak{P}|$ длины, не превосходящей $R_{\tilde{f}}^2 2^{2^{4k+3}rR_f}$, существуют ли два слова $\alpha_1, \alpha_2 \in |\mathfrak{P}|$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, такие, что $\tilde{f}(\alpha_1) = \tilde{f}(\alpha_2)$ и $|\alpha_1|, |\alpha_2| \leq R_{\tilde{f}}^2 2^{2^{4k+3}rR_f}$. Если такие слова есть, то $\tilde{f}$ не является однозначно декодируемым на $|\mathfrak{P}|$. Если таких слов нет, то, по лемме 6, $\tilde{f}$ однозначно декодируемо на $|\mathfrak{P}|$. Алгоритм проверки однозначности алфавитного декодирования, определяющий по произвольной паре $(\tilde{f}, \mathfrak{P})$, однозначно ли декодируемо $\tilde{f}$ на $|\mathfrak{P}|$, построен. Утверждение леммы 7 доказано.

Нетрудно видеть, что из леммы 7 вытекает утверждение теоремы 1.

Список литературы

1. Яблонский С. В., *Введение в дискретную математику*. Наука, Москва, 1986.
2. Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С., *Введение в теорию автоматов*. Наука, Москва, 1985.

Статья поступила 16.03.2012.