Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. С. Малышев, Экстремальные множества графов при решении задачи демаркации в семействе наследственно замкнутых классов графов, *Дискрет. матем.*, 2012, том 24, выпуск 4, 91–103

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1213>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 16:59:41

Экстремальные множества графов при решении задачи демаркации в семействе наследственно замкнутых классов графов

© 2012 г. Д. С. Малышев

В данной работе рассматриваются понятия минимального сложного и граничного классов. Данные классы играют особую роль при определении границы между полиномиальной разрешимостью и NP -полнотой задач на графах в семействе наследственных классов. Ранее в одной из работ автора было установлено, что для некоторого типа задач на графах минимальных сложных классов нет. В данной работе, наоборот, доказывается достаточное условие существования таких классов. Его действительность подтверждается новыми примерами минимальных сложных классов и граничных классов для некоторых задач на графах. Для выявленных задач удается полностью описать множества минимальных сложных и граничных классов. Ранее ни для одной задачи на графах таких описаний получить не удавалось.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 10-01-00357-а и 11-01-00107-а, и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2012 гг.», ГК 16.740.11.0310.

1. Введение

На настоящее время накоплено большое количество результатов про полиномиальную разрешимость и NP -полноту различных задач на графах во многих классах графов. Мотивы получения новых сведений такого рода могут быть самими разнообразными, но можно выделить два наиболее распространенных:

- (1) поиск более широких “простых” классов, объемлющих ранее известные;
- (2) поиск NP -полных сужений для известных “сложных” случаев.

Вместе с тем, при рассмотрении представительных семейств классов графов можно ставить задачи более общего характера, чем анализ сложности для индивидуального класса. В частности, можно поставить целью выявление пределов, до которых возможны расширения полиномиальной сложности и сужения с “противоположным” сложностным статусом. Тем самым, речь фактически идет о нахождении границы между “простыми” и “сложными” классами из рассматриваемого семейства.

В настоящем исследовании изучается эта граница для некоторых задач на графах в семействе наследственных классов графов, то есть классов графов, замкнутых относительно удаления вершин. Наследственный класс графов $\mathcal{X}$ определяется множеством своих запрещенных порожденных подграфов $\mathcal{F}$, что записывается так:

$$\mathcal{X} = \text{Free}(\{\mathcal{F}\}).$$

Дадим строгие определения неформально понимаемым в предыдущих абзацах понятиям простого и сложного классов графов. Пусть Π — какая-либо NP -полная задача на графах. Наследственный класс графов назовем Π -простым, если задача Π для графов из этого класса полиномиально разрешима, и Π -сложным в противном случае. Далее везде предполагаем справедливость неравенства $P \neq NP$ и не включаем его явно в формулировки полученных результатов.

Естественной идеей решения задачи демаркации является поиск максимальных Π -простых и минимальных Π -сложных классов, то есть тупиковых классов графов соответствующей сложности из рассматриваемой решетки. К сожалению, использование понятия максимального простого класса графов оказывается безрезультатным. Так, В. Е. Алексеев в [5] установил, что ни один Π -простой класс не является максимальным простым (хотя там это утверждается только для задачи о независимом множестве, все рассуждения легко переносятся на общий случай). Вместе с тем, до недавнего времени про минимальные сложные классы ничего не было известно.

Первый результат о подобного рода классах был получен автором в [1], где рассматривалась задача распознавания принадлежности наследственному классу графов и было доказано, что для любой задачи такого типа минимальных сложных классов нет. В той же работе были найдены первые примеры минимальных сложных классов графов. Другие примеры таких классов были найдены в [3, 4]. Однако в [1, 3, 4] рассматривалась одна и та же задача о списковом ранжировании, и до результатов настоящей работы не было известно других примеров существования минимальных сложных классов.

Новые такие классы выявляются в данной статье. Вместе с тем, по аналогии с результатами из [1], и для случаев существования минимальных сложных классов хотелось бы получить достаточные условия. Данное условие формулируется в настоящей работе. Оно использует понятие числа Дилворта наследственного класса, введенного в данной статье. Действительность полученного утверждения подтверждается выявленной последовательностью задач на графах $\{P_k\}$, для каждой из которых указывается минимальный P_k -сложный класс с числом Дилворта, равным k . Более того, для любого k данная работа содержит описание всех минимальных P_k -сложных классов. Для каждого k их оказывается конечное число. Это первые примеры задач на графах с полностью известным множеством минимальных сложных классов.

Итак, для некоторых задач на графах существуют минимальные сложные классы. Таким образом, желание нащупать границу эффективной разрешимости таких задач в семействе наследственных классов неизбежно приводит к рассмотрению пределов убывающих последовательностей из сложных классов. При этом возникает понятие граничного класса графов. Именно, класс графов $\mathcal{X}$ называется Π -граничным, если существует такая бесконечная последовательность Π -сложных классов графов $\mathcal{X}_1 \supseteq \mathcal{X}_2 \supseteq \dots$, что

$$\mathcal{X} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}_i,$$

и $\mathcal{X}$ является минимальным по включению классом с этим свойством. Понятие граничного класса было введено В. Е. Алексеевым в [5]. Значение этого понятия состоит в том, что

класс $\mathcal{X} = \text{Free}(\{\mathcal{F}\})$ с конечным множеством $\mathcal{F}$ является П-сложным тогда и тогда, когда $\mathcal{X}$ включает некоторый П-границный класс. Этот результат подтолкнул к попыткам дать полное описание таких классов для ряда графовых задач. В числе соответствующих исследований укажем диссертации [2, 9, 11] и работы [5, 6, 7, 10]. Однако центральная проблема теории граничных классов графов (получение полного описания) до настоящего времени не была решена ни для одной задачи. В этой статье полностью описываются все такие классы для задачи Π_k . Это множество полностью совпадает с соответствующим множеством минимальных Π_k -сложных классов.

В статье приняты следующие обозначения:

K_i — полный граф с i вершинами;

P_i — простой путь с i вершинами;

C_i — простой цикл с i вершинами;

$K_{p,q}$ — полный двудольный граф с p вершинами в одной доле и q вершинами в другой;

$K_i - e$ — результат удаления из графа K_i произвольного ребра;

$G_1 \oplus G_2$ — результат объединения двух графов G_1 и G_2 с непересекающимися множествами вершин;

kG — граф, изоморфный графу $\underbrace{G \oplus G \oplus \dots \oplus G}_k$ k слагаемых

$\bar{G}$ — дополнительный граф к графу G ;

M^n — n -я декартова степень множества M ;

$\mathbb{Z}_+$ — множество неотрицательных целых чисел.

2. Наследственные классы графов с небольшим значением числа Дилворта

В начале настоящего раздела приведем некоторые определения, связанные с отношениями порядка и их свойствами. Напомним, что любое рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение R , заданное над некоторым универсом U , называется отношением порядка. Два элемента $x \in U$ и $y \in U$ называются сравнимыми, если $x R y$ или $y R x$, и несравнимыми в противном случае. Отношение порядка R называется линейным, если любые два элемента из U сравнимы между собой. Подмножество множества U называется цепью, если любые два элемента из этого подмножества являются сравнимыми. Любое подмножество попарно несравнимых элементов из U называется антицепью.

Для конкретной пары (U, R) можно вычислить мощность наибольшей антицепи (то есть максимально возможное количество элементов в антицепях). Обозначим этот параметр через $w(R)$. Возможно, что $w(R) = \infty$ (такая ситуация может иметь место, если U бесконечно). С другой стороны, можно подсчитать наименьшее количество цепей, покрывающих U . Обозначим эту характеристику через $c(R)$. Другими словами, $c(R)$ — минимальное количество таких цепей $U_1, U_2, \dots$, что каждый элемент из U принадлежит хотя бы одной из этих цепей. Между характеристиками $w(R)$ и $c(R)$ имеются определенные связи.

Очевидно, что если $c(R)$ и $w(R)$ конечны, то $w(R) \leq c(R)$. Также понятно, что если $w(R)$ бесконечно, то и $c(R) = \infty$. Вместе с тем, если $w(R) < \infty$, то числа $w(R)$ и $c(R)$ равны между собой (этот результат доказан в [12]). В этом случае $w(R)$ принято называть числом Дилворта, которое обозначается через $\text{Dil}(R)$. Если $w(R) = \infty$, то число Дилворта $\text{Dil}(R)$ полагается равным бесконечности.

Данный раздел посвящен изучению значений чисел Дилворта применительно к некоторому порядку над графами из наследственных классов. Так, мы всегда будем полагать, что R — отношение “быть порожденным подграфом” над $U = \mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ — некоторый наследственный класс. Для таких R и U соответствующее число Дилворта обозначается через $\text{Dil}(\mathcal{X})$. Этот параметр будем называть числом Дилворта класса $\mathcal{X}$.

Наследственные классы графов с конечным числом Дилворта играют особую роль при систематическом поиске минимальных сложных классов. Поэтому нашей первой целью будет описать все наследственные классы с малым значением величины $\text{Dil}(\mathcal{X})$.

Лемма 1. Число Дилворта класса $\mathcal{X}$ равно единице тогда и только тогда, когда $\mathcal{X}$ состоит только из полных графов или только из пустых графов.

Доказательство. Поскольку

$$\text{Dil}(\mathcal{X}) = 1,$$

графы из $\mathcal{X}$ являются линейно упорядоченным множеством. Так как графы K_2 и $2K_1$ несравнимы, либо $\mathcal{X} \subseteq \text{Free}(\{K_2\})$, либо $\mathcal{X} \subseteq \text{Free}(\{2K_1\})$. В первом случае $\mathcal{X}$ составляют только пустые графы, а во втором — только полные.

Лемма 2. Равенство

$$\text{Dil}(\mathcal{X}) = 2$$

имеет место тогда и только тогда, когда

- (1) класс $\mathcal{X}$ состоит из некоторого количества (возможно, бесконечного) клик и некоторого количества (возможно, бесконечного) графов вида $K_p \oplus K_1$;
- (2) справедливо одно из следующих равенств:

$$\mathcal{X} = \{K_1, K_2, K_3, 2K_1, K_1 \oplus K_2, 2K_2\},$$

или

$$\mathcal{X} = \{K_1, K_2, K_3, 2K_1, K_1 \oplus K_2, 2K_2, K_2 \oplus K_3\},$$

или

$$\mathcal{X} = \{K_1, K_2, K_3, 2K_1, K_1 \oplus K_2, 2K_2, K_2 \oplus K_3, 2K_3\};$$

- (3) класс $\mathcal{X}$ состоит из некоторого количества (возможно, бесконечного) пустых графов и некоторого количества (возможно, бесконечного) графов вида $K_2 \oplus pK_1$;
- (4) класс $\mathcal{X}$ состоит из некоторого количества (возможно, бесконечного) пустых графов и графов $K_2 \oplus K_1$ и $2K_2$;

(5) справедливо одно из следующих равенств:

$$\mathcal{X} = \{K_1, 2K_1, 3K_1, K_2 \oplus K_1, 2K_2, 2K_2 \oplus K_1\},$$

или

$$\mathcal{X} = \{K_1, 2K_1, 3K_1, K_2 \oplus K_1, 2K_2, 2K_2 \oplus K_1, 3K_2\};$$

(6) класс $\mathcal{X}$ состоит из некоторого числа (возможно, бесконечного) полных графов и некоторого количества (возможно, бесконечного) пустых графов;

(7) класс $\mathcal{X}$ состоит из не менее чем двух графов вида $K_{1,p}$ и всевозможных их порожденных подграфов;

(8) класс $\mathcal{X}$ состоит из некоторого количества (возможно, бесконечного) пустых графов и графов K_2 и P_3 ;

(9) класс $\mathcal{X}$ состоит из некоторого количества (возможно, бесконечного) пустых графов и графов K_2 , P_3 и $K_{1,3}$;

(10) класс $\mathcal{X}$ состоит из некоторого количества (возможно, бесконечного) пустых графов и графов K_2 , P_3 и C_4 ;

(11) справедливо включение

$$\mathcal{X} \subseteq \{K_1, 2K_1, 3K_1, K_{1,3}, K_2, P_3, C_4, K_{2,3}, K_{3,3}\};$$

(12) класс $\mathcal{X}$ состоит из некоторого числа (возможно, бесконечного) полных графов и некоторого количества (возможно, бесконечного) графов вида $K_p - e$;

(13) класс $\mathcal{X}$ состоит из некоторого числа (возможно, бесконечного) полных графов и графов P_3 и C_4 ;

(14) справедливо равенство

$$\mathcal{X} = \{K_1, 2K_1, P_3, C_4, K_2, K_3, K_4 - e\}.$$

Доказательство. Из предыдущей леммы следует, что $\mathcal{X}$ обязательно содержит графы K_2 и $2K_1$. Возможны два случая.

Пусть $K_1 \oplus K_2 \in \mathcal{X}$. Тогда графы K_3 и $3K_1$ не могут одновременно принадлежать $\mathcal{X}$, так как $\{K_3, 3K_1, K_1 \oplus K_2\}$ есть антицепь. Поэтому либо $\mathcal{X} \subseteq \text{Free}(\{K_3\})$, либо $\mathcal{X} \subseteq \text{Free}(\{3K_1\})$. Рассмотрим возможные случаи.

Если $K_3 \in \mathcal{X}$, то $3K_1 \notin \mathcal{X}$ и $P_3 \notin \mathcal{X}$ (так как $\{K_3, 3K_1, P_2 \oplus K_1\}$ и $\{K_3, P_3, K_1 \oplus K_2\}$ — антицепи). Но тогда $\mathcal{X} \subseteq \text{Free}(\{3K_1, P_3\})$. Ясно, что каждый граф из $\mathcal{X}$ имеет не более чем две компоненты связности и каждая из них является кликой. Графы $K_4, 2K_2, K_1 \oplus K_3$ образуют антицепь, поэтому они одновременно $\mathcal{X}$ принадлежать не могут. Если $2K_2 \notin \mathcal{X}$, то $\mathcal{X}$ содержит только клики и графы вида $K_p \oplus K_1$ (реализуется п. 1). Каждый такой класс имеет число Дилворта, равное 2. Если $K_1 \oplus K_3 \notin \mathcal{X}$, то $\mathcal{X}$ содержит только клики и графы $2K_1, K_1 \oplus K_2$ (снова реализуется п. 1). Классы такого типа также имеют число Дилворта, равное 2. Наконец, если $K_4 \notin \mathcal{X}$, то либо

$$\mathcal{X} = \{K_1, K_2, K_3, 2K_1, K_1 \oplus K_2\}$$

или

$$\mathcal{X} = \{K_1, K_2, K_3, 2K_1, K_1 \oplus K_2, K_1 \oplus K_3\}$$

(опять реализуется п. 1), либо

$$\mathcal{X} = \{K_1, K_2, K_3, 2K_1, K_1 \oplus K_2, 2K_2\}$$

или

$$\mathcal{X} = \{K_1, K_2, K_3, 2K_1, K_1 \oplus K_2, 2K_2, K_2 \oplus K_3\}$$

или

$$\mathcal{X} = \{K_1, K_2, K_3, 2K_1, K_1 \oplus K_2, 2K_2, K_2 \oplus K_3, 2K_3\}$$

(реализуется п. 2).

Если $3K_1 \in \mathcal{X}$, то $K_3 \notin \mathcal{X}$ и $P_3 \notin \mathcal{X}$ (так как $\{3K_1, K_3, K_1 \oplus K_2\}$ и $\{3K_1, P_3, K_1 \oplus K_2\}$ — антицепи). Тогда $\mathcal{X} \subseteq \text{Free}(\{K_3, P_3\})$. Отсюда следует, что каждый граф из $\mathcal{X}$ изоморфен графу $pK_2 \oplus qK_1$. Если $4K_1 \in \mathcal{X}$, то либо $2K_2 \notin \mathcal{X}$, либо $K_2 \oplus 2K_1 \notin \mathcal{X}$. В первом случае $\mathcal{X}$ состоит только из пустых графов и графов вида $K_2 \oplus pK_1$ (реализуется п. 3). Число Дилворта каждого такого класса действительно равно 2. Во втором случае либо реализуется п. 3, либо $\mathcal{X}$ содержит только пустые графы и только графы $K_2 \oplus K_1, 2K_2$ (реализуется п. 4). Число Дилворта каждого такого класса также равно 2. Если же $\mathcal{X} \subseteq \text{Free}(\{4K_1\})$, то либо

$$\mathcal{X} = \{K_1, 2K_1, 3K_1, K_2 \oplus K_1\}$$

или

$$\mathcal{X} = \{K_1, 2K_1, 3K_1, K_2 \oplus K_1, 2K_2\}$$

(реализуется п. 3), либо

$$\mathcal{X} = \{K_1, 2K_1, 3K_1, K_2 \oplus K_1, 2K_2, 2K_2 \oplus K_1\}$$

или

$$\mathcal{X} = \{K_1, 2K_1, 3K_1, K_2 \oplus K_1, 2K_2, 2K_2 \oplus K_1, 3K_2\}$$

(реализуется п. 5). Для всех данных случаев $\text{Dil}(\mathcal{X}) = 2$.

Будем теперь считать, что $K_1 \oplus K_2 \notin \mathcal{X}$. Тогда все несвязные графы из $\mathcal{X}$ являются пустыми. Графы $3K_1, P_3$ и K_3 не могут одновременно принадлежать классу $\mathcal{X}$. Если $\mathcal{X} \subseteq \text{Free}(\{P_3\})$, то $\mathcal{X}$ состоит только из полных и пустых графов (реализуется п. 6). Все такие классы графов имеют число Дилворта, равное 2. Пусть теперь $P_3 \in \mathcal{X}$. Рассмотрим возможные случаи.

Если $3K_1 \in \mathcal{X}$, то $\mathcal{X} \subseteq \text{Free}(\{K_3, K_1 \oplus K_2\})$. Легко проверить, что все связные графы из $\mathcal{X}$ являются полными двудольными. Если $4K_1 \in \mathcal{X}$, то либо $K_{1,3} \notin \mathcal{X}$, либо $C_4 \notin \mathcal{X}$. Класс

$\text{Free}(\{K_3, K_1 \oplus K_2, C_4\})$ состоит из лесов. Поэтому, если $C_4 \notin \mathcal{X}$, то либо реализуется п. 7, либо $\mathcal{X}$ содержит только пустые графы и только графы K_2, P_3 (реализуется п. 8), либо $\mathcal{X}$ содержит только пустые графы и только графы K_2, P_3 и $K_{1,3}$ (реализуется п. 9). Все классы такого вида имеют число Дилворта, равное 2. Если $C_4 \in \mathcal{X}$, то $K_{1,3} \notin \mathcal{X}$, поэтому $\mathcal{X} \subseteq \text{Free}(\{K_{1,3}, K_3, K_1 \oplus K_2\})$. Но тогда $\mathcal{X}$ содержит только пустые графы и только графы K_2, P_3 и C_4 (реализуется п. 10). Такие классы имеют число Дилворта, равное 2. Если $4K_1 \notin \mathcal{X}$, то $\mathcal{X} \subseteq \{K_1, 2K_1, 3K_1, K_{1,3}, K_2, P_3, C_4, K_{2,3}, K_{3,3}\}$ (реализуется п. 11). Легко проверить, что все такие $\mathcal{X}$ имеют число Дилворта, равное 2.

Если $K_3 \in \mathcal{X}$, то $\mathcal{X} \subseteq \text{Free}(\{3K_1\})$. Поскольку все графы из $\mathcal{X} \cap \text{Free}(\{K_3\})$ являются полными двудольными, то связными графами из $\mathcal{X} \cap \text{Free}(\{K_3\})$ могут быть только графы K_2, P_3, C_4 . С другой стороны, все графы из $\mathcal{X}$, содержащие K_3 , являются кликами или имеют вид $K_p - e$. В этом несложно убедиться, учитывая включение $\mathcal{X} \subseteq \text{Free}(\{K_1 \oplus K_2, 3K_1\})$. Графы $K_4, C_4, K_4 - e$ одновременно не могут принадлежать классу $\mathcal{X}$ (так как $\{K_4, C_4, K_4 - e\}$ — антицепь). Если $C_4 \notin \mathcal{X}$, то $\mathcal{X}$ содержит только полные графы и только графы вида $K_p - e$ (реализуется п. 12). Все данные классы графов действительно имеют число Дилворта, равное 2. Если $C_4 \in \mathcal{X}$ и $K_4 - e \notin \mathcal{X}$, то $\mathcal{X}$ содержит только полные графы и только графы P_3 и C_4 (реализуется п. 13). Число Дилворта этих классов равно 2. Если $C_4 \in \mathcal{X}$ и $K_4 \notin \mathcal{X}$, то либо

$$\mathcal{X} = \{K_1, 2K_1, P_3, C_4, K_2, K_3\}$$

(опять реализуется п. 13), либо

$$\mathcal{X} = \{K_1, 2K_1, P_3, C_4, K_2, K_3, K_4 - e\}$$

(реализуется п. 14).

Таким образом, для случаев 1–14, и только для них, справедливо равенство

$$\text{Dil}(\mathcal{X}) = 2.$$

Скрупулезный анализ, проведенный при доказательстве леммы 2, показывает, что получение описания классов $\mathcal{X}$ с малым числом Дилворта в терминах имеющихся в них графов, по-видимому, неосуществимо уже при $\text{Dil}(\mathcal{X}) \geq 3$. Вместе с тем, наблюдение о том, что классы графов с числом Дилворта $k + 1$ могут быть тесно связаны с классами, имеющими число Дилворта k , приводит к мысли дать соответствующее индуктивное описание. База такого описания уже заложена в формулировке леммы 1.

Очевидно, что класс графов $\mathcal{X}$ является непосредственным предшественником класса $\mathcal{Y}$ (по отношению включения), если существует такой граф $G \in \text{Forb}(\mathcal{X})$, что $\mathcal{Y}$ получается добавлением G к классу $\mathcal{X}$. Ясно, что

$$\text{Dil}(\mathcal{X}) \leq \text{Dil}(\mathcal{Y}) \leq \text{Dil}(\mathcal{X}) + 1.$$

Вместе с тем, предпринимавшиеся автором попытки охарактеризовать случаи перехода от $\mathcal{X}$ к $\mathcal{Y}$ с сохранением числа Дилворта в терминах только окрестности графа G (то есть порожденных подграфов G) ни к чему не привели. Возможно, такой подход вообще обречен на неудачу. Выходом из этого тупика явился глобальный анализ ситуации, то есть формулировка критерия, в котором фигурирует все семейство $\mathcal{X}$, а не отдельная его часть. Следующее утверждение может быть легко доказано.

Лемма 3. *Равенство*

$$\text{Dil}(\mathcal{Y}) = \text{Dil}(\mathcal{X})$$

имеет место тогда и только тогда, когда для класса $\mathcal{X}$ существует такое покрытие $\text{Dil}(\mathcal{X})$ цепями, в котором одна из цепей целиком состоит из порожденных подграфов графа G .

Весьма интересны вопросы о существовании классов графов $\mathcal{X}$, для которых добавление любого графа из $\text{Forb}(\mathcal{X})$ не изменяет (увеличивает) число Дилворта. Ответы на оба вопроса положительны, и ответить на первый вопрос нам помогает лемма 3.

Для любого k в качестве класса $\mathcal{X}$ рассмотрим множество графов с не более чем k вершинами. Понятно, что $\text{Dil}(\mathcal{X}) < \infty$ и что $\text{Forb}(\mathcal{X})$ составляют всевозможные графы, имеющие ровно $k + 1$ вершину. Понятно, что для любого графа $G \in \text{Forb}(\mathcal{X})$ и любого оптимального покрытия класса $\mathcal{X}$ существует цепь, целиком состоящая из порожденных подграфов графа G . Поэтому в силу леммы 3 справедливо равенство

$$\text{Dil}(\mathcal{X}) = \text{Dil}(\mathcal{X} \cup \{G\}).$$

Для любого s в качестве класса $\mathcal{X}$ рассмотрим множество полных двудольных графов с не более чем s вершинами в одной из долей. Легко проверить, что

$$\text{Forb}(\mathcal{X}) = \{C_3, K_2 \oplus K_1, K_{s+1, s+1}\}$$

и что класс $\mathcal{X}$ содержит антицепь $\{K_{1, 2s+1}, K_{2, 2s}, \dots, K_{s, s+2}, \bar{K}_{2s+2}\}$ длины $s + 1$. Легко построить покрытие класса $\mathcal{X}$, состоящее из $s + 1$ цепей. Поэтому

$$\text{Dil}(\mathcal{X}) = s + 1.$$

Вместе с тем, для любого $G \in \{C_3, K_2 \oplus K_1, K_{s+1, s+1}\}$ совокупность графов $\{K_{1, 2s+1}, K_{2, 2s}, \dots, K_{s, s+2}, \bar{K}_{2s+2}, G\}$ также является антицепью. Таким образом,

$$\text{Dil}(\mathcal{X} \cup \{G\}) \geq s + 2.$$

С другой стороны, класс $\mathcal{X} \cup \{G\}$ может быть покрыт системой из $s + 2$ цепей. Поэтому

$$\text{Dil}(\mathcal{X} \cup \{G\}) = s + 2 = \text{Dil}(\mathcal{X}) + 1.$$

3. Полные описания граничных и минимальных сложных классов для ряда задач на графах

В [1] рассматривался вопрос о существовании минимальных сложных классов для ряда задач на графах. Там было показано, что для задачи распознавания принадлежности любому наследственному классу $\mathcal{X}$ (то есть задачи, в которой по заданному графу G необходимо определить, принадлежит ли G классу $\mathcal{X}$) минимальных сложных классов нет. Этот результат можно рассматривать как систематический способ генерации задач на графах П без минимальных сложных классов. Для этого достаточно рассмотреть наследственный класс вершинно (или реберно) 3-раскрашиваемых графов и объединить его с любым конечным наследственным классом, содержащим граф K_5 . Задача распознавания принадлежности любому такому классу является NP -полной (поскольку задачи о вершинной и о реберной 3-раскраске имеют такой же сложности статус). Таким образом, результат из [1] действует сразу для континуального множества задач на графах.

Возникает вопрос, нельзя ли, как в [1], получить достаточное условие существования минимальных сложных классов, также претендующее на определенную систематичность?

В предыдущем разделе рассматривалась совокупность наследственных классов, имеющих конечное число Дилворта. Особый интерес к данным классам вызван тем обстоятельством, что любой такой сложный класс обязательно содержит некоторый минимальный сложный (и именно поэтому в предыдущем разделе все усилия были направлены на получение описания классов графов с конечным числом Дилворта). Это утверждение будет доказано далее.

Теорема 1. *Если $\mathcal{X}$ является Π -сложным классом и $\text{Dil}(\mathcal{X}) < \infty$, то $\mathcal{X}$ содержит некоторый минимальный Π -сложный класс.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует такое бесконечное множество графов $\mathcal{Y} = \{G_1, G_2, \dots\}$, что $G_1 \in \mathcal{X}$, $G_2 \in \mathcal{X} \cap \text{Free}(\{G_1\})$, $G_3 \in \mathcal{X} \cap \text{Free}(\{G_1, G_2\})$, $\dots$, $G_k \in \mathcal{X} \cap \text{Free}(\{G_1, G_2, \dots, G_{k-1}\})$, $\dots$, и класс $\mathcal{X} \cap \text{Free}(\{G_1, G_2, \dots, G_k\})$ является Π -сложным при любом k . Покажем, что множество $\mathcal{Y}$ не может содержать бесконечных цепей. Действительно, если такая цепь существует, то все ее элементы различны и они являются порожденными подграфами некоторого графа G . Но это невозможно, так как G содержит только конечное множество порожденных подграфов.

Заметим, что $\mathcal{Y}$ может быть покрыто конечным множеством цепей, поскольку $\text{Dil}(\mathcal{X}) < \infty$. Множество $\mathcal{Y}$ покрывается конечным множеством конечных цепей. Следовательно, это множество является конечным. Получаем противоречие. Значит, исходное предположение неверно.

В [1] были впервые предъявлены примеры минимальных сложных классов. Исследования в этом направлении были продолжены в [3, 4]. Однако во всех статьях этого цикла рассматривались задачи о списковом ранжировании (вершинный и реберный варианты) и устанавливалась минимальность некоторых сложных классов для этих задач. Вместе с тем, до настоящей работы не было известно никаких других примеров задач на графах с существованием минимальных сложных классов. Далее мы укажем новые такие случаи. Именно, будет показано, что для любого натурального k существует задача на графах Π_k и минимальный Π_k -сложный класс $\mathcal{X}_k$, имеющий число Дилворта, равное k .

Члены последовательности $\{\Pi_k\}$ — некоторые специальные представители задачи о наибольшем взвешенном 3-раскрашиваемом подграфе. Для любого натурального k в задаче Π_k заданы граф G и отображение $c: E(G) \rightarrow \{-1, 1\}$. Требуется найти такой подграф H графа G , что H имеет 3-раскраску вершин и величина $w(H)$ является максимально возможной. Значение $w(H)$ определяется следующим образом: $w(H) = 0$, если размер наибольшего независимого множества графа H не равен k , и

$$w(H) = \sum_{e \in E(H)} c(e)$$

в противном случае.

Уточним, что под сложным для задачи Π_k понимается наследственный класс графов, для которого данная задача полиномиально разрешима при любой функции c . Ясно, что каждый Π_k -сложный класс содержит хотя бы один граф с наибольшим независимым множеством мощности k . Понятно также, что если $\mathcal{X}$ является Π_k -сложным, $G \in \mathcal{X}$ и G имеет независимое множество мощности, превосходящей k , то $\mathcal{X} \cap \text{Free}(\{G\})$ также является Π_k -сложным. Поэтому все минимальные Π_k -сложные классы состоят из графов, у которых каждое независимое множество состоит из не более чем k вершин. Понятно, что каждый минимальный Π_k -сложный класс должен быть бесконечным, поэтому любой такой класс должен содержать все клики. Это легко следует из теоремы Рамсея.

Рассмотрим множество графов $\bigcup_{i=1}^{\infty} \{K_i \oplus \bar{K}_s : s \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}\}$ в качестве заявленного класса $\mathcal{X}_k$; при этом предполагается, что $K_i \oplus K_0 = K_i$. Очевидно, что $\mathcal{X}_k$ — наследственный класс графов и $\text{Dil}(\mathcal{X}_k) = k$. Легко проверить, что $\mathcal{X}_k$ удовлетворяет также всем необходимым требованиям к минимальным P_k -сложным классам, упомянутым в предыдущем абзаце.

Теорема 2. *Для любого s класс $\mathcal{X}_s$ является минимальным P_s -сложным.*

Доказательство. Докажем сначала, что класс $\mathcal{X}_s$ является P_s -сложным. Обозначим через $\mathcal{U}$ множество всех вершинно 3-раскрашиваемых графов. Очевидно, что класс $\mathcal{U}$ замкнут не только относительно удаления вершин, но и относительно удаления ребер. Покажем, что при любом s NP -полная задача распознавания принадлежности графа классу $\mathcal{U}$ полиномиально сводится к задаче P_s в классе $\mathcal{X}_s$. Отсюда следует NP -полнота задачи P_s в классе $\mathcal{X}_s$.

Рассмотрим произвольный граф G . Добавим к G несколько ребер до полного графа и $s-1$ изолированную вершину и получим граф G' . Для каждого $e \in E(G') \cap E(G)$ положим $c(e) = 1$; для всех остальных ребер e графа G' положим $c(e) = -1$. Понятно, что граф H — решение задачи P_s для графа G' — не содержит ни одного ребра с отрицательным значением функции c , поскольку класс $\mathcal{U}$ замкнут относительно удаления ребер. Ясно, что граф G является вершинно 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда

$$w(H) = |E(G)|.$$

Отсюда следует заявленная выше сводимость.

Докажем теперь минимальность класса $\mathcal{X}_s$. Для этого покажем, что для любого $G \in \mathcal{X}_s$ класс $\mathcal{X}_s \cap \text{Free}(\{G\})$ является P_s -простым. Среди графов из $\mathcal{X}_s \cap \text{Free}(\{G\})$ необходимо рассмотреть только графы вида $K_n \oplus \bar{K}_{s-1}$, так как во всех остальных случаях в качестве ответа можно взять результат удаления всех ребер из входного графа. Пусть

$$G = K_i \oplus \bar{K}_j.$$

Заметим, что тогда $n \leq i$. Следовательно, во множестве $\mathcal{X}_s \cap \text{Free}(\{G\})$ графов вида $K_n \oplus \bar{K}_{s-1}$ имеется только конечное число. Поэтому задача P_s в классе $\mathcal{X}_s \cap \text{Free}(\{G\})$ полиномиально разрешима при любом G .

Заметим, что класс $\mathcal{X}_k$ является минимальным сложным не только для задачи P_k . Для образования новых таких задач достаточно перейти от рассмотрения вершинно 3-раскрашиваемых графов к графам из произвольного класса, замкнутого относительно удалений вершин и ребер, с NP -полной задачей распознавания принадлежности. Примерами таких классов графов являются классы вершинно k -раскрашиваемых и реберно k -раскрашиваемых графов при $k > 3$.

Можно также заметить, что класс $\mathcal{X}_s$ не является единственным минимальным P_s -сложным классом с числом Дилворта, равным s . Для этого через $\mathcal{U}_s$, $s > 1$, обозначим совокупность графов, являющихся порожденными в графах из $\bigcup_{i=1}^{\infty} \{K_s \oplus \bar{K}_i\}$. Легко проверить, что

$$\text{Dil}(\mathcal{U}_s) = s.$$

По аналогии с доказательством теоремы 2, можно показать, что $\mathcal{U}_s$ есть минимальный P_s -сложный класс.

Итак, классы $\mathcal{X}_k$ и $\mathcal{Y}_k$ являются минимальными Π_k -сложными. Возникает вопрос о существовании других таких классов. Представляет также интерес вопрос, каким образом устроено все множество минимальных Π_k -сложных классов. Для ответа на этот вопрос вначале напомним понятие расщепляемого графа. Граф G называется расщепляемым, если множество его вершин V можно так разбить на два подмножества V_1 и V_2 , что V_1 порождает в графе полный подграф, а V_2 порождает пустой подграф. Рассмотрим всевозможные бесконечные классы расщепляемых графов, у которых размер наибольшего независимого множества равен k . Через $\mathcal{X}(k)$ обозначим семейство наследственных замыканий таких классов. Через $\mathcal{X}^*(k)$ обозначим множество минимальных по включению классов из $\mathcal{X}(k)$. По аналогии с доказательством теоремы 2, можно показать, что каждый класс из $\mathcal{X}(k)$ является минимальным Π_k -сложным. Оказывается, что других таких классов не существует.

Теорема 3. *Все множество минимальных Π_k -сложных классов совпадает с множеством $\mathcal{X}^*(k)$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует минимальный Π_k -сложный класс $\mathcal{X}$, не принадлежащий множеству $\mathcal{X}^*(k)$. Рассмотрим те графы из $\mathcal{X}$, число независимости которых равно k . В данных графах рассмотрим подграфы, порожденные объединением наибольшего независимого множества и наибольшей клики. Понятно, что таких попарно неизоморфных расщепляемых подграфов бесконечное количество. Обозначим это множество $\mathcal{Y}$. Ясно, что наследственное замыкание класса $\mathcal{Y}$ включает некоторый элемент $\mathcal{Z} \in \mathcal{X}^*(k)$. Но тогда $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$, и поэтому $\mathcal{X}$ не является минимальным сложным. Получаем противоречие. Поэтому исходное предположение неверно.

Отметим, что теорема 3 является первым примером полного описания минимальных сложных классов. Ранее результатов такого рода не удавалось получить. Возникает вопрос, как быть с Π_k -граничными классами. Оказывается, что все множество граничных классов для задачи Π_k совпадает с множеством $\mathcal{X}^*(k)$. Доказательство этого утверждения составляет оставшуюся часть.

Сначала введем понятия характеристических векторов графа и класса. Для любого расщепляемого графа G , имеющего наибольшее независимое множество размера k , существуют такие непересекающиеся множества вершин V_1 и V_2 , что $V(G) = V_1 \cup V_2$, V_1 порождает в G пустой подграф и содержит ровно k вершин, а V_2 порождает полный подграф. Занумеруем некоторым образом все подмножества множества V_1 числами от 1 до 2^k . Характеристическим вектором графа G назовем такой вектор $(v_1(G), v_2(G), \dots, v_{2^k}(G))$, в котором $v_i(G)$ — количество тех вершин $x \in V_2$, которые имеют окрестность $V_2 \setminus \{x\} \cup V^{(i)}$, где $V^{(i)}$ есть i -е подмножество множества V_1 . Легко проверить, что характеристический вектор — инвариант графа G , поскольку он не зависит от выбора пары (V_1, V_2) . Понятно также, что любой граф с наибольшим независимым множеством размера k имеет единственный характеристический вектор, и, наоборот, любой вектор из $\mathbf{Z}_+^{2^k}$ является характеристическим для некоторого такого графа.

Пусть $\mathcal{X}$ — наследственное замыкание некоторого множества графов $\mathcal{Y}$, каждый из которых имеет наибольшее независимое множество мощности k . Характеристическим вектором класса $\mathcal{X}$ называется вектор $(v_1(\mathcal{X}), v_2(\mathcal{X}), \dots, v_{2^k}(\mathcal{X}))$, где под $v_i(\mathcal{X})$ понимается бесконечность, если величина $v_i(G)$ может принимать бесконечно большие значения, или число $\max_{G \in \mathcal{X}} v_i(G)$ в противном случае. Из наследственности класса $\mathcal{X}$ следует, что $\mathcal{Y}$ состоит из тех и только тех графов H , которые имеют такой характеристический вектор $(v_1(H), v_2(H), \dots, v_{2^k}(H))$, что для любого $i \in \{1, 2, \dots, 2^k\}$ выполнено неравенство

$$v_i(H) \leq v_i(\mathcal{X});$$

бесконечность, как обычно, считается больше любого числа.

Понятие характеристического вектора класса и теорема Диксона [8] позволяют доказать важное вспомогательное утверждение — конечность множества $\mathcal{X}^*(k)$. Теорема Диксона состоит в том, что при любом фиксированном n на множестве $\mathbf{Z}_+^n$ отношение порядка “быть покоординатно не больше” имеет лишь конечные антицепи. Аналог теоремы Диксона может быть легко доказан и для множества $(\mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\})^n$.

Лемма 4. При любом k множество $\mathcal{X}^*(k)$ конечно.

Доказательство. Рассмотрим характеристические вектора классов из $\mathcal{X}^*(k)$. Поскольку любые два таких класса не сравнимы по отношению включения, на множестве $(\mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\})^n$ множество всех рассматриваемых характеристических векторов образует антицепь по отношению “быть покоординатно не больше”. Из аналога теоремы Диксона следует конечность этой антицепи.

Теорема 4. Для любого k все множество Π_k -граничных классов совпадает с множеством $\mathcal{X}^*(k)$.

Доказательство. Поскольку каждый класс $\mathcal{X}^*(k)$ является Π_k -сложным, то он также является и Π_k -предельным. Докажем, что других предельных классов нет. Предположим противное; тогда существует такой Π_k -предельный класс $\mathcal{X}$, что $\mathcal{X} \notin \mathcal{X}^*(k)$. При доказательстве теоремы 3 фактически было доказано, что любой Π_k -сложный класс содержит некоторый класс из $\mathcal{X}^*(k)$. Отсюда следует, что каждый элемент любой монотонно убывающей последовательности из Π_k -сложных классов включает хотя бы один класс из $\mathcal{X}^*(k)$. Так как совокупность $\mathcal{X}^*(k)$ является конечной, то существует подпоследовательность, каждый член которой включает один и тот же класс из $\mathcal{X}^*(k)$. Поэтому и предел любой монотонно убывающей последовательности из Π_k -сложных классов включает хотя бы один класс из $\mathcal{X}^*(k)$. Отсюда следует, что все множество Π_k -предельных классов совпадает с множеством $\mathcal{X}^*(k)$. Отсюда также следует минимальность классов из $\mathcal{X}^*(k)$, то есть, что каждый класс из $\mathcal{X}^*(k)$ действительно является Π_k -граничным.

Задачи из множества $\{\Pi_1, \Pi_2, \dots\}$ — первые примеры задач на графах с полным описанием граничных классов. Это также и первые примеры задач, для которых доказана конечность множества граничных классов.

Список литературы

1. Малышев Д. С., О минимальных сложных классах графов. *Дискретный анализ и исследование операций* (2009) **16**, №6, 43–51.
2. Малышев Д. С., *Исследование границ эффективной разрешимости в семействе наследственных классов графов*, Дисс. на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук, 01.01.09 — Дискретная математика и математическая кибернетика, Нижний Новгород, 2009.
3. Малышев Д. С., Последовательные минимумы решетки наследственных классов графов для задачи о реберном списковом ранжировании. *Вестник Нижегородского ун-ва*. (2010) №4, 143–146.
4. Малышев Д. С., Минимальные сложные классы графов для задачи о реберном списковом ранжировании. *Дискретный анализ и исследование операций* (2011) **18**, №1, 70–76.
5. Alekseev V. E., On easy and hard hereditary classes of graphs with respect to the independent set problem. *Discrete Appl. Math.* (2004) **132**, 17–26.

6. Alekseev V. E., Boliac R., Korobitsyn D. V., Lozin V. V., *NP-hard graph problems and boundary classes of graphs. Theoret. Comput. Sci.* (2007) **389**, 219–236.
7. Alekseev V. E., Korobitsyn D. V., Lozin V. V., Boundary classes of graphs for the dominating set problem. *Discrete Mathematics* (2004) **285**, 1–6.
8. Dickson L. E., Finiteness of the odd perfect and primitive abundant numbers with n distinct prime factors. *Amer. J. Math.* (1913) **35**, 413–422.
9. Kaminski M., *New algorithmic and hardness results on graph partitioning problems*, PhD Thesis. Rutgers Center for Operations Research, Rutgers Univ., New Jersey, 2007.
10. Lozin V. V., Boundary classes of planar graphs. *Combinatorics, Probability, and Computing* (2008) **17**, 287–295.
11. Millanic M., *Algorithmic developments and complexity results for finding maximum and exact independent sets in graphs*, PhD Thesis. Rutgers Center for Operations Research, Rutgers Univ., New Jersey, 2007.
12. Perles M., On Dilworth's theorem in the infinite case. *Israel J. Math.* (1963) **1**, 108–109.

Статья поступила 7.07.2011.