Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. И. Ивченко, М. В. Солдаткина, Статистические задачи для случайных подстановок с цензурированными данными, *Дискрет. матем.*, 2012, том 24, выпуск 4, 104–113

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1214>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 10:26:40

Статистические задачи для случайных подстановок с цензурированными данными

© 2012 г. Г. И. Ивченко, М. В. Солдаткина

В d -мерной параметрической модели случайных подстановок степени n решаются задачи асимптотического при $n \rightarrow \infty$ оценивания неизвестных параметров и проверки различных гипотез о них по неполным данным, когда в подстановке наблюдаются лишь циклы некоторой ограниченной длины. Также рассматривается случай больших выборов и строится критерий однородности для него.

1. Введение

В [2] была введена следующая d -параметрическая модель случайных n -подстановок, то есть взаимно однозначных отображений множества $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ в себя.

Пусть задано некоторое разбиение множества X_n :

$$X_n = \bigcup_{j=1}^d A_j, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad (1)$$

и пусть $\mathbf{c}(n) = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ есть цикловая структура n -подстановки s , именно, c_i есть число циклов длины i , $i = 1, \dots, n$, причем

$$\sum_i i c_i = n.$$

Циклы подстановки s , длины которых являются элементами подмножества A_j , называются A_j -циклами, их число обозначается

$$C_{A_j}(n) = \sum_{i \in A_j} c_i, \quad j = 1, \dots, d.$$

Если подмножество A_j имеет вид

$$A_j = \{k: k = ld + j, l \geq 0\} \quad (2)$$

для некоторых целых $d \geq 2$ и $1 \leq j \leq d$, то говорят о конгруэнтных циклах (см. [1], с. 187).

Далее, на множестве всех n -подстановок $S_n = \{s\}$ задается параметрическая вероятностная мера вида

$$\mathbf{P}_\theta(s) = I\left(\sum_{i=1}^n i c_i = n\right) \frac{1}{H_n(\theta)} \prod_{j=1}^d \theta_j^{C_{A_j}(n)}, \quad (3)$$

где $I(\cdot)$ — индикатор, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$, $\theta_j \geq 0$, $j = 1, \dots, d$, — произвольные параметры, не равные нулю одновременно, и $H_n(\theta)$ — необходимый нормирующий множитель, имеющий вид

$$H_n(\theta) = n! [z^n] \exp \left\{ \sum_{j=1}^d \theta_j \sum_{i \in A_j} \frac{z^i}{i} \right\}; \quad (4)$$

здесь и далее

$$[z^n]f(z) = \text{coef}_z^n f(z).$$

В [2] доказана асимптотическая, при $n \rightarrow \infty$, нормальность вектора

$$\mathbf{C}(n) = (C_{A_1}(n), \dots, C_{A_d}(n))$$

чисел конгруэнтных циклов случайной подстановки в такой модели и решены соответствующие задачи проверки статистических гипотез о параметре $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$.

Подчеркнем, что в этих исследованиях предполагается известной вся цикловая последовательность $\mathbf{c}(n) = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, то есть имеется полная информация о наблюдаемой подстановке, и соответствующие выводы имеют асимптотический (при $n \rightarrow \infty$) характер. Но в этом случае не всегда является реалистичным предположение о том, что мы можем наблюдать всю цикловую последовательность $\mathbf{c}(n)$. Может быть и так, что наблюдению доступно лишь какое-то ограниченное число k ее первых членов $c_1, c_2, \dots, c_k$, в этом случае говорят о цензурированных (неполных) данных. Статистические задачи для случайных подстановок с неполными данными в рамках однопараметрической модели Эванса, когда подстановка $s \in S_n$ наблюдается с вероятностью, пропорциональной $\theta^{c(n)}$, где

$$c(n) = c_1 + c_2 + \dots + c_n$$

есть общее число циклов подстановки s , рассматривались в [4]. В настоящей работе аналогичный подход применяется к описанной выше d -параметрической модели с конгруэнтными циклами.

Именно, будем предполагать, что в наблюдаемой подстановке $s \in S_n$ для каждого $j = 1, \dots, d$ доступно подсчету лишь число A_j -циклов с длинами, не превосходящими заданного уровня K_j . В таком случае, пусть

$$\xi_j(n) = \sum_{i \in A_j} c_i I(i \leq K_j), \quad j = 1, \dots, d, \quad (5)$$

есть наши исходные данные (количества наблюдаемых A_j -циклов). Рассмотрим различные вопросы статистического вывода для модели (1)–(4) именно по таким неполным данным (5). При этом будем предполагать, что порядок подстановки $n \rightarrow \infty$, а параметры цензурирования K_j , $j = 1, \dots, d$, фиксированы.

Основой для дальнейших выводов будет служить следующее утверждение об асимптотическом распределении наблюдаемых статистик $c_1, c_2, \dots$, то есть начальных членов цикловой структуры подстановки.

Теорема 1. Для случайной подстановки s в модели (1)–(4) при $n \rightarrow \infty$ числа циклов ограниченной длины асимптотически независимы, и при этом число A_j -циклов длины i имеет в пределе распределение Пуассона $\Pi(\theta_j/i)$.

Доказательство этой теоремы приведено в приложении.

Следствие 1. Наблюдаемые статистики (5) асимптотически независимы, и

$$\mathcal{L}(\xi_j(n)) \rightarrow \Pi(\theta_j \lambda_j), \quad \lambda_j = \sum_{i \in A_j} \frac{1}{i} I(i \leq K_j) = \sum_{l \leq (K_j - j)/d} \frac{1}{ld + j}. \quad (6)$$

Из этих результатов следует, во-первых, что статистические выводы о каждом из параметров θ_j можно делать независимо по наблюдению лишь соответствующей статистики $\xi_j(n)$, и, во-вторых, исходная проблема в асимптотике сводится к соответствующим статистическим задачам для пуассоновской модели с неизвестным параметром, решение которых достаточно хорошо известно. Используя известные результаты для пуассоновской модели, мы в разделе 2 приводим решение задач точечного и доверительного оценивания параметров θ_j нашей модели, и в разделе 3 — задач проверки статистических гипотез. В разделе 4 анализируется многовыборочный случай (наблюдается большое число независимых подстановок), и в разделе 5 решается задача проверки гипотезы однородности для этой ситуации.

2. Оценивание параметров

Пусть имеется N независимых подстановок $s_1, \dots, s_N$, полученных при одном и том же значении неизвестного параметра $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$, и, тем самым, имеется выборка (набор наблюдаемых статистик (5))

$$(\xi_1^{(k)}(n), \dots, \xi_d^{(k)}(n)), \quad k = 1, \dots, N. \quad (7)$$

Как отмечено во введении, компоненты этих векторов асимптотически, при $n \rightarrow \infty$ и фиксированных уровнях цензурирования K_j , независимы и распределены в соответствии с (6), поэтому для суммарного числа наблюдаемых A_j -циклов

$$T_j = T_j(N, n) = \sum_{k=1}^N \xi_j^{(k)}(n) \quad (8)$$

будет выполняться предельное соотношение

$$\mathcal{L}(T_j(N, n)) \rightarrow \Pi(N\theta_j \lambda_j). \quad (9)$$

Это соотношение сводит задачу оценивания параметров θ_j модели (1)–(4) к задаче оценивания неизвестного параметра пуассоновской модели.

Известно (см., например, [6, §3.4]), что оптимальной, то есть несмещенной с минимальной дисперсией, оценкой сходящегося при всех $\theta > 0$ степенного ряда

$$\tau(\theta) = \sum_{i \geq 0} a_i \theta^i$$

по наблюдению над случайной величиной X с пуассоновским распределением $\Pi(\theta)$ является статистика

$$\tau^* = \sum_{i \geq 0} a_i (X)_i,$$

где

$$(X)_i = X(X-1) \cdots (X-i+1), \quad i \geq 1, \quad (X)_0 = 1.$$

Учитывая это и соотношение (9), мы можем сформулировать следующее общее утверждение для нашей модели.

Предложение 1. *Асимптотически оптимальной оценкой сходящегося при всех $\theta_j > 0$ степенного ряда*

$$\tau(\theta_j) = \sum_{i \geq 0} a_i \theta_j^i$$

является статистика

$$\tau^* = \sum_{i \geq 0} \frac{a_i (T_j(N, n))_i}{(N \lambda_j)^i};$$

в частности, асимптотически оптимальная оценка параметра θ_j имеет вид

$$\theta_j^* = \frac{T_j(N, n)}{N \lambda_j}. \quad (10)$$

Соответствующий же γ -доверительный интервал для θ_j асимптотически имеет вид

$$\left(\frac{1}{2N \lambda_j} \chi_{(1-\gamma)/2, 2T_j}^2, \frac{1}{2N \lambda_j} \chi_{(1+\gamma)/2, 2T_j+2}^2 \right), \quad (11)$$

где $\chi_{p,r}^2$ есть p -квантиль распределения хи-квадрат с r степенями свободы.

3. Проверка гипотез

Если требуется проверить какие-то гипотезы о частных значениях параметров θ_j в обсуждаемой ситуации, то на основании соотношения (9) надо воспользоваться общей теорией для пуассоновской модели, учитывая при этом специфику тестовых статистик $T_j(N, n)$, с тем лишь замечанием, что соответствующие алгоритмы в нашем случае будут иметь характер асимптотических утверждений. Продемонстрируем это на конкретном примере проверки простой гипотезы $H_0: \theta_j = \theta_{j0}$ против правосторонней альтернативы H_1^+ : $\theta_j > \theta_{j0}$. Известно (см. [6], §5.3), что в задачах такого типа существует равномерно наиболее мощный (РНМ) критерий, который строится следующим образом. Обозначим в нашем случае

$$\theta_0 = \theta_{j0} N \lambda_j,$$

и при заданной вероятности ошибки первого рода α определим целое число t_α условием

$$\alpha'' \equiv \sum_{m=t_\alpha+1}^{\infty} \frac{\theta_0^m}{m!} e^{-\theta_0} < \alpha \leq \sum_{m=t_\alpha}^{\infty} \frac{\theta_0^m}{m!} e^{-\theta_0} \equiv \alpha'. \quad (12)$$

Если здесь $\alpha = \alpha'$, то искомым критерий является нерандомизированным и асимптотически задается критической областью

$$\mathcal{X}_\alpha^+ = \{T_j(N, n) \geq t_\alpha\}. \quad (13)$$

Если же в (12) имеет место строгое неравенство $\alpha < \alpha'$, то критерий является рандомизированным и задается критической функцией

$$\Phi_\alpha(T_j) = \begin{cases} 1, & T_j > t_\alpha, \\ \frac{\alpha - \alpha''}{\alpha' - \alpha''}, & T_j = t_\alpha, \\ 0, & T_j < t_\alpha. \end{cases}$$

В любом случае мощность этого критерия при произвольной альтернативе

$$\theta_1 = \theta_j N \lambda_j > \theta_0$$

вычисляется по формуле

$$W(\theta_1) \sim \sum_{m=t_\alpha+1}^{\infty} \frac{\theta_1^m}{m!} e^{-\theta_1} + (\alpha - \alpha'') \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{t_\alpha} e^{\theta_0 - \theta_1}. \quad (14)$$

Замечание 1. В случае $\alpha < \alpha'$, вместо рандомизированного критерия можно также использовать нерандомизированные РНМ критерии

$$\mathcal{X}_{\alpha'}^+ = \{T_j \geq t_\alpha\}$$

или

$$\mathcal{X}_{\alpha''}^+ = \{T_j \geq t_\alpha + 1\}$$

с уровнями значимости, асимптотически равными соответственно α' и α'' .

Аналогично анализируется задача (H_0, H_1^-) с левосторонней альтернативой, а при двусторонней альтернативе критерий задается объединением двух односторонних критических областей, то есть имеет вид

$$\mathcal{X}_\alpha = \{T_j \geq t_{\alpha_1}\} \cup \{T_j \leq t_{\alpha_2}\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha.$$

Замечание 2. Случай $\theta_{j0} = 1$, $j = 1, \dots, d$, соответствует наиболее важной для приложений гипотезе о равновероятности подстановок, и изложенная методика дает новые критерии проверки этой гипотезы, учитывающие широкий класс специальных альтернатив, при которых $\theta_j \neq 1$ для некоторых j .

4. Большие выборки

Если число N наблюдаемых подстановок велико, то можно применить теорию больших выборок (при $N \rightarrow \infty$) и получить более сильные выводы. В этом случае из (8)–(9) следует, что для нормированной статистики

$$\tilde{T}_j = \tilde{T}_j(N, n) = \frac{T_j(N, n)}{N \lambda_j} \quad (15)$$

справедлива нормальная аппроксимация

$$\mathcal{L}(\tilde{T}_j) \sim \mathcal{N}\left(\theta_j, \frac{\theta_j}{N\lambda_j}\right), \quad (16)$$

и, тем самым, статистические выводы о параметрах θ_j можно получать, используя соответствующую теорию нормальной модели [4]. Аналогичная ситуация рассматривалась в [3], поэтому, следуя ей, можно сформулировать для нашего случая следующие утверждения.

Предложение 2. Статистика $\tilde{T}_j$ является асимптотически несмещенной и асимптотически эффективной оценкой параметра θ_j ; такими же свойствами обладает статистика $\tau(\tilde{T}_j)$ как оценка $\tau(\theta_j)$ для любой дифференцируемой функции τ .

Предложение 3. Асимптотическим γ -доверительным интервалом для параметрической функции $\tau(\theta_j)$ с непрерывной производной $\tau'(\theta_j)$ является интервал

$$\left(\tau(\tilde{T}_j) \mp z_\gamma \tau'(\tilde{T}_j) \sqrt{\frac{\tilde{T}_j}{N\lambda_j}} \right), \quad (17)$$

где

$$z_\gamma = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$$

и $\Phi^{-1}(t)$ — обратная функция к стандартной нормальной функции распределения $\Phi(x)$.

Предложение 4. Критерий уровня значимости α для проверки гипотезы $H_0: \theta_j = 1$ при левосторонней альтернативе $H_1^-: \theta_j < 1$ асимптотически задается критической областью

$$\mathcal{X}_\alpha^-(N) = \{\tilde{T}_j < 1 - u_\alpha / \sqrt{N\lambda_j}\}, \quad u_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha); \quad (18)$$

пороговыми здесь являются альтернативы вида

$$H_{1N}^-: \theta_j = \theta_j(N) = 1 - \frac{t}{\sqrt{N\lambda_j}}, \quad t > 0,$$

и мощность критерия (18) при таких близких альтернативах удовлетворяет при $N \rightarrow \infty$ соотношению

$$W_N(\theta_j) = \mathbf{P}(\mathcal{X}_\alpha^-(N)) \rightarrow \Phi(t - u_\alpha).$$

Аналогично, в задаче $(H_0, H_1^+: \theta_j > 1)$ критерий уровня значимости α асимптотически имеет вид

$$\mathcal{X}_\alpha^+(N) = \{\tilde{T}_j > 1 + u_\alpha / \sqrt{N\lambda_j}\}, \quad (19)$$

и его мощность при близких альтернативах

$$H_{1N}^+: \theta_j = \theta_j(N) = 1 + \frac{t}{\sqrt{N\lambda_j}}, \quad t > 0,$$

асимптотически равна $\Phi(t - u_\alpha)$.

Наконец, в задаче с двусторонней альтернативой ($H_0, H_1 = H_1^- \cup H_1^+$) критерий асимптотически имеет вид

$$\mathcal{X}_\alpha(N) = \left\{ |\tilde{T}_j - 1| > \frac{u_{\alpha/2}}{\sqrt{N\lambda_j}} \right\}, \quad (20)$$

и его мощность при близких альтернативах

$$H_{1N}: \theta_j = \theta_j(N) = 1 + \frac{t}{\sqrt{N\lambda_j}}, \quad t \neq 0,$$

асимптотически равна $\Phi(t - u_{\alpha/2}) + \Phi(-t - u_{\alpha/2})$.

Сформулированные в предложении 4 критерии позволяют контролировать значения отдельных координат параметрического вектора $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$. Вместе с тем, желательно уметь также проверять гипотезы и о полном этом векторе. Важнейшей такой гипотезой является утверждение

$$H_0: \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_d = 1,$$

означающее, что подстановки выбираются равновероятно из S_n .

В случае, если эта гипотеза справедлива, то из (15)–(16) следует, что статистики

$$T_j^*(N) = \frac{T_j - N\lambda_j}{\sqrt{N\lambda_j}}, \quad j = 1, \dots, d,$$

асимптотически распределены по стандартному нормальному закону и асимптотически независимы. Следовательно, сумма их квадратов асимптотически распределена по закону $\chi^2(d)$:

$$\mathcal{L} \left(T^2(N) \equiv \sum_{j=1}^d \frac{(T_j - N\lambda_j)^2}{N\lambda_j} \right) \rightarrow \chi^2(d). \quad (21)$$

Этот результат позволяет сформулировать следующий критерий согласия для гипотезы равновероятности H_0 , учитывающий всю исходную информацию.

Предложение 5. При заданном уровне значимости α ,

$$H_0 \text{ отвергается} \iff \{T^2(N) > \chi_{1-\alpha, d}^2\}.$$

5. Гипотеза однородности

Выше предполагалось, что в процессе наблюдения над подстановками $s_1, \dots, s_N$ параметр $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$ модели (1)–(4) остается неизменным, что на самом деле является гипотезой, которая сама должна быть подвергнута статистической проверке; такая гипотеза и называется гипотезой однородности. Здесь предлагается асимптотический (для больших выборок) вариант соответствующего критерия однородности.

Итак, теперь считаем, что каждый из векторов (7) получен, вообще говоря, при своем (но неизвестном) значении параметра θ . Обозначим значение этого параметра для подстановки s_k через $\theta^{(k)} = (\theta_1^{(k)}, \dots, \theta_d^{(k)})$. Тогда гипотеза однородности есть утверждение

$$H_0: \theta^{(1)} = \dots = \theta^{(N)}.$$

В силу предположения о независимости подстановок и соотношения (6), можно считать, что при гипотезе H_0

$$(\xi_j^{(k)}(n), k = 1, \dots, N) = (X_{1j}, \dots, X_{Nj}) \quad (22)$$

представляют собой независимую выборку из распределения Пуассона $\Pi(\theta_j \lambda_j)$ при некотором $\theta_j > 0$; далее для краткости полагаем

$$\alpha_j = \theta_j \lambda_j;$$

при этом, в силу следствия 1 из введения, для разных j выборки (22) асимптотически независимы.

Построим выборочные среднее и дисперсию выборки (22):

$$\begin{aligned} \bar{X}_j &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{ij}, \\ S_j^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_{ij} - \bar{X}_j)^2, \end{aligned}$$

и введем статистику

$$T_{Nj} = \frac{1}{\bar{X}_j} \sqrt{\frac{N-1}{2}} \left(\bar{X}_j - \frac{N}{N-1} S_j^2 \right). \quad (23)$$

Как показано в [4], эта статистика при гипотезе H_0 распределена асимптотически по стандартному нормальному закону $\mathcal{N}(0, 1)$, а так как для разных j такие статистики асимптотически независимы, то объединенная статистика

$$T_N^2 = \sum_{j=1}^d T_{Nj}^2 \quad (24)$$

при гипотезе H_0 будет асимптотически иметь распределение $\chi^2(d)$.

Тем самым, основываясь на статистике T_N^2 , можно предложить следующий критерий согласия для гипотезы H_0 .

Предложение 6. При заданном уровне значимости α , гипотеза однородности H_0 отвергается тогда и только тогда, когда

$$T_N^2 \geq \chi_{1-\alpha, d}^2.$$

Приложение

В теории случайных n -подстановок хорошо известен факт асимптотической, при $n \rightarrow \infty$, независимости и асимптотической пуассоновости начальных членов цикловой последовательности $\mathbf{c}(n) = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ случайной равновероятной подстановки, при этом

$$\mathcal{L}(c_i) \rightarrow \Pi\left(\frac{1}{i}\right)$$

для любого конечного i .

Аналогичное свойство имеет место и для модели Эванса, причем в этом случае

$$\mathcal{L}(c_i) \rightarrow \Pi \left(\frac{\theta}{i} \right).$$

Это свойство асимптотической независимости и пуассоновости чисел циклов конечной длины сохраняется и для общей параметрической модели, введенной в [5], согласно которой произвольная подстановка $s \in S_n$ наблюдается с вероятностью, пропорциональной $\prod_i \theta_i^{c_i}$, где $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, $\theta_{\bullet} \geq 0$ — параметр меры. В этом случае для производящей функции цикловой структуры $\mathbf{c}(n)$ справедливо представление

$$\mathbf{E}_{\theta} \prod_{i=1}^n t_i^{c_i} = \frac{H_n(t\theta)}{H_n(\theta)}, \quad (25)$$

где

$$H_n(\theta) = n! [z^n] \exp\{a(z; \theta)\}$$

и

$$a(z; \theta) = \sum_{i=1}^n \theta_i \frac{z^i}{i}.$$

Отсюда следует, что производящая функция для произвольного конечного числа k начальных членов $c_1, c_2, \dots, c_k$ имеет вид

$$\mathbf{E}_{\theta} \prod_{i=1}^k t_i^{c_i} = \frac{n!}{H_n(\theta)} [z^n] \exp \left\{ a(z; \theta) + \sum_{i=1}^k \theta_i (t_i - 1) \frac{z^i}{i} \right\}.$$

Далее, используя стандартную технику метода перевала, нетрудно получить, что при $n \rightarrow \infty$ и фиксированных $\theta_{\bullet}$ справедливо соотношение

$$\mathbf{E}_{\theta} \prod_{i=1}^k t_i^{c_i} \rightarrow \exp \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{\theta_i}{i} (t_i - 1) \right\},$$

которое означает асимптотическую независимость величин $c_1, \dots, c_k$ и их пуассоновскую сходимость:

$$\mathcal{L}(c_i) \rightarrow \Pi \left(\frac{\theta_i}{i} \right). \quad (26)$$

Утверждение теоремы, сформулированной во введении, является следствием этого результата, поскольку для всех A_j -циклов параметры $\theta_{\bullet}$ в рассматриваемой модели одинаковы.

Список литературы

1. Сачков В. Н., *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*. МЦНМО, Москва, 2004.

2. Соболева М. В., Асимптотическая нормальность чисел конгруэнтных циклов в случайных подстановках. *Дискретная математика* (2012) **24**, №1, 123–131.
3. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., Статистика параметрической модели случайных подстановок. *Труды по дискретной математике* (2004) **8**, 116–127.
4. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., Статистические выводы для случайных подстановок по неполным данным. *Труды по дискретной математике* (2006) **9**, 66–76.
5. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., Случайные подстановки: общая параметрическая модель. *Дискретная математика* (2006) **18**, №4, 105–112.
6. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., *Введение в математическую статистику*. ЛКИ/URSS, Москва, 2010.
7. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., О случайных подстановках. *Труды по дискретной математике* (2002) **5**, 73–92.

Статья поступила 28.08.2012.