Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Шкляев, Большие отклонения ветвящихся процессов в случайной среде с произвольным начальным числом частиц, *Дискрет. матем.*, 2012, том 24, выпуск 4, 114–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1215>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 12:33:46

Большие отклонения ветвящихся процессов в случайной среде с произвольным начальным числом частиц

© 2012 г. А. В. Шкляев

Нами рассматривается ветвящийся процесс Z_n с дробно-линейной производящей функцией распределения числа непосредственных потомков в случайной среде $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n, \dots)$, представляющей собой последовательность независимых одинаково распределенных величин. Известно, что при определенных условиях имеет место эквивалентность

$$\mathbf{P}(\ln Z_n \geq \theta n \mid Z_0 = 1) \sim I(\theta) \mathbf{P}(S_n \geq \theta n)$$

при $n \rightarrow \infty$, $I(\theta) > 0$, где S_n есть сопровождающее случайное блуждание. В этих условиях в работе получена асимптотика вероятностей больших отклонений $\mathbf{P}(\ln Z_n \geq \ln m + \theta n \mid Z_0 = m)$ при $n \rightarrow \infty$ и m конечном или стремящемся к бесконечности.

1. Введение

Пусть $\eta = (\eta_0, \dots, \eta_n, \dots)$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин и $f_y(s)$, $y \in \mathbf{R}$, — семейство вероятностных производящих функций. Ветвящийся процесс Z_n в случайной среде η представляет собой марковскую цепь с условной производящей функцией переходных вероятностей, равной (см., например, [1, 2])

$$\mathbf{E}(s^{Z_{n+1}} \mid Z_n, \eta) = f_{\eta_n}(s)^{Z_n} \quad \text{п.н.}$$

В настоящей работе рассматривается случай дробно-линейных производящих функций. Легко проверить, что

$$f_y(s) = 1 - \left(\frac{b(y)}{2a(y)^2} + \frac{1}{(1-s)a(y)} \right)^{-1}, \quad a(y) = f'_y(1), \quad b(y) = f''_y(1).$$

Положим

$$X_i = \ln a(\eta_{i-1}), \quad \zeta_i = \ln \frac{b(\eta_i)}{2a^2(\eta_i)}, \quad i > 0,$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad n > 0, \quad S_0 = 0,$$

$$U_n = e^{-S_n}, \quad V_n = \sum_{i=0}^{n-1} e^{-S_i + \zeta_i},$$

и пусть X — общее обозначение для X_i .

Случайное блуждание S_n называют сопровождающим для ветвящегося процесса в случайной среде Z_n . Будем предполагать, что выполняется правостороннее условие Крамера:

$$\mathbf{E}e^{hX} < \infty, \quad h \in (0, h^+),$$

случайная величина X невырождена, нерешетчатая и имеет конечное математическое ожидание. От величин ζ_i потребуем выполнения правостороннего условия Крамера при всех $h > 0$.

Условную производящую функцию случайной величины Z_n запишем в виде [3]

$$\mathbf{E}(s^{Z_n} \mid \eta, Z_0 = 1) = 1 - \left(\frac{U_n}{1-s} + V_n \right)^{-1}.$$

Легко проверить, что

$$\mathbf{P}(Z_n > k \mid Z_0 = 1, \eta) = (V_n + U_n)^{-1} (1 + V_n^{-1} U_n)^{-k}, \quad k \geq 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{P}(Z_n = k \mid \eta) = U_n V_n^{k-1} (V_n + U_n)^{-k-1}, \quad k > 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{P}(Z_n = 0 \mid \eta) = 1 - (V_n + U_n)^{-1}. \quad (3)$$

Мы связываем вероятности больших уклонений $\mathbf{P}(\ln Z_n \geq \ln m + \theta n \mid Z_0 = m)$ с вероятностями $\mathbf{P}(S_n \geq \theta n)$ при $\theta \in (\mu, m^+)$ в случае $\mu = \mathbf{E}X \geq 0$ и при $\theta \in (\theta^*, m^+)$ в случае $\mu < 0$ (θ^*, m^+ определены в разделе 2). Конечное m рассматривается в разделе 3, m , растущее вместе с n , — в разделе 4.

Случай $m = 1$ хорошо изучен для геометрического распределения числа непосредственных потомков одной частицы. В [1, 2] получена точная асимптотика вероятностей больших уклонений, грубая асимптотика получена в [7, 8] для широкого класса распределений. Изучение вероятностей $\mathbf{P}(\ln Z_n \geq \ln m + \theta n \mid Z_0 = m)$ при больших m оказывается важным при асимптотическом анализе траектории процесса Z_n при условии большого уклонения $\ln Z_n \geq \theta n$.

В случае конечного m вывод асимптотики вероятностей больших уклонений при $b(y)/(2a^2(y)) = 1$ несущественно отличается от общего, и ради краткости мы ограничимся этим частным случаем. Для m , растущего вместе с n , это ограничение остается в леммах 1, 4, тогда как леммы 2 и 3 доказываются в случае произвольной дробно-линейной производящей функции ввиду необходимости дополнительных оценок.

2. Обозначения и предварительные сведения

Пусть

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

— случайное блуждание, $-\infty < \mu = \mathbf{E}X < \infty$, случайная величина X нерешетчатая,

$$R(h) = \mathbf{E}e^{hX} < \infty, \quad h \in (0, h^+).$$

Положим

$$m(h) = (\ln R(h))', \quad \sigma^2(h) = m'(h) > 0, \quad m^+ = \lim_{h \rightarrow h^+} m(h).$$

Так как $\sigma^2(h) > 0$, функция $m(h)$ монотонно возрастает при $h \in (0, h^+)$, $m(0) = \mu$, следовательно, при любом $\theta \in (\mu, m^+)$ найдется такое $h_\theta \in (0, h^+)$, что $m(h_\theta) = \theta$.

Функцией уклонений называется функция

$$\Lambda(\theta) = \theta h_\theta - \ln R(h_\theta).$$

Пусть $X_i^{(\theta)}$ — независимые случайные величины, одинаково распределенные с функцией распределения

$$F^{(\theta)}(x) = \mathbf{P}(X^{(\theta)} \leq x) = R(h_\theta)^{-1} \int_{-\infty}^x e^{h_\theta y} dF(y).$$

Функция распределения $F^{(\theta)}$ называется преобразованием Крамера функции распределения F . Блуждание

$$S_n^{(\theta)} = \sum_{i=1}^n X_i^{(\theta)}$$

называется сопряженным к S_n . Нам потребуются следующие результаты из теории больших уклонений [4, 5]:

$$\mathbf{P}(S_n \geq \theta n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n h_\theta \sigma(h_\theta)}} e^{-\Lambda(\theta)n}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (4)$$

$$\mathbf{P}(\max_{i \leq n} S_i \geq \theta n) \sim D(\theta) e^{-\Lambda(\theta)n} n^{-1/2}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (5)$$

причем соотношение (4) выполняется равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (\mu, m^+)$, а соотношение (5) — равномерно по

$$\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset \begin{cases} (\mu, m^+), & \text{в случае, когда } \mathbf{E}X \geq 0, \\ (\theta^*, m^+) & \text{в случае, когда } \mathbf{E}X < 0. \end{cases} \quad (6)$$

где $\theta^* > 0$ определяется из соотношения

$$R(h_{\theta^*}) = 1.$$

Существенную роль в дальнейших построениях играет следующее утверждение для ветвящихся процессов в случайной среде с геометрическим распределением числа непосредственных потомков одной частицы [1]:

$$\mathbf{P}(Z_n \geq e^{\theta n} \mid Z_0 = 1) \sim \mathbf{P}(S_n \geq \theta n) I(\theta), \quad n \rightarrow \infty,$$

равномерно по θ , указанным в (6), где $\Gamma(\cdot)$ есть гамма-функция,

$$I(\theta) = h_\theta \Gamma(h_\theta) \int_1^\infty v^{h_\theta-1} \mathbf{P}\left(\sum_{j=0}^\infty e^{-S_j^{(\theta)}} \in dx\right).$$

Замечание 1. Заметим, что в [1], в определении $I(\theta) \equiv I_1(\theta)$, пропущен множитель h_θ .

3. Случай конечного m

Рассмотрим ветвящийся процесс в случайной среде Z_n , шаги X_i сопровождающего блуждания S_n которого нерешетчатые, удовлетворяют правостороннему условию Крамера и имеют конечное математическое ожидание. Потребуем также, чтобы $\mathbf{E}e^{h\xi_i} < \infty$ при всех $h > 0$. Для ветвящегося процесса в случайной среде с геометрическим распределением числа частиц положим

$$V^{(\theta)} = \sum_{i=0}^{\infty} \exp(-S_i^{(\theta)}), \quad S_0^{(\theta)} = 0,$$

а в случае дробно-линейной производящей функции положим

$$V^{(\theta)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b(\eta_j^{(\theta)})}{2a^2(\eta_j^{(\theta)})} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^{j-1} \ln a(\eta_i^{(\theta)}) \right\},$$

где $\eta_i^{(\theta)}$ есть последовательность независимых случайных величин, одинаково распределенных по закону

$$\mathbf{P}(\eta_i^{(\theta)} \in dx) = \mathbf{P}(\eta_i \in dx) e^{h_\theta \ln a(x)} R(h_\theta)^{-1}.$$

Теорема 1. При $n \rightarrow \infty$ и произвольном натуральном m , соотношение

$$\mathbf{P}(\ln Z_n \geq \theta n + \ln m \mid Z_0 = m) \sim I_m(\theta) \mathbf{P}(S_n \geq \theta n),$$

где

$$I_m(\theta) = h_\theta m^{-h_\theta} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma(h_\theta + i + 1)}{i!} \sum_{i=0}^{m-k-1} \binom{m}{k} \mathbf{E}((V^{(\theta)})^{h_\theta - m + k} (1 - (V^{(\theta)})^{-1})^k),$$

выполнено равномерно по θ , указанным в (6).

Доказательство. Доказательство будет проведено для ветвящихся процессов в случайной среде с геометрическим распределением числа потомков одной частицы; об изменениях, необходимых в дробно-линейном случае, будет сказано в замечании 2.

Представим ветвящийся процесс в случайной среде Z_n с m начальными частицами в виде суммы m процессов $Z_n^{(i)}$, условно независимых при условии среды η , стартующих с одной частицы. Тогда

$$\mathbf{P}(Z_n \geq e^{\theta n} m \mid Z_0 = m) = \mathbf{P}(Z_n^{(1)} + \dots + Z_n^{(m)} \geq e^{\theta n} m).$$

В силу лемм 6, 11 и 12 в [1], для заданного m , произвольного $\varepsilon > 0$ и достаточно большого N найдется такое M , что при всех $n > N$ имеет место неравенство

$$\mathbf{E}(\mathbf{P}(Z_n^{(i)} \geq e^{\theta n} \mid \eta) I_{S_n \leq \theta n - M}) \leq \frac{\varepsilon}{4m} \mathbf{P}(S_n \geq \theta n),$$

где I_A обозначает индикатор события A . Следовательно, при всех $n > N$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{P}(Z_n \geq e^{\theta n} m \mid Z_0 = m, \eta) I_{S_n < \theta n - M}) &= \mathbf{P}(Z_n^{(1)} + \dots + Z_n^{(m)} \geq e^{\theta n} m, S_n < \theta n - M) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(Z_n^{(i)} \geq e^{\theta n}, S_n \leq \theta n - M) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} \mathbf{P}(S_n \geq \theta n). \end{aligned} \tag{7}$$

Покажем, что при условии $\{S_n - \theta n \geq -M\}$ величины V_n сходятся при $n \rightarrow \infty$ по распределению к

$$V^{(\theta)} = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-S_i^{(\theta)}}.$$

Проводя преобразование Крамера и применяя лемму 5 из [1], получаем, что

$$\begin{aligned} P(V_n \geq y, S_n \geq \theta n - M) &= R(h_\theta)^{-n} \int_{-M}^{\infty} e^{-h_\theta x - h_\theta \theta n} \mathbf{P}(V_n^{(\theta)} \geq y, S_n^{(\theta)} - \theta n \in dx) \\ &\sim \frac{e^{-\Lambda(\theta)n}}{\sigma(h_\theta)\sqrt{2\pi n}} \mathbf{P}(V^{(\theta)} \geq y) \int_{-M}^{\infty} e^{-h_\theta x} dx, \end{aligned}$$

где y есть точка непрерывности функции распределения случайной величины $V^{(\theta)}$. Следовательно, для любых M, ε и всех достаточно больших C выполняется неравенство

$$\mathbf{P}(V_n \geq C, S_n \geq \theta n - M) < \frac{\varepsilon}{4} \mathbf{P}(S_n \geq \theta n). \quad (8)$$

Перейдем к оценке величины $\mathbf{E}(\mathbf{P}(Z_n \geq e^{\theta n} m \mid Z_0 = m, \eta) I_{S_n \geq \theta n - M})$. Положим

$$\begin{aligned} I_{m,k} &= \{i_1, \dots, i_k : 0 < i_1 < i_2 < \dots < i_k < m\}, \\ L_{m,l,i_1,\dots,i_k} &= \{l_1, \dots, l_m : l_{i_1} = 0, \dots, l_{i_k} = 0, l_1 + \dots + l_m = l\}, \end{aligned}$$

и $u = \lceil e^{\theta n} m \rceil$, где $\lceil x \rceil$ обозначает наименьшее целое число, не меньшее, чем x . Используя равенства (2) и (3), получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_n^{(1)} + \dots + Z_n^{(m)} \geq e^{\theta n} m \mid \eta) &= \sum_{l=u}^{\infty} \sum_{l_1+\dots+l_m=l} \mathbf{P}(Z_n^{(1)} = l_1) \dots \mathbf{P}(Z_n^{(m)} = l_m) \\ &= \sum_{l=u}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{I_{m,k}} \sum_{L_{m,l,i_1,\dots,i_k}} \left(1 - \frac{1}{V_n}\right)^k \prod_{i:l_i>0} \frac{U_n V_n^{l_i-1}}{(V_n + U_n)^{l_i+1}} \\ &= \sum_{l=u}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} \binom{l-1}{m-k-1} \left(1 - \frac{1}{V_n}\right)^k \left(\frac{U_n}{V_n(V_n + U_n)}\right)^{m-k} \left(\frac{V_n}{V_n + U_n}\right)^l \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} \left(1 - \frac{1}{V_n}\right)^k \left(\frac{U_n}{V_n(V_n + U_n)}\right)^{m-k} \sum_{l=u}^{\infty} \binom{l-1}{m-k-1} \left(\frac{V_n}{V_n + U_n}\right)^l. \quad (9) \end{aligned}$$

Полагая для краткости

$$a = \frac{V_n}{V_n + U_n},$$

преобразуем сумму

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=u}^{\infty} a^l \binom{l-1}{m-k-1} &= \frac{a^{m-k}}{(m-k-1)!} \sum_{l=u}^{\infty} (l-1) \cdots (l-m+k+1) a^{l-m+k} \\
 &= \frac{a^{m-k}}{(m-k-1)!} \sum_{l=u}^{\infty} \frac{d^{m-k-1} a^{l-1}}{d a^{m-k-1}} \\
 &= \frac{a^{m-k}}{(m-k-1)!} \left(\sum_{l=u}^{\infty} a^{l-1} \right)^{(m-k-1)} \frac{a^{m-k}}{(m-k-1)!} \left(\frac{a^{u-1}}{1-a} \right)^{m-k-1} \\
 &= \frac{a^{m-k}}{(m-k-1)!} \sum_{i=0}^{m-k-1} \binom{m-k-1}{i} (a^{u-1})^i \left(\frac{1}{1-a} \right)^{m-k-1-i} \\
 &= \frac{a^{m-k}}{(m-k-1)!} \sum_{i=0}^{m-k-1} \binom{m-k-1}{i} (u-1) \cdots (u-i-1) \\
 &\quad \times \frac{a^{u-1-i} (m-k-i-1)!}{(1-a)^{m-k-i}} \\
 &= a^{u-1} \sum_{i=0}^{m-k-1} \binom{u-1}{i} \left(\frac{a}{1-a} \right)^{m-k-i}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Подставляя (10) в (9), получаем, что

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(Z_n^{(1)} + \dots + Z_n^{(m)} \geq e^{\theta n} m \mid \eta) &= \left(\frac{V_n}{V_n + U_n} \right)^{u-1} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} \left(1 - \frac{1}{V_n} \right)^k \\
 &\quad \times \left(\frac{U_n}{V_n(V_n + U_n)} \right)^{m-k} \sum_{i=0}^{m-k-1} \binom{u-1}{i} \left(\frac{U_n}{V_n} \right)^{-m+k+i}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Пользуясь тем, что

$$\binom{u-1}{i} = (1 + o(1)) \frac{u^i}{i!}, \quad u \rightarrow \infty, \quad i < u,$$

получаем, что при условии события $\{S_n \geq \theta n - M, V_n < C\}$ при $n \rightarrow \infty$ выражение (11) эквивалентно, равномерно по θ из (6), следующему выражению:

$$\begin{aligned}
 &\left(1 - \frac{U_n}{V_n + U_n} \right)^{u-1} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} \left(1 - \frac{1}{V_n} \right)^k \left(\frac{1}{V_n + U_n} \right)^{m-k} \sum_{i=0}^{m-k-1} \frac{(m e^{\theta n - S_n})^i}{i!} \frac{1}{V_n^i} \\
 &= e^{-m(V_n + U_n)^{-1} e^{-\Delta_n}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} \left(1 - \frac{1}{V_n} \right)^k \left(\frac{1}{V_n + U_n} \right)^{m-k} \sum_{i=0}^{m-k-1} \frac{(m e^{-\Delta_n})^i}{i!} \frac{1}{V_n^i},
 \end{aligned} \tag{12}$$

где полагаем

$$\Delta_n = S_n - \theta n.$$

Математическое ожидание выражения (11), суженное на событие $\{S_n \geq \theta n - M, V_n < C\}$, эквивалентно, с учетом (12), следующему выражению:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} & \left(e^{-me^{-\Delta_n}(V_n+U_n)^{-1}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} \left(1 - \frac{1}{V_n}\right)^k \left(\frac{1}{V_n+U_n}\right)^{m-k} \right. \\ & \quad \times \sum_{i=0}^{m-k-1} \frac{(me^{-\Delta_n})^i}{i!} \frac{1}{V_n^i} I_{S_n - \theta n > M, V_n < C} \Big) \\ & = e^{-\Lambda(\theta)n} \int_{-M}^M \int_1^C e^{-h_\theta x} e^{-me^{-x}y^{-1}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} (1-y^{-1})^k y^{-m+k} \\ & \quad \times \sum_{i=0}^{m-k-1} \frac{m^i e^{-xi} y^{-i}}{i!} \mathbf{P}(S_n^{(\theta)} - \theta n \in dx, V_n^{(\theta)} \in dy). \quad (13) \end{aligned}$$

Ввиду леммы 5 из [1], для любого $M > 0$ на множестве $[-M, M] \times [1, \infty)$ имеет место слабая сходимость мер

$$\sqrt{n} \mathbf{P}(S_n^{(\theta)} - \theta n \in dx, V_n^{(\theta)} \in dy) \Rightarrow \lambda(dx) \mathbf{P}(V^{(\theta)} \in dy) (\sqrt{2\pi} \sigma(h_\theta))^{-1}, \quad n \rightarrow \infty,$$

где λ есть мера Лебега на прямой. Подставим это соотношение в (13) и, пользуясь ограниченностью подынтегральной функции, получим следующее эквивалентное при $n \rightarrow \infty$ выражение для (13):

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\Lambda(\theta)n}}{\sigma(h_\theta) \sqrt{2\pi n}} \int_{-M}^M \int_1^C e^{-me^{-x}y^{-1}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} (1-y^{-1})^k y^{-m+k} \\ \times \sum_{i=0}^{m-k-1} \frac{m^i e^{-x(h_\theta+i)} y^{-i}}{i!} \mathbf{P}(V^{(\theta)} \in dy) dx. \quad (14) \end{aligned}$$

Учитывая соотношения (7), (8), получаем, что

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{P}(Z_n \geq e^{\theta n} \mid Z_0 = m) \right. \\ & \quad - \frac{e^{-\Lambda(\theta)n}}{\sigma(h_\theta) \sqrt{2\pi n}} \int_{-M}^M \int_1^C e^{-me^{-x}y^{-1}} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} (1-y^{-1})^k y^{-m+k} \\ & \quad \times \sum_{i=0}^{m-k-1} \frac{m^i e^{-x(h_\theta+i)} y^{-i}}{i!} \mathbf{P}(V^{(\theta)} \in dy) dx \Big| \\ & \leq \left(\frac{\varepsilon}{2} + o_n \right) \mathbf{P}(S_n \geq \theta n), \quad (15) \end{aligned}$$

где o_n стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Устремляя в (15) C и M

к бесконечности, а ε к нулю, получаем, что

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(Z_n^{(1)} + \dots + Z_n^{(m)} \geq e^{\theta n} m) &= (1 + o(1)) \mathbf{P}(S_n \geq \theta n) h_\theta \\
 &\times \int_1^\infty \sum_{k=0}^{m-1} (1 - y^{-1})^k y^{-m+k} \binom{m}{k} \\
 &\times \sum_{i=0}^{m-k-1} \frac{1}{i!} \int_{-\infty}^\infty e^{-me^{-x} y^{-1}} m^i e^{-x(h_\theta + i)} y^{-i} dx \\
 &\times \mathbf{P}(V^{(\theta)} \in dy) \\
 &= (1 + o(1)) \mathbf{P}(S_n \geq \theta n) h_\theta m^{-h_\theta} \\
 &\times \int_1^\infty \sum_{k=0}^{m-1} y^{-m+k+h_\theta} (1 - y^{-1})^k \binom{m}{k} \\
 &\times \sum_{i=0}^{m-k-1} \frac{1}{i!} \int_{-\infty}^\infty e^{-(me^{-x} y^{-1})} (me^{-x} y^{-1})^{h_\theta + i} me^{-x} y^{-1} dx \\
 &\times \mathbf{P}(V^{(\theta)} \in dy).
 \end{aligned}$$

Для завершения доказательства теоремы остается произвести замену

$$v = me^{-x} y^{-1}$$

во внутреннем интеграле.

Замечание 2. В приведенном доказательстве теоремы 1 фактически не используется явный вид V_n , $V^{(\theta)}$, а лишь результаты [1], относящиеся к случаю геометрического распределения непосредственного числа потомков одной частицы. Однако все они в условиях данной работы могут быть получены для ветвящегося процесса с случайной среде в дробно-линейном случае с помощью лемм 2, 3 раздела 4.

Замечание 3. Нами частично использована дипломная работа Д. Николаевой.

4. Случай бесконечного m

В предположениях, сформулированных в разделе 3, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Соотношение

$$\mathbf{P}(\ln Z_n \geq \theta n + \ln m \mid Z_0 = m) \sim \mathbf{P}(S_n \geq \theta n), \quad n \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow \infty, \quad (16)$$

выполняется равномерно по θ , указанным в (6).

Доказательство. Разложим вероятность в (16) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(Z_{n,m} \geq me^{\theta n}) &= \mathbf{E}(\mathbf{P}(Z_n^{(1)} + \dots + Z_n^{(m)} \geq e^{\theta n} m \mid \eta) \\
 &\times (I_{S_n < \theta n - M} + I_{\theta n - M \leq S_n < \theta n - \tilde{\varepsilon}} + I_{\theta n - \tilde{\varepsilon} < S_n < \theta n + \tilde{\varepsilon}} + I_{\theta n + \tilde{\varepsilon} \leq S_n < \theta n + M} + I_{S_n \geq \theta n + M})),
 \end{aligned} \quad (17)$$

где M , $\tilde{\varepsilon}$ — некоторые параметры, а $Z_n^{(i)}$ — ветвящийся процесс, порожденный i -й начальной частицей.

Лемма 1. Для любого $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших M найдется такое N , что при $n > N$ и всех $m \geq 1$

$$\mathbf{E}(\mathbf{P}(Z_n^{(1)} + \dots + Z_n^{(m)} \geq e^{\theta n} m \mid \eta) I_{S_n < \theta n - M}) < \frac{\varepsilon}{5} \mathbf{P}(S_n \geq \theta n).$$

Доказательство. Полагая $M_1 > 2$, перепишем оцениваемое математическое ожидание в следующем виде:

$$\mathbf{E}(\mathbf{P}(Z_n^{(1)} + \dots + Z_n^{(m)} \geq e^{\theta n} m \mid \eta) I_{S_n < \theta n - M} (I_{U_n/V_n \geq M_1 e^{-\theta n}} + I_{U_n/V_n < M_1 e^{-\theta n}})). \quad (18)$$

Для вероятности $\mathbf{P}(Z_n^{(1)} + \dots + Z_n^{(m)} \geq e^{\theta n} m \mid \eta)$ при $S_n < \theta n - M$ и $U_n V_n^{-1} \geq M_1 e^{-\theta n}$ используем эквивалентное ей при $n \rightarrow \infty$ выражение (12), для правой части которого после элементарных преобразований получаем следующую границу сверху:

$$\left(\frac{V_n}{V_n + U_n} \right)^{u-1} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} \frac{m-k}{(V_n + U_n)^{m-k}} \max_{i \leq m-k-1} \left(\binom{u-1}{i} \left(\frac{U_n}{V_n} \right)^i \right). \quad (19)$$

Учитывая неравенство

$$\binom{u-1}{i} (U_n V_n^{-1})^i < \frac{(\exp(\theta n) m U_n V_n^{-1})^i}{i!}$$

и то, что $\binom{u-1}{i} (U_n V_n^{-1})^i$ возрастает по i при $0 \leq i \leq m$, а также используя оценку

$$i! > C_1 e^{-i} i^i,$$

справедливу при некотором $C_1 > 0$ и всех $i > 0$, и неравенство

$$\binom{i}{j} \leq 2^i,$$

запишем для верхней границы (19) следующую оценку сверху:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{V_n + U_n} \left(\frac{V_n}{V_n + U_n} \right)^{u-1} \frac{m^2 2^m}{m!} \left(\frac{e^{\theta n} m U_n}{V_n} \right)^m \\ & \leq \frac{C_1}{V_n + U_n} \left(1 - \frac{U_n}{V_n} \right)^{e^{\theta n} m/2-1} \left(\frac{V_n}{V_n + U_n} \right)^{e^{\theta n} m/2} m^2 2^m \left(\frac{e^{\theta n+1} U_n}{V_n} \right)^m. \end{aligned} \quad (20)$$

Ввиду неравенства

$$\ln(1-x) \leq -x,$$

справедливого при $x > 0$, получаем, что

$$\ln \left(1 - \frac{U_n}{V_n} \right) \left(\frac{e^{\theta n} m}{2} - 1 \right) = -(1 + o(1)) \frac{U_n e^{\theta n} m}{2 V_n},$$

откуда получаем для выражения (20) следующую асимптотическую оценку сверху:

$$\frac{C_1(2e)^m m^2}{V_n + U_n} \exp \left(-m f \left(\frac{U_n e^{\theta n}}{V_n} \right) \right) \left(\frac{V_n}{V_n + U_n} \right)^{e^{\theta n} m / 2}, \quad (21)$$

где

$$f(x) = \frac{x}{2} - \ln x.$$

Функция $f(x)$ при $x > 2$ монотонно возрастает и стремится к бесконечности, следовательно,

$$f \left(\frac{U_n e^{\theta n}}{V_n} \right) > f(M_1).$$

Выбирая M_1 настолько большим, что

$$C_1 e^{-m f(M_1)} m^2 (2e)^m < 1$$

при всех m , получаем для выражения (21) следующую верхнюю оценку:

$$\frac{1}{V_n + U_n} \left(\frac{V_n}{V_n + U_n} \right)^{e^{\theta n}} = \mathbf{P}(Z_n^{(1)} \geq e^{\theta n}). \quad (22)$$

Математическое ожидание $\mathbf{E}(\mathbf{P}(Z_n^{(1)} \geq e^{\theta n} \mid \eta) I_{S_n < \theta n - M})$, как было отмечено в начале раздела 3, может быть сделано сколь угодно малым за счет выбора M . Выберем M_1 , M таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\mathbf{E}(\mathbf{P}(Z_n^{(1)} + \dots + Z_n^{(m)} \geq e^{\theta n} m \mid \eta) I_{S_n < \theta n - M} I_{U_n/V_n \geq M_1 e^{-\theta n}}) < \frac{\varepsilon}{10} \mathbf{P}(S_n \geq \theta n),$$

что и дает нужную оценку для первой части математического ожидания (18).

Следующие леммы 2, 3 позволяют оценить вторую часть математического ожидания (18) и тем самым закончить доказательство леммы 1. Их доказательство будет проведено для дробно-линейного случая.

Лемма 2. В условиях теоремы 2 найдется такое N , что при всех $n > N$ для любых $\varepsilon > 0$ и $M_1 > 0$ найдется такое M , что при всех θ из (6) справедливо неравенство

$$\mathbf{P} \left(\frac{U_n}{V_n} < M_1 e^{-\theta n}, S_n \leq \theta n - M \right) < \frac{\varepsilon}{10} \mathbf{P}(S_n \geq \theta n).$$

Доказательство. Запишем представление

$$V_n U_n^{-1} = \sum_{i=0}^{n-1} e^{S_n - S_i + \xi_i}.$$

Таким образом, пара $(V_n U_n^{-1}, S_n)$ распределена так же, как пара $(\sum_{i=1}^n e^{\xi_{n-i} + \tilde{S}_i}, S_n)$, где $\tilde{S}_i = X_n + \dots + X_{n-i+1}$. Поэтому рассматриваемая в лемме 2 вероятность равна $\mathbf{P}(\sum_{i=1}^n e^{\tilde{S}_i + \xi_{n-i}} > M_1^{-1} e^{\theta n}, S_n \leq \theta n - M)$.

Для удобства везде ниже будем писать вместо $\tilde{S}_i$ писать S_i . Оценим эту вероятность с помощью следующей леммы.

Лемма 3. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие M_2 , $\delta < \theta$, что справедливо неравенство

$$\mathbf{P}(\exists i \leq n: S_i + \zeta_{n-i} > \delta n + (\theta - \delta)i + M_2) \leq \varepsilon \mathbf{P}(S_n \geq \theta n).$$

Доказательство. Фиксируем некоторое $0 < \kappa < 1$ и воспользуемся следующими оценками:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\exists i \leq n(1 - \kappa): S_i + \zeta_{n-i} > \delta n + (\theta - \delta)i + M_2) \\ \leq \mathbf{P}(\exists i \leq n(1 - \kappa): S_i > (\delta - \kappa(\theta - \delta)/2)n + (\theta - \delta + \kappa(\theta - \delta)/2)i + M_2) \\ + \mathbf{P}(\max_{i \leq n(1 - \kappa)} \zeta_{n-i} > \kappa(1 - \kappa)(\theta - \delta)n/2). \end{aligned} \quad (23)$$

Полагая для краткости

$$\tilde{\delta} = (\delta - \kappa(\theta - \delta)/2),$$

оценим сверху вероятностью $\mathbf{P}(\max_{i \leq n(1 - \kappa)} \sum_{j=1}^i (X_j - \theta + \delta) \geq \tilde{\delta}n + M_2)$ первую вероятность в правой части (23). Величины

$$\tilde{X}_j = X_j - \theta + \delta$$

имеют преобразование Лапласа

$$\tilde{R}(h) = R(h)e^{-h(\theta - \delta)},$$

так что

$$\tilde{R}(\tilde{h}_\delta) = e^{-h_\theta(\theta - \delta)} R(h_\theta), \quad \tilde{\Lambda}(\delta) = \Lambda(\theta),$$

где $\tilde{h}_\delta$, $\tilde{\Lambda}(\delta)$ по отношению к случайным величинам $\tilde{X}_j$ имеют тот же смысл, что и h_θ , $\Lambda(\theta)$ для случайных величин X_j . Выбирая δ достаточно малым, мы видим, что $\tilde{R}(\tilde{h}_\delta) > 1$ при всех $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$; так что, применяя (5), приходим к соотношениям

$$\mathbf{P}(\exists i: S_i > \delta n + (\theta - \delta)i + M_2) = (1 + o(1))C(\theta, \delta)n^{-1/2}e^{-\Lambda(\theta)n}e^{-h_\theta M_2}. \quad (24)$$

Полагая для краткости

$$\tilde{\theta} = \kappa(1 - \kappa)(\theta - \delta)/2,$$

оценим вторую вероятность в правой части (23):

$$\mathbf{P}(\max_{i \leq n(1 - \kappa)} \zeta_{n-i} > \tilde{\theta}n) = 1 - (1 - \mathbf{P}(\zeta_i > \tilde{\theta}n))^n \leq n\mathbf{P}(e^{h\zeta_i} > e^{h\tilde{\theta}n}) \leq n\mathbf{E}e^{h\zeta_i}e^{-h\tilde{\theta}n}.$$

Выбирая h достаточно большим, видим, что

$$\mathbf{P}(\max_{i \leq n(1 - \kappa)} \zeta_{n-i} > \kappa(1 - \kappa)(\theta - \delta)n/2) \leq \frac{\varepsilon}{4}\mathbf{P}(S_n \geq \theta n). \quad (25)$$

Подставляя неравенства (24), (25) в (23), получаем, что

$$\mathbf{P}(\exists i \leq n(1 - \kappa): S_i + \zeta_{n-i} > \delta n + (\theta - \delta)i + M_2) \leq \frac{\varepsilon}{2}\mathbf{P}(S_n \geq \theta n). \quad (26)$$

Покажем, что параметры δ и κ могут быть выбраны так, чтобы выполнялось неравенство

$$\mathbf{P}(\exists i: n(1-\kappa) \leq i \leq n: S_i + \zeta_{n-i} > \delta n + (\theta - \delta)i + M_2) \leq \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{P}(S_n \geq \theta n), \quad (27)$$

и тем самым закончим доказательство леммы 3.

Вероятность в правой части (27) оценивается сверху суммой

$$\sum_{i=n(1-\kappa)}^n \int_{\mathbf{R}} \mathbf{P}\left(S_{i-1} > \delta n + (\theta - \delta)i + M_2 - \ln a(x) - \ln \frac{b(x)}{2a^2(x)}\right) \mathbf{P}(\eta_{n-i} \in dx). \quad (28)$$

В силу неравенства (25), при достаточно больших n справедлива оценка

$$\mathbf{P}(\max_{i \leq n} \zeta_i > \theta \kappa n) < \frac{\varepsilon}{4} \mathbf{P}(S_n \geq \theta n),$$

а в силу неравенства Чебышева

$$\mathbf{P}(\exists i < n: X_i > \theta n) \leq n \mathbf{E} \exp(h_\theta X - h_\theta \theta n) = \varepsilon \mathbf{P}(S_n \geq \theta n).$$

В итоге, сумма (28) оценивается сверху величиной

$$\frac{\varepsilon}{4} \mathbf{P}(S_n \geq \theta n) + \sum_{i=n(1-\kappa)}^n \int_{\mathbf{R}} \mathbf{P}(\eta_{n-i} \in dx) I_{\ln(b(x)(2a(x))^{-1}) < \theta n(1-2\kappa)} \times \mathbf{P}\left(S_{i-1} > \delta n + (\theta - \delta)i + M_2 - \ln \frac{b(x)}{2a(x)}\right). \quad (29)$$

Полагая

$$\tilde{\theta}_2 = \delta n / (i - 1) + ((\theta - \delta)i - \ln(b(x)(2a(x))^{-1})) / (i - 1),$$

замечаем, что для таких x , что $\ln(b(x)(2a(x))^{-1}) < \theta n(1-2\kappa)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, $\tilde{\theta}_2$ содержится в некотором отрезке $[\theta_3, \theta_4] \subset (0, m^+)$, не зависящем от x . Представляя вероятность в правой части (29) в виде $\mathbf{P}(S_i > \tilde{\theta}_2 i + M_2)$ и применяя к ней теорему Петрова (4), получаем, что сумма в правой части (12) асимптотически оценивается сверху величиной

$$e^{-h_\theta M_2} \sum_{i=n(1-\kappa)}^n i^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} \mathbf{P}(\eta_{n-i} \in dx) e^{-\Lambda(\tilde{\theta}_2)(i-1)} C(\tilde{\theta}_2). \quad (30)$$

Используя неравенство Гёльдера и неравенство

$$\Lambda(\tilde{\theta}_2)(i-1) > \Lambda(\theta)i + h_\theta \delta(n-i) - h_\theta \ln \frac{b(x)}{2a^2(x)},$$

вытекающее из выпуклости функции $\Lambda(x)$, и выбирая $\delta < \theta$ достаточно близким к θ так, чтобы выполнялось неравенство

$$h_\theta \delta > \Lambda(\theta) = h_\theta \theta - \ln R(h_\theta),$$

получаем, что (30) оценивается сверху величиной

$$n^{-1/2} e^{-\Lambda(\theta)n} e^{-h_\theta M_2} C_1 (\mathbf{E}(e^{h_\theta p \zeta_1}))^{1/p} (\mathbf{E}(e^{h_\theta q X_1}))^{1/q} \sum_{i=0}^{\infty} e^{-(h_\theta \delta - \Lambda(\theta))i}, \quad (31)$$

где

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p, q > 1,$$

а q выбирается из условия

$$\frac{h_{\theta_2}}{q} < h^+,$$

C_1 — некоторая величина, не зависящая от n , M_2 и θ . Выбирая M_2 в (31) достаточно большим, приходим к неравенству (10). Лемма 3 доказана.

В силу леммы 3, при подходящих значениях параметров M_2 , δ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(\sum_{i=0}^{n-1} e^{S_i + \zeta_{n-i}} > M_1^{-1} e^{\theta n}, S_n \leq \theta n - M \right) &\leq \frac{\varepsilon}{30} \mathbf{P}(S_n \geq \theta n) \\ &+ \mathbf{P} \left(\sum_{i=0}^{n-1} e^{S_i + \zeta_{n-i}} > M_1^{-1} e^{\theta n}, S_n \leq \theta n - M, \right. \\ &\quad \left. S_i + \zeta_{n-i} \leq \delta n + (\theta - \delta)i + M_2 \text{ для всех } i \leq n \right). \end{aligned} \quad (32)$$

В предположении, что при всех $i \leq n$ выполнено неравенство

$$S_i + \zeta_{n-i} \leq \delta n + (\theta - \delta)i + M_2,$$

справедлива следующая оценка:

$$\sum_{i=0}^{n-l} e^{S_i + \zeta_{n-i}} \leq \sum_{i=0}^{n-l} e^{\delta n + (\theta - \delta)i + M_2} \leq e^{M_2} e^{\theta n} e^{-(\theta - \delta)l} (1 - e^{-(\theta - \delta)})^{-1}.$$

Выбирая l достаточно большим, заключаем, что

$$\sum_{i=0}^{n-l} e^{S_i + \zeta_{n-i}} \leq \frac{1}{2} e^{\theta n} M_1^{-1}.$$

Отсюда и из (32) следует, что левая часть (15) оценивается сверху величиной

$$\begin{aligned} &\frac{\varepsilon}{30} \mathbf{P}(S_n \geq \theta n) + \mathbf{P} \left(\sum_{i=n-l}^{n-1} e^{S_i + \zeta_{n-i}} > \frac{M_1^{-1} e^{\theta n}}{2}, \right. \\ &\quad \left. \max(S_{n-l+1}, \dots, S_n) + \max(\zeta_{n-l+1}, \dots, \zeta_n) \leq \theta n - M_2 \right) \\ &+ \mathbf{P}(\max(S_{n-l+1}, \dots, S_n) + \max(\zeta_{n-l+1}, \dots, \zeta_n) > \theta n - M_2, \\ &\quad M_n \leq \theta n - M_3) \\ &+ \mathbf{P}(S_n \leq \theta n - M, M_n > \theta n - M_3), \end{aligned} \quad (33)$$

где M_2 — некоторая константа.

Второе слагаемое суммы (33) при $M_2 > \ln M_1 + \ln l$ равняется нулю в силу неравенств

$$\begin{aligned} \sum_{i=n-l}^{n-1} e^{S_i + \zeta_{n-i}} &\leq l e^{\max(S_{n-l+1}, \dots, S_n) + \max(\zeta_{n-l+1}, \dots, \zeta_n)} \\ &\leq l e^{\theta n} e^{-M_2} < \frac{M_1^{-1} e^{\theta n}}{2}. \end{aligned}$$

Если положить

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_l) &= \sum_{i=1}^l \ln a(x_i), \\ g(x_1, \dots, x_l) &= \max_{i \leq l} \frac{b(x_i)}{a^2(x_i)}, \end{aligned}$$

то третье слагаемое в (33) может быть оценено величиной

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(\max(S_{n-l+1}, \dots, S_n) + \max(\zeta_{n-l+1}, \dots, \zeta_n) > \theta n - M_2, M_n \leq \theta n - M_3) \\ &\leq \int_{\mathbf{R}} \left(\mathbf{P}(M_{n-l} \geq \theta n - f(x_1, \dots, x_l) - g(x_1, \dots, x_l) - M_2) \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{P}\left(M_{n-l} > \theta n - M_3 - \sum_{i=1}^l a(x_i)\right) \right) I_{g(x_1, \dots, x_l) > M_3 - M_2} \mathbf{P}(\eta_i \in dx_i, i \leq l). \quad (34) \end{aligned}$$

Аналогично тому, как это было сделано в (29), добавим под знак интеграла в (34) индикатор события $\{f(x_1, \dots, x_l) + g(x_1, \dots, x_l) \leq (\theta - \kappa)n\}$. Подставляя в (34) соотношение (5) и пользуясь тем, что соответствующие асимптотические оценки равномерны по $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, находим, что правая часть (34) асимптотически оценивается сверху величиной

$$\begin{aligned} &D(\theta) n^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} e^{-\Lambda(\theta - f(x_1, \dots, x_l))/n - M_3/n} (e^{h_\theta(M_2 - M_3 + g(x_1, \dots, x_l))} - 1) \\ &\quad \times I_{g(x_1, \dots, x_l) > M_3 - M_2} \mathbf{P}(\eta_i \in dx_i, i \leq l) \\ &\leq D(\theta) n^{-1/2} e^{-\Lambda(\theta)n} e^{h_\theta M_3} (\mathbf{E} e^{h_\theta X/q})^q (\mathbf{E} e^{h_\theta(M_2 - M_3 + \max_{i \leq l} \zeta_i)/p})^p I_{\max_{i \leq l} \zeta_i > M_3 - M_2}^p \\ &\leq \mathbf{P}(M_n \geq \theta n) e^{h_\theta M_2} \int_{x > M_3 - M_2} e^{h_\theta x/p} l \mathbf{P}(\zeta_1 \leq x)^{l-1} \mathbf{P}(\zeta_1 \in dx), \quad (35) \end{aligned}$$

где $q > 1$ выбирается достаточно близким к 1 так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{h_{\theta_2}}{q} < h^+.$$

Интеграл в правой части (35) сходится равномерно по $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ и за счет выбора M_3 может быть сделан сколь угодно малым, а значит, третье слагаемое суммы (33) может быть сделано меньше $(\varepsilon/30)\mathbf{P}(S_n \geq \theta n)$. В силу теоремы 5 из [5], вероятность $\mathbf{P}(S_n \leq \theta n - M, M_n \geq \theta n - M_3)$ при любом M_3 может быть сделана меньше, чем $(\varepsilon/30)\mathbf{P}(S_n \geq \theta n)$ за счет выбора M . Подставляя полученные оценки в (33), завершаем доказательство леммы 2.

Следующие леммы 4 и 5 позволяют оценить оставшиеся слагаемые в (17).

Лемма 4. При $n, m \rightarrow \infty$ справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{E}(\mathbf{P}(Z_n^{(1)} + \dots + Z_n^{(m)} \geq e^{\theta n} m \mid \eta) I_{\theta n - M \leq S_n < \theta n - \tilde{\varepsilon}}) = \varepsilon \mathbf{P}(S_n \geq \theta n), \quad (36)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{P}(Z_n^{(1)} + \dots + Z_n^{(m)} \geq e^{\theta n} m \mid \eta) I_{\theta n + \tilde{\varepsilon} \leq S_n < \theta n + M}) \sim \mathbf{P}(\tilde{\varepsilon} \leq S_n - \theta n \leq M). \quad (37)$$

Доказательство. Полагая

$$\tilde{Z}_n^{(i)} = \frac{Z_n^{(i)} - e^{S_n}}{e^{S_n} \sqrt{2V_n - 1 + e^{-S_n}}},$$

$$A_n = \{\theta n - M \leq S_n < \theta n - \tilde{\varepsilon}, \min_{i \leq n} S_i > -\ln m/4\},$$

мы видим, что левая часть (36) оценивается сверху величиной

$$\mathbf{E} \left(\mathbf{P} \left(\tilde{Z}_n^{(1)} + \dots + \tilde{Z}_n^{(m)} \geq \frac{(e^{\theta n - S_n} - 1)m}{\sqrt{2V_n - 1 + e^{-S_n}}} \mid \eta \right) I_{A_n} \right) + \mathbf{P}(S_n \geq \theta n - M, \min_{i \leq n} S_i < -\ln m/4). \quad (38)$$

Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\tilde{Z}_n^{(i)} \mid \eta) &= 0, \\ \mathbf{E}((\tilde{Z}_n^{(i)})^2 \mid \eta) &= 1, \\ \mathbf{E}(|\tilde{Z}_n^{(i)}|^3 \mid \eta) &\leq \frac{6V_n^2 + 6V_n + 4 + (6V_n + 3)e^{-S_n} + e^{-2S_n}}{(2V_n - 1 + e^{-S_n})^{3/2}} \\ &\leq 6V_n + 10 + 9e^{-S_n} + e^{-2S_n} = D_n. \end{aligned}$$

Используя неравенство Берри–Эссеена, запишем, что

$$|\mathbf{P}(\tilde{Z}_n^{(1)} + \dots + \tilde{Z}_n^{(m)} \geq x \mid \eta) - 1 + \Phi(x)| \leq \frac{CD_n}{\sqrt{m}}, \quad (39)$$

где C — некоторая константа, не зависящая от η . Таким образом,

$$\mathbf{E}(\mathbf{P}(\tilde{Z}_n^{(1)} + \dots + \tilde{Z}_n^{(m)} \geq x \mid \eta) I_{A_n}) = (1 - \Phi(x))\mathbf{P}(A_n) + Q_n, \quad (40)$$

где

$$|Q_n| \leq C \mathbf{E}(D_n I_{A_n}) m^{-1/2}.$$

Заметим, что справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(D_n I_{A_n}) &\leq 20 + 6\mathbf{E}(V_n I_{A_n}) = 20 + 6 \sum_{i \leq n} \mathbf{E}(e^{-S_i} I_{A_n}), \\ \mathbf{E}(e^{-S_i} I_{A_n}) &\leq e^{\ln m/4} \mathbf{P}(S_n \geq \theta n - M, S_i \leq \tilde{\theta} i) + e^{-\tilde{\theta} i/2} \mathbf{P}(S_n \geq \theta n - M), \end{aligned} \quad (41)$$

где $\tilde{\theta}$ — некоторая положительная константа. Согласно оценкам, полученным в лемме 1 из [6], $\tilde{\theta}$ может быть выбрано таким образом, что сумма $\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(S_n \geq \theta n - M, S_i \leq \tilde{\theta} i)$ равномерно ограничена по n . Отсюда и из (41) получаем, что

$$|Q_n| = C m^{-1/4} \mathbf{P}(S_n \geq \theta n - M), \quad m, n \rightarrow \infty.$$

Заметим, что при условии события A_n справедливы неравенства

$$\frac{(e^{\theta n - S_n} - 1)m}{\sqrt{2V_n - 1 + e^{-S_n}}} \geq \frac{(e^{\tilde{\varepsilon}} - 1)m}{2V_n} \geq \frac{\tilde{\varepsilon}m}{2V_n}. \quad (42)$$

Подставляя (42) и (40) в (38), получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{P}(Z_n^{(1)} + \dots + Z_n^{(m)} \geq e^{\theta n} m \mid \eta) I_{A_n}) &\leq (1 - \Phi(\sqrt{m}\tilde{\varepsilon}))\mathbf{P}(S_n \geq \theta n - M) \\ &\quad + C m^{-1/4} \mathbf{P}(S_n \geq \theta n - M) \\ &\quad + \mathbf{P}(2V_n \geq \sqrt{m}, S_n \geq \theta n - M) \\ &\quad + \mathbf{P}(M_n \geq \theta n - M + \ln m/4) \\ &= \varepsilon \mathbf{P}(S_n \geq \theta n) \end{aligned} \quad (43)$$

при $m, n \rightarrow \infty$, и соотношение (36) доказано. Соотношение (37) доказывается аналогично. Полагая

$$B_n = \{\theta n + \tilde{\varepsilon} \leq S_n < \theta n + M, \min_{i \leq n} S_i \geq -\ln m/4\},$$

получаем, что при условии B_n

$$\frac{(e^{\theta n - S_n} - 1)m}{\sqrt{2V_n - 1 + e^{-S_n}}} \leq -\frac{\tilde{\varepsilon}m}{2V_n}, \quad (44)$$

и, подобно тому, как мы из (42) выводили (43), из (44) получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{P}(Z_n^{(1)} + \dots + Z_n^{(m)} \geq e^{\theta n} m \mid \eta) I_{B_n}) &\geq 1 - \Phi(-\sqrt{m}\tilde{\varepsilon})\mathbf{P}(\tilde{\varepsilon} \leq S_n - \theta n < M) \\ &\quad - c_m \mathbf{P}(S_n \geq \theta n - M) \\ &\quad - \mathbf{P}(2V_n \geq \sqrt{m}, S_n \geq \theta n - M) \\ &= 1 - \varepsilon \mathbf{P}(S_n \geq \theta n), \end{aligned}$$

где $c_n = O(n^{-1/2})$.

Следующая лемма 5 получается непосредственным применением теоремы Петрова.

Лемма 5. *Найдутся такие $\tilde{\varepsilon}$, M , N_1 , M_1 , что для всех $n > N_1$ и для всех $m > M_1$ справедливы оценки*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{P}(Z_n^{(1)} + \dots + Z_n^{(m)} \geq e^{\theta n} m \mid \eta) I_{\theta n - \tilde{\varepsilon} \leq S_n \leq \theta n + \tilde{\varepsilon}}) &\leq \varepsilon \mathbf{P}(S_n \geq \theta n)/5, \\ \mathbf{E}(\mathbf{P}(Z_n^{(1)} + \dots + Z_n^{(m)} \geq e^{\theta n} m \mid \eta) I_{S_n \geq \theta n + M}) &\leq \varepsilon \mathbf{P}(S_n \geq \theta n)/5. \end{aligned}$$

Пользуясь леммами 1–5, из (17) выводим, что для произвольного ε найдутся такие M_1 , N_1 , M , $\tilde{\varepsilon}$, что для всех $m > M_1$ и для всех $n > N_1$ справедлива оценка

$$|\mathbf{P}(Z_n \geq m e^{\theta n} \mid Z_0 = m) - \mathbf{P}(\tilde{\varepsilon} \leq S_n < M)| \leq \varepsilon \mathbf{P}(S_n \geq \theta n). \quad (45)$$

Осуществляя в (45) предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$, $M \rightarrow \infty$, $\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0$, приходим к теореме 2.

Пользуясь случаем, автор выражает признательность М. В. Козлову за обсуждение работы, а также благодарит рецензента за крайне внимательное прочтение работы и ряд ценных замечаний и исправлений.

Список литературы

1. Козлов М. В., О больших отклонениях ветвящихся процессов. *Дискретная математика* (2006) **18**, №2, 29–47.
2. Козлов М. В., О больших отклонениях строго докритических ветвящихся процессов в случайной среде с геометрическим распределением числа потомков. *Теория вероятностей и ее применения* (2009) **54**, №3, 439–465.
3. Agresti A., On the extinction times of varying and random environment branching processes. *J. Appl. Probab.* (1975) **12**, 39–46.
4. Петров В. В., О вероятностях больших отклонений сумм независимых случайных величин. *Теория вероятностей и ее применения* (1965) **10**, 310–322.
5. Шкляев А. В., Предельные теоремы для случайного блуждания при условии большого отклонения максимума. *Теория вероятностей и ее применения* (2010) **55**, №3, 590–598.
6. Шкляев А. В., Большие отклонения статистики Шеппа. *Теория вероятностей и ее применения* (2010) **55**, №4, 796–803.
7. Boinghoff C., Kersting G., Upper large deviations of branching processes in a random environment—offspring distributions with geometrically bounded tails. *Stochastic Process. Appl.* (2010) **10**, 2064–2077.
8. Bansaye V., Berestycki J., Large deviations for branching processes in random environment. *Markov Process. Relat. Fields* (2009) **4**, 493–524.

Статья поступила 20.12.2011.

Переработанный вариант поступил 24.07.2012.