Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. К. Дассиос, О решениях и алгебраической двойственности обобщенных линейных систем с дискретным временем, *Дискрет. матем.*, 2012, том 24, выпуск 4, 131–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/dm1216>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 14:03:57

О решениях и алгебраической двойственности обобщенных линейных систем с дискретным временем

© 2012 г. И. К. Дассиос

В статье изучается класс обобщенных линейных систем с дискретным временем, коэффициентами которых являются квадратные матрицы, состоящие из констант. Целью статьи является установление связи между решениями некоторого класса сингулярных линейных систем с дискретным временем с их собственными и транспонированными двойственными системами. Вначале мы исследуем первичную систему и с использованием инвариантов ее матричного пучка получаем необходимые и достаточные условия для существования и единственности решения и выводим формулы для решений. Затем мы показываем, что с использованием того же матричного пучка можно изучать существование и единственность решения для собственной и транспонированной двойственной системы. Более того, их решения, если они существуют, могут быть для них явно выписаны без дальнейших вычислений. В заключение в иллюстративных целях мы приводим численный пример.

1. Введение

Под линейными системами с дискретным временем мы будем подразумевать системы, в которых переменные принимают значения в отдельно взятые моменты времени. Системы с дискретным временем отличаются от таковых с непрерывным временем в том, что их сигналы предстают в виде выборок. С развитием цифровых вычислительных машин, теория систем с дискретным временем начинает играть ведущую роль в теории управления. На практике, системы с дискретным временем возникают в результате взятия выборок из систем с непрерывным временем или в случае, когда возможно использовать только дискретные данные. Системы с дискретным временем находят широкое применение в экономике, физике, теории схем и других областях. Например, в финансовой математике хорошо известна модель Леонтьева [1], или модель роста населения Лесли, см. также [1]. В медицине известны модели хозяина–паразита, см. [2]. Исследования поглощающих марковских цепей, а также распределения тепла через теплопроводящий стержень также являются интересными применениями, предложенными в [2]. Вообще, имеется достаточно большое число исследований, посвященных системам с дискретным временем, см. [1–5, 7–11, 13, 15–20]. Обобщенная автономная система с дискретным временем вида

$$FY_{k+1} = GY_k \quad (1)$$

с заданными начальными условиями

$$Y_{k_0} \quad (2)$$

возникает как единое представление при изучении свойств линейных систем, где $F, G \in \mathcal{M}(n \times n; \mathcal{F})$, $Y_k \in \mathcal{M}(n \times 1; \mathcal{F})$, иными словами, взяты из алгебры матриц с элементами из поля $\mathcal{F}$, в то время как матрица F вырождена. Для краткости положим

$$\mathcal{M}_n = \mathcal{M}(n \times n; \mathcal{F}), \quad \mathcal{M}_{nm} = \mathcal{M}(n \times m; \mathcal{F}).$$

Важность систем вида (1) также связана с их ролью в определении ряда ключевых понятий двойственности, см. [2]. Понятия двойственной конфигурации и двойственной задачи ведут происхождение из проективной геометрии, см. [5]. Сущность понятия двойственной системы, определяемой ниже, подобна используемому в проективной геометрии для автономных дифференциальных систем. Использование этого принципа подразумевает, что если некоторое предложение верно для заданной системы, то двойственное предложение верно для двойственной системы. Рассмотрим систему, определяемую как

$$F \hat{Y}_k = G \hat{Y}_{k+1} \quad (3)$$

с заданными начальными условиями

$$\hat{Y}_{k_0} \quad (4)$$

и систему, определяемую как

$$F^T \tilde{Y}_{k+1} = G^T \tilde{Y}_k \quad (5)$$

с заданными начальными условиями

$$\tilde{Y}_{k_0} \quad (6)$$

где $(\cdot)^T$ означает транспонирование.

Определение 1. Систему (1) назовем первичной системой, систему (3) назовем собственной двойственной, или просто двойственной, и систему (5) назовем транспонированной двойственной.

Двойственность между системами (1) и (3) ранее получила название дифференциал-интегральной двойственности, а двойственность между (1) и (5) — двойственности транспонирования. Для изучения линейных матричных дифференциальных уравнений (ЛМДУ) с неизменными во времени коэффициентами широко используется теория матричных пучков, см., например, [1–6, 8, 10–20]. Под матричным пучком понимается семейство матриц $sF - G$, параметризованное комплексным числом s (см. [7, 8]). Если G квадратна и $F = I_n$, где I_n — единичная матрица, то нули функции $\det(sF - G)$ являются собственными значениями G . Таким образом, проблему нахождения нетривиального решения уравнения

$$sFX = GX \quad (7)$$

естественно назвать обобщенной проблемой собственных значений. Хотя эта задача и выглядит как простое обобщение обычной проблемы собственных значений, имеется ряд важных различий.

Во-первых, $\det(sF - G)$ может быть тождественным нулем, вне зависимости от s .

Во-вторых, F может быть вырожденной, и тогда возникают бесконечные собственные значения. Чтобы увидеть это, запишем обобщенную проблему собственных значений в обратной форме:

$$FX = s^{-1}GX. \quad (8)$$

Если F вырождена с нулевым вектором X , то $GX = 0_{n,1}$, так что X является собственным вектором обратной проблемы, соответствующим собственному значению $s^{-1} = 0$, то есть $s = \infty$.

Определение 2. При известных $F, G \in \mathcal{M}_{nm}$ и неопределенном $s \in F$, матричный пучок $sF - G$ называется регулярным, если $m = n$ и $\det(sF - G) \neq 0$. В противном случае пучок называется сингулярным.

В настоящей статье мы рассматриваем случай, когда пучок регулярен. Для системы (1) соответствующий матричный пучок есть $sF - G$, для системы (3) матричный пучок есть $F - \hat{s}G$, и для системы (5) он есть $\tilde{s}F^T - G^T$. Ясно, что вышеописанная двойственность по сути определяется связями между соответствующими пучками. Изучение двойственностей между (1), (3) и (5) сводится к изучению связей между их пучками. Понятие двойственности, введенное выше, может быть интерпретировано алгебраически, через соотношения между инвариантами строгой эквивалентности соответствующих пучков. Основной результат заключается в том, что если известно решение одной из этих систем, то решения остальных двух систем легко получить без дальнейших громоздких вычислений.

2. Регулярные матричные пучки

В настоящей статье мы рассматриваем исключительно регулярные матричные пучки.

Линейные системы вида (1) с заданными начальными условиями (2) тесно связаны с теорией матричных пучков, поскольку их алгебраические, геометрические и динамические свойства определяются структурой соответствующего пучка $sF - G$. Класс $sF - G$ характеризуется однозначно определенным элементом, носящим имя комплексной канонической формы Вейерштрасса $sF_w - Q_w$ (см. [5, 6, 9]) задаваемой полным множеством инвариантов $sF - G$. В случае регулярности $sF - G$, получаем собственные значения следующих типов:

- нулевые собственные значения алгебраической кратности p_0 ;
- ненулевые конечные собственные значения a_i алгебраической кратности p_i ;
- бесконечные собственные значения алгебраической кратности q .

Предположим, что

$$\sum_{i=1}^v p_i = p, \quad p_0 + p + q = n.$$

Определение 3. Пусть $B_1, B_2, \dots, B_n$ есть элементы $\mathcal{M}_n$. Их прямая сумма, обозначаемая $B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_n$, есть $\text{blockdiag} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \end{bmatrix}$.

В силу регулярности $sF - G$, найдутся невырожденные матрицы $P, Q \in \mathcal{M}_n$, такие, что

$$\begin{aligned} PFQ &= F_w = I_{p_0} \oplus I_p \oplus H_q, \\ PGQ &= G_w = J_{p_0} \oplus J_p \oplus I_q, \end{aligned}$$

где $sF_w - Q_w$ есть комплексная форма Вейерштрасса регулярного пучка $sF - G$, определенная как

$$sF_w - Q_w = sI_{p_0} - J_{p_0} \oplus sI_p - J_p \oplus sH_q - I_q,$$

где первые два нормальных жорданова элемента $sI_{p_0} - J_{p_0}$ и $sI_p - J_p$ однозначно определяются множеством конечных собственных значений $sF - G$, нулевых и ненулевых соответственно:

$$s^{p_0}(s - a_1)^{p_1}, \dots, (s - a_v)^{p_v}. \quad (9)$$

Второй блок имеет вид

$$sI_p - J_p = sI_{p_1} - J_{p_1}(a_1) \oplus \dots \oplus sI_{p_v} - J_{p_v}(a_v). \quad (10)$$

Блоки третьего типа количеством q штук однозначно определяют блок $sH_q - I_q$, соответствующий бесконечным собственным значениям $sF - G$

$$\hat{s}^{q_1}, \dots, \hat{s}^{q_\sigma}, \quad \sum_{j=1}^{\sigma} q_j = q, \quad (11)$$

и имеющий вид

$$sH_q - I_q = sH_{q_1} - I_{q_1} \oplus \dots \oplus sH_{q_\sigma} - I_{q_\sigma}. \quad (12)$$

Таким образом, H_q есть нильпотентный элемент $\mathcal{M}_n$ с индексом

$$\tilde{q} = \max\{q_j : j = 1, 2, \dots, \sigma\},$$

где

$$H_q^{\tilde{q}} = 0_{q,q},$$

и $I_{p_j}, J_{p_j}(a_j), H_{q_j}$ определены следующим образом:

$$\begin{aligned} I_{p_j} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{p_j}, \\ J_{p_j}(a_j) &= \begin{bmatrix} a_j & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_j & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_j & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_j \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{p_j}, \\ H_{q_j} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{q_j}. \end{aligned} \quad (13)$$

Сведения об алгоритмах, относящихся к жордановым матрицам, можно найти в [5, 7, 19].

Замечание 1. Легко видеть, что

$$J_{p_0} = H_{p_0}.$$

Матрица Q конструируется из n (обобщенных) линейно независимых собственных векторов, соответствующих нулевым, ненулевым и бесконечным собственным значениям.

Двойственность между (1), (3) или между их матричными пучками $sF - G$, $F - \hat{s}G$ может рассматриваться как следствие специального билинейного или проективного преобразования на прямой:

$$s \longrightarrow \frac{1}{\hat{s}},$$

которое, очевидно, преобразует точки $0, a_i \neq 0, \infty$ на компактифицированной комплексной плоскости в точки $\infty, 1/a_i, 0$ соответственно. Понятие двойственности может пониматься алгебраически, в терминах отношений между инвариантами строгой эквивалентности соответствующих пучков. Эти отношения таковы:

- нулевое собственное значение $sF - G$ есть бесконечное собственное значение $F - \hat{s}G$ и обратно;
- ненулевое конечное собственное значение a_i определяет ненулевое конечное собственное значение $1/a_i$ $F - \hat{s}G$ и обратно;
- бесконечное собственное значение $sF - G$ есть нулевое собственное значение $F - \hat{s}G$ и обратно.

Очевидно, основной характеристикой этого вида двойственности является инверсия, определяемая двойственной ролью различных типов собственных значений.

3. Основные результаты

В этом разделе мы получим формулы для решений ЛМДУ с регулярным матричным пучком и дадим необходимые и достаточные условия для существования и единственности решений.

Для регулярного матричного пучка системы (1) найдутся невырожденные матрицы $P, Q \in \mathcal{M}_n$, такие, что

$$\begin{aligned} PFQ &= F_w = I_{p_0} \oplus I_p \oplus H_q, \\ PGQ &= G_w = J_{p_0} \oplus J_p \oplus I_q. \end{aligned} \quad (14)$$

Положим

$$P = \begin{bmatrix} P_{p_0} \\ P_p \\ P_q \end{bmatrix}, \quad P_{p_0} \in \mathcal{M}_{p_0 n}, \quad P_p \in \mathcal{M}_{pn}, \quad P_q \in \mathcal{M}_{qn}, \quad (15)$$

и

$$Q = [Q_{p_0} \quad Q_p \quad Q_q], \quad (16)$$

где $Q_{p_0} \in \mathcal{M}_{n p_0}$ — матрица, столбцы которой есть p_0 линейно независимых (обобщенных) собственных векторов, соответствующих p_0 нулевым собственным значениям $sF - G$,

$Q_p \in \mathcal{M}_{(n)p}$ — матрица, столбцы которой есть p линейно независимых (обобщенных) собственных векторов, соответствующих p конечным (нулевым и ненулевым) собственным значениям $sF - G$, и $Q_q \in \mathcal{M}_{(mn)q}$ — матрица, столбцы которой есть q линейно независимых (обобщенных) собственных векторов, соответствующих q бесконечным собственным значениям $sF - G$ или q нулевым собственным значениям $F - \hat{s}G$.

Теорема 1. Рассмотрим системы (1), (3), (5) с заданными начальными условиями (2), (4), (6), соответственно, и пусть P , Q — невырожденные матрицы, определенные (14). Тогда

(1) решение системы (1) единственно тогда и только тогда, когда

$$Y_{k_0} \in \text{colspan}[Q_{p_0} \quad Q_p]; \quad (17)$$

ее единственное решение дается соотношением

$$Y_k = [Q_{p_0} \quad Q_p] J_{p_0+p}^{k-k_0} Z_{k_0}^{p_0+p}, \quad (18)$$

где

$$J_{p_0+p}^{k-k_0} = J_{p_0}^{k-k_0} \oplus J_p^{k-k_0}$$

и $Z_{k_0}^{p_0+p}$ есть единственное решение алгебраической системы

$$Y_{k_0} = [Q_{p_0} \quad Q_p] Z_{k_0}^{p_0+p}; \quad (19)$$

(2) решение системы (3) единственно тогда и только тогда, когда

$$\hat{Y}_{k_0} \in \text{colspan}[Q_p \quad Q_q]; \quad (20)$$

ее единственное решение дается соотношением

$$\hat{Y}_k = [Q_p \quad Q_q] J_{p+q}^{k-k_0} Z_{k_0}^{p_0+p}, \quad (21)$$

где

$$J_{p+q}^{k-k_0} = (J_p^{-1})^{k-k_0} \oplus H_q^{k-k_0}$$

и $\hat{Z}_{k_0}^{p+q}$ есть единственное решение алгебраической системы

$$\hat{Y}_{k_0} = [Q_p \quad Q_q] Z_{k_0}^{p+q}; \quad (22)$$

(3) решение системы (5) единственно тогда и только тогда, когда

$$\tilde{Y}_{k_0} \in \text{colspan}[P_{p_0}^T \quad P_p^T]; \quad (23)$$

ее единственное решение дается соотношением

$$\tilde{Y}_k = [P_{p_0}^T \quad P_p^T] (J_{p_0+p}^T)^{k-k_0} \tilde{Z}_{k_0}^{p_0+p}, \quad (24)$$

где

$$(J_{p_0+p}^T)^{k-k_0} = (J_p^T)^{k-k_0} \oplus H_q^{k-k_0}$$

и $\tilde{Z}_{k_0}^{p_0+p}$ есть единственное решение алгебраической системы

$$\tilde{Y}_{k_0} = [P_{p_0}^T \quad P_p^T] \tilde{Z}_{k_0}^{p_0+p}. \quad (25)$$

Доказательство. Докажем первое утверждение. Рассмотрим преобразование

$$Y_k = QZ_k. \quad (26)$$

Подставляя вышеприведенное выражение в (1), получаем, что

$$FQZ_{k+1} = GQZ_k,$$

и после умножения на P приходим к соотношению

$$F_w Z_{k+1} = G_w Z_k.$$

Далее, можно записать, что

$$Z_k = \begin{bmatrix} Z_k^{p_0} \\ Z_k^p \\ Z_k^q \end{bmatrix}, \quad Z_k^{p_0} \in \mathcal{M}_{p_0 n}, \quad Z_k^p \in \mathcal{M}_{pn}, \quad Z_k^q \in \mathcal{M}_{pn}.$$

Учитывая приведенные выше выражения, немедленно получаем три подсистемы (1), именно, подсистемы

$$Z_{k+1}^p = J_{p_0} Z_k^{p_0}, \quad (27)$$

$$Z_{k+1}^p = J_p Z_k^p, \quad (28)$$

$$H_q Z_{k+1}^q = Z_k^q. \quad (29)$$

Подсистемы (27), (28) имеют единственные решения

$$Z_k^{p_0} = J_{p_0}^{k-k_0} Z_{k_0}^{p_0}, \quad k \geq k_0, \quad (30)$$

$$Z_k^p = J_p^{k-k_0} Z_{k_0}^p, \quad k \geq k_0, \quad (31)$$

соответственно (см. [3, 8, 10, 20]). Для того, чтобы найти решение системы (29), положим q_* равным значению индекса нильпотентной матрицы H_q , то есть

$$H_q^{q_*} = 0_{q,q}.$$

Тогда получаем следующие уравнения:

$$H_q Z_{k+1}^q = Z_k^q,$$

$$H_q^2 Z_{k+1}^q = H_q Z_k^q,$$

$$H_q^3 Z_{k+1}^q = H_q^2 Z_k^q,$$

...

$$H_q^{q_*} Z_{k+1}^q = H_q^{q_*-1} Z_k^q,$$

и

$$H_q Z_{k+1}^q = Z_k^q,$$

$$H_q^2 Z_{k+2}^q = H_q Z_{k+1}^q,$$

$$H_q^3 Z_{k+3}^q = H_q^2 Z_{k+2}^q,$$

...

$$H_q^{q_*} Z_{k+q_*}^q = H_q^{q_*-1} Z_{k+q_*-1}^q.$$

Последовательно подставляя каждое уравнение в следующее и используя тот факт, что $H_q^{q*} = 0_{q,q}$, получаем решение системы (29)

$$Z_k^q = 0_{q,1}. \quad (32)$$

Соотношение (16) теперь принимает вид

$$Q = [Q_{p_0} \quad Q_p \quad Q_q],$$

где $Q_{p_0} \in \mathcal{M}_{np_0}$, $Q_p \in \mathcal{M}_{np}$, $Q_q \in \mathcal{M}_{nq}$ есть матрицы, чьи столбцы образованы, соответственно, p_0 , p , q обобщенными собственными векторами, соответствующими нулевым, ненулевым конечным и бесконечным собственным значениям. Тогда получаем, что

$$\begin{aligned} Y_k &= QZ_k = [Q_{p_0} \quad Q_p \quad Q_q] \begin{bmatrix} J_{p_0}^{k-k_0} Z_{k_0}^{p_0} \\ J_p^{k-k_0} Z_{k_0}^p \\ 0_{q,1} \end{bmatrix}, \\ Y_k &= Q_{p_0} J_{p_0}^{k-k_0} Z_{k_0}^{p_0} + Q_p J_p^{k-k_0} Z_{k_0}^p, \end{aligned}$$

или

$$Y_k = [Q_{p_0} \quad Q_p] J_{p_0+p}^{k-k_0} Z_{k_0}^{p_0+p},$$

где

$$Z_{k_0}^{p_0+p} = \begin{bmatrix} Z_{k_0}^{p_0} \\ Z_{k_0}^p \end{bmatrix}.$$

Решение существует тогда и только тогда, когда

$$Y_{k_0} = [Q_{p_0} \quad Q_p] Z_{k_0}^{p_0+p},$$

или $Y_{k_0} \in \text{colspan}[Q_{p_0} \quad Q_p]$.

Перейдем к рассмотрению двойственной системы (3). Рассмотрим преобразование

$$\hat{Y}_k = Q \hat{Z}_k. \quad (33)$$

Подставляя вышеприведенное выражение в (3), получаем, что

$$FQ \hat{Z}_k = GQ \hat{Z}_{k+1},$$

и после умножения на P приходим к соотношению

$$F_w \hat{Z}_k = G_w \hat{Z}_{k+1}.$$

Далее, можно записать, что

$$\hat{Z}_k = \begin{bmatrix} \hat{Z}_k^{p_0} \\ \hat{Z}_k^p \\ \hat{Z}_k^q \end{bmatrix}.$$

Учитывая приведенные выше выражения, немедленно получаем три подсистемы (3), именно, подсистемы

$$J_{p_0} \hat{Z}_{k+1}^p = \hat{Z}_k^{p_0}, \quad (34)$$

$$J_p \hat{Z}_{k+1}^p = \hat{Z}_k^p, \quad (35)$$

$$\hat{Z}_{k+1}^q = H_q \hat{Z}_k^q. \quad (36)$$

Поскольку

$$J_{p_0} = H_{p_0},$$

система (34) подобна системе (29) и имеет единственное решение

$$\hat{Z}_k^{p_0} = 0_{p_0,1}. \quad (37)$$

Жорданова матрица J_p невырождена, поскольку она определена для ненулевых конечных собственных значений. Таким образом, подсистемы (35), (36) имеют единственные решения

$$\hat{Z}_k^p = (J_p^{-1})^{k-k_0} \hat{Z}_{k_0}^p, \quad k \geq k_0, \quad (38)$$

$$\hat{Z}_k^q = H_q^{k-k_0} \hat{Z}_{k_0}^q, \quad k \geq k_0, \quad (39)$$

соответственно. Тогда, с учетом (16), получаем, что

$$\begin{aligned} \hat{Y}_k &= Q \hat{Z}_k = [Q_{p_0} \quad Q_p \quad Q_q] \begin{bmatrix} 0_{p_0,1} \\ (J_p^{-1})^{k-k_0} \hat{Z}_{k_0}^p \\ H_q^{k-k_0} \hat{Z}_{k_0}^q \end{bmatrix}, \\ \hat{Y}_k &= Q_p (J_p^{-1})^{k-k_0} \hat{Z}_{k_0}^p + Q_q H_q^{k-k_0} \hat{Z}_{k_0}^q, \end{aligned}$$

или

$$\hat{Y}_k = [Q_p \quad Q_q] J_{p+q}^{k-k_0} \hat{Z}_{k_0}^{p+q},$$

где

$$\hat{Z}_{k_0}^{p+q} = \begin{bmatrix} \hat{Z}_{k_0}^p \\ \hat{Z}_{k_0}^q \end{bmatrix}.$$

Решение существует тогда и только тогда, когда

$$\hat{Y}_{k_0} = [Q_p \quad Q_q] \hat{Z}_{k_0}^{p+q}$$

или $\hat{Y}_{k_0} \in \text{colspan}[Q_p \quad Q_q]$.

Перейдем к рассмотрению транспонированной двойственной системы (5). Рассмотрим преобразование

$$\tilde{Y}_k = P^T \tilde{Z}_k. \quad (40)$$

Подставляя вышеприведенное выражение в (5), получаем, что

$$F^T P^T \tilde{Z}_{k+1} = G^T P^T \tilde{Z}_k$$

или

$$\tilde{Z}_{k+1}^T P F = \tilde{Z}_k^T P G,$$

и после умножения на Q приходим к соотношениям

$$\tilde{Z}_{k+1}^T F_w = \tilde{Z}_k^T v G_w$$

или

$$F_w^T \tilde{Z}_{k+1} = G_w^T \tilde{Z}_k.$$

Производя замену

$$\tilde{Z}_k = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_k^{p_0} \\ \tilde{Z}_k^p \\ \tilde{Z}_k^q \end{bmatrix},$$

немедленно приходим к трем подсистемам (5), именно, подсистемам

$$\tilde{Z}_{k+1}^p = J_{p_0}^T \tilde{Z}_k^{p_0}, \quad (41)$$

$$\tilde{Z}_{k+1}^p = J_p^T \tilde{Z}_k^p, \quad (42)$$

$$H_q^T \tilde{Z}_{k+1}^q = \tilde{Z}_k^q. \quad (43)$$

Система (43) подобна системе (29) и имеет единственное решение

$$\tilde{Z}_k^{p_0} = 0_{p_0,1}. \quad (44)$$

Системы (41), (42) имеют единственные решения

$$\tilde{Z}_k^p = (J_{p_0}^T)^{k-k_0} \tilde{Z}_{k_0}^{p_0}, \quad k \geq k_0, \quad (45)$$

$$\tilde{Z}_k^p = (J_p^T)^{k-k_0} \tilde{Z}_{k_0}^p, \quad k \geq k_0, \quad (46)$$

соответственно. Из (15) получаем, что

$$P^T = \begin{bmatrix} P_{p_0}^T & P_p^T & P_q^T \end{bmatrix}, \quad P_{p_0}^T \in \mathcal{M}_{np_0}, \quad P_p^T \in \mathcal{M}_{np}, \quad P_q^T \in \mathcal{M}_{nq},$$

откуда получаем, что

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_k &= P^T \tilde{Z}_k = \begin{bmatrix} P_{p_0}^T & P_p^T & P_q^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (J_{p_0}^T)^{k-k_0} \tilde{Z}_{k_0}^{p_0} \\ (J_p^T)^{k-k_0} \tilde{Z}_{k_0}^p \\ 0_{q,1} \end{bmatrix}, \\ \tilde{Y}_k &= P_{p_0}^T (J_{p_0}^T)^{k-k_0} \tilde{Z}_{k_0}^{p_0} + P_p^T (J_p^T)^{k-k_0} \tilde{Z}_{k_0}^p, \end{aligned}$$

или

$$\tilde{Y}_k = \begin{bmatrix} P_{p_0}^T & P_p^T \end{bmatrix} (J_{p_0+p}^T)^{k-k_0} \tilde{Z}_{k_0}^{p_0+p},$$

где

$$\tilde{Z}_{k_0}^{p_0+p} = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{k_0}^{p_0} \\ \tilde{Z}_k^p \end{bmatrix}.$$

Решение существует тогда и только тогда, когда $\tilde{Y}_{k_0} \in \text{colspan} \begin{bmatrix} P_{p_0}^T & P_p^T \end{bmatrix}$.

Замечание 2. Пусть $\tilde{q}$ — индекс матрицы H_q , тогда для $k \geq k_0 + \tilde{q}$ мы видим, что

$$H_q^{k-k_0} = 0,$$

и аналитическое решение (24) имеет вид

$$\tilde{Y}_k = Q_p(J_p^{-1})^{k-k_0} \tilde{Z}_{k_0}^p.$$

Поэтому решение (24) можно также записать в виде

$$\tilde{Y}_k = Q_p(J_p^{-1})^{k-k_0} \tilde{Z}_{k_0}^p + Q_q \sum_{i=0}^{\tilde{q}-1} \delta_{k-k_0-i} H_q^i \tilde{Z}_{k_0}^q, \quad (47)$$

где δ_{k-a} — функция Дирака

$$\delta_{k-a} = \begin{cases} 1, & k = a, \\ 0, & k \neq a. \end{cases}$$

4. Численные примеры

Рассмотрим матричный пучок $sF - G$ и положим

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 5 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\det[sF - G] = (s-2)(s-1).$$

Конечные элементарные делители есть $s-2$, $s-1$, и s^3 есть бесконечные элементарные делители. Найдутся невырожденные матрицы

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

такие, что

$$PFQ = F_w = \begin{bmatrix} I_p & 0_{2,3} \\ 0_{3,2} & H_q \end{bmatrix}, \quad G_w = \begin{bmatrix} J_p & 0_{2,3} \\ 0_{3,2} & I_q \end{bmatrix}, \quad (48)$$

где

$$J_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad J_p^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix}, \quad H_q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Далее,

$$Q_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_p^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Поскольку пучок не имеет нулевых собственных значений, матрицы Q_{p_0} , P_{p_0} не существуют.

Пример 1. Рассмотрим систему (1), и пусть начальные условия есть

$$Y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Then $Y_0 \in \text{colspan } Q_p$, и по теореме 1 система имеет единственное решение, задаваемое соотношением

$$Y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^k \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Z_0^p; \quad (49)$$

вычисляя Z_0^p , получаем

$$Y_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Z_0^2,$$

или

$$Z_0^p = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix};$$

таким образом, решение системы есть

$$Y_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 2^{k+1} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Теперь рассмотрим систему (1) с начальным условием

$$Y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда $Y_0 \notin \text{colspan } Q_p$, и из теоремы 1 следует, что система имеет не единственное решение. Ее бесконечно много решений даются соотношением

$$Y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^k \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C,$$

где

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

есть константа и размерность пространства векторов решений системы равна двум.

Пример 2. Рассмотрим систему (3). Так как матрицы Q_{p0} не существует,

$$Q = \text{colspan} [Q_p \quad Q_q].$$

Следовательно, $Y_0 \in \text{colspan} [Q_p \quad Q_q]$, для любого начального условия (5) системы, и система всегда имеет единственное решения. Например, положим начальное условие для системы (3) равным

$$Y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Индекс H_q равен $\tilde{q} = 3$, и из (47) следует, что единственное решение системы есть

$$\hat{Y}_k = Q_p (J_p^{-1})^k \hat{Z}_0^p + Q_q \sum_{i=0}^2 \delta_{k-i} H_q^i \hat{Z}_0^q.$$

или

$$\hat{Y}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1/2)^k \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{Z}_0^p + Q_q \sum_{i=0}^2 \delta_{k-i} H_q^i \hat{Z}_0^q;$$

вычисляя $\hat{Z}_0^p$ и $\hat{Z}_0^q$, получаем, что

$$Y_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{Z}_0^p + Q_q \hat{Z}_0^q,$$

или

$$\hat{Z}_0^p = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \hat{Z}_0^q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

и решение системы есть

$$\hat{Y}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ (1/2)^k + \delta_k \\ 0 \\ \delta_k \\ \delta_k \end{bmatrix}.$$

Пример 3. Рассмотрим систему (5), и положим начальное условие системы равным

$$\tilde{Y}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда $\tilde{Y}_0 \in \text{colspan } P_p^T$, и единственное решение системы задается соотношением

$$\tilde{Y}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2^k \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{Z}_0^p; \quad (50)$$

вычисляя $\tilde{Z}_0^p$, получаем, что

$$\tilde{Y}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{Z}_0^p,$$

или

$$\tilde{Z}_0^p = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

и тогда решение системы равно

$$Y_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2^k \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Далее, положим начальное условие равным

$$Y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Тогда $Y_0 \notin \text{colspan } P_p^T$, и система имеет бесконечно много решений

$$Y_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2^k \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} C,$$

где

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

— константа и размерность пространства векторов решений равна двум.

5. Заключение

Целью статьи являлось установление связи между решениями систем, двойственных к данной обобщенной автономной системе с дискретным временем вида (1). Мы установили, что если каноническая форма Вейерштрасса, равно как матрицы преобразования P и Q , являются известными для пучка $sF - G$, то возможно предъявить необходимые и достаточные условия существования и единственности решений систем вида (3) и (5). Это позволяет получить формулы для решения каждой из этих систем в случае их существования.

Автор выражает искреннюю благодарность проф. Г. И. Калогеропулосу за плодотворные обсуждения, которые способствовали улучшению статьи.

Список литературы

1. Campbell S. L., *Singular systems of differential equations*, 1–2. Pitman, San Francisco, 1980, 1982.
2. Sandefur J. T., *Discrete dynamical systems. Theory and applications*. Clarendon Press, Oxford, 1990.
3. Steward G. W., Sun J. G., *Matrix perturbation theory*. Oxford University Press, Oxford, 1990.
4. Kalogeropoulos G. I., *Matrix pencils and linear systems*, PhD Thesis. City University, London, 1985.

5. Vizireanu D. N., A fast, simple and accurate time-varying frequency estimation method for single-phase electric power systems. *Measurement* (2012) **45**, №5, 1331–1333.
6. Vizireanu D. N., Halunga S. V., Simple, fast and accurate eight points amplitude estimation method of sinusoidal signals for DSP based instrumentation. *J. Instrumentation* (2012) **7**, №4, P04001.
7. Dai L., *Singular control systems*. Springer, Berlin, 1989.
8. ГАНТМАХЕР Ф. Р., *Теория матриц*. Наука, Москва, 1967.
9. Gohberg I., Lancaster P., Rodman L., *Matrix polynomials*. Academic Press, New York, 1983.
10. Klamka J., Controllability of dynamical systems. *Matematyka Stosowana* (2008) **50**, №9, 57–75.
11. Klamka J., Controllability of nonlinear discrete systems. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.* (2002) **12**, №2, 173–180.
12. Klamka J., *Controllability of dynamical systems*. Kluwer, Dordrecht, 1991.
13. Dassios I. K., Solutions of higher-order homogeneous linear matrix differential equations for consistent and non-consistent initial conditions: regular case. *ISRN Mathematical Analysis* (2011) **2011**, 183795.
14. Dassios I. K., On a boundary value problem of a class of generalized linear discrete-time systems. *Advances in Difference Equations* (2011) **2011**, 51.
15. Dassios I. K., Perturbation and robust stability of autonomous singular linear matrix difference equations. *Appl. Math. Comput.* (2012) **218**, 6912–6920.
16. Mitrouli M., Kalogeropoulos G., Generalised linear discrete-time systems and matrix pencils algebraic duality. *J. Inst. Math. Comput. Sci., Math. Ser.* (1997) **10**, №2, 81–90.
17. Mitrouli M., Kalogeropoulos G., A matrix pencil approach computing the elementary divisors of a matrix: Numerical aspects and applications. *Korean J. Comput. Appl. Math.* (1998) **5**, №3, 627–644.
18. Mitrouli M., Kalogeropoulos G., A compound matrix algorithm for the computation of the Smith form of a polynomial matrix. *Numer. Algorithms* (1994) **7**, 145–159.
19. Lewis F. L., A survey of linear singular systems. *Circuits Syst. Signal Process.* (1986) **5**, 3–36.
20. Rugh W. J., *Linear system theory*. Prentice Hall, London, 1996.

Статья поступила 8.06.2011.

Переработанный вариант поступил 1.11.2012.